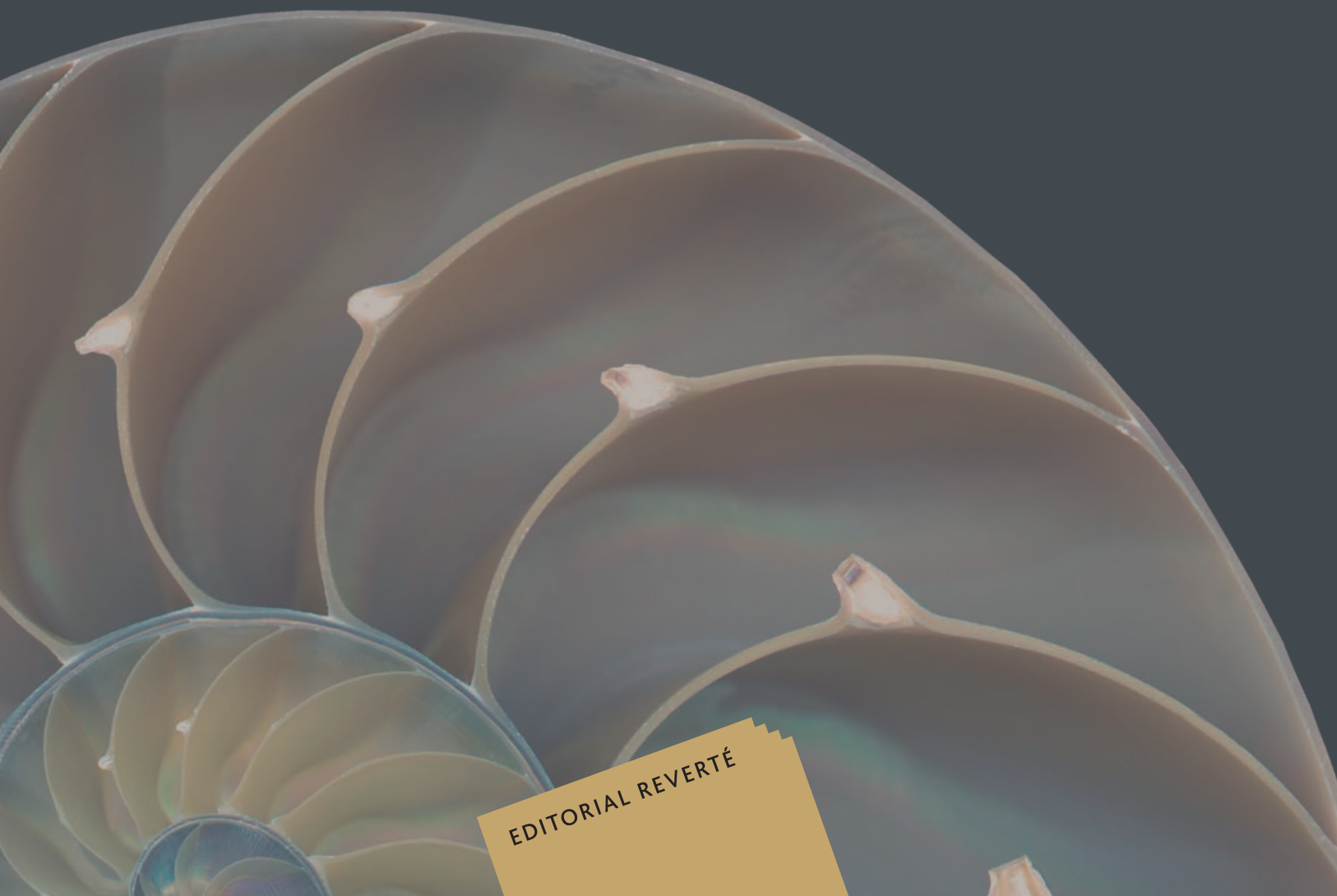
JON ROGAWSKI

CÁLCULO

VARIAS VARIABLES

Segunda edición



EDITORIAL REVERTÉ

CÁLCULO

VARIAS VARIABLES

Segunda edición

JON ROGAWSKI

Universidad de California, Los Ángeles

Versión española traducida por:
Gloria García García
Doctora en Matemáticas

Revisada por:
Martín Jimeno Jiménez
Licenciado en Matemáticas
Profesor Asociado en la
Universitat Politècnica de Catalunya

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:

Calculus. Multivariable. Second Edition

Edición original en lengua inglesa publicada en los Estados Unidos por:

W. H. Freeman and Company, New York and Basingstoke
Copyright © 2012 by W. H. Freeman and Company *All Rights Reserved*

Edición en español:

© Editorial Reverté, S. A., 2012

Edición en papel:

ISBN: 978-84-291-5195-4

Edición e-book (PDF):

ISBN: 978-84-291-9420-3

Versión española traducida por:

Gloria García García
Doctora en Matemáticas

Revisada por:

Martín Jimeno Jiménez
Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona.
Profesor Asociado en la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

1382

A Julie

CONTENIDO RESUMIDO | CÁLCULO

UNA VARIABLE

Capítulo 1	REPASO DE CONCEPTOS PREVIOS	1
Capítulo 2	LÍMITES	40
Capítulo 3	DERIVACIÓN	101
Capítulo 4	APLICACIONES DE LA DERIVADA	175
Capítulo 5	LA INTEGRAL	244
Capítulo 6	APLICACIONES DE LA INTEGRAL	296
Capítulo 7	FUNCIONES EXPONENCIALES	339
Capítulo 8	TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN	413
Capítulo 9	OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL Y POLINOMIOS DE TAYLOR	478
Capítulo 10	INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	513
Capítulo 11	SERIES INFINITAS	543
Capítulo 12	ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS	613

APÉNDICES	A1
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES	A27
REFERENCIAS	A99
CRÉDITOS DE LAS FOTOS	A103
ÍNDICE DE MATERIAS	I1

VARIAS VARIABLES

Capítulo 12	ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS	613
Capítulo 13	GEOMETRÍA VECTORIAL	663
Capítulo 14	CÁLCULO PARA FUNCIONES VECTORIALES	729
Capítulo 15	DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES	780
Capítulo 16	INTEGRACIÓN MÚLTIPLE	866
Capítulo 17	INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE	945
Capítulo 18	TEOREMAS FUNDAMENTALES DE ANÁLISIS VECTORIAL	1009

APÉNDICES	A1
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES	A27
REFERENCIAS	A51
CRÉDITOS DE LAS FOTOS	A52
ÍNDICE DE MATERIAS	I1

CONTENIDO | CALCULUS VARIAS VARIABLES

Capítulo 12 ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS 613

12.1 Ecuaciones paramétricas 613
12.2 La longitud de arco y la velocidad 626
12.3 Coordenadas polares 632
12.4 El área y la longitud de arco en coordenadas polares 640
12.5 Secciones cónicas 647

Capítulo 13 GEOMETRÍA VECTORIAL 663

13.1 Vectores en el plano 663
13.2 Vectores en tres dimensiones 674
13.3 Producto escalar y ángulo entre dos vectores 684
13.4 El producto vectorial 694
13.5 Planos en tres dimensiones 705
13.6 Un estudio de las cuádricas 711
13.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas 719

Capítulo 14 CÁLCULO PARA FUNCIONES VECTORIALES 729

14.1 Funciones vectoriales 729
14.2 Cálculo para funciones vectoriales 737
14.3 Longitud de arco y celeridad 747
14.4 Curvatura 752
14.5 Movimiento en el espacio tridimensional 762
14.6 Movimiento planetario según Kepler y Newton 771

Capítulo 15 DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES 780

15.1 Funciones de dos o más variables 780
15.2 Límites y continuidad en varias variables 792
15.3 Derivadas parciales 800
15.4 Diferenciabilidad y planos tangentes 811
15.5 El gradiente y las derivadas direccionales 819
15.6 La regla de la cadena 831
15.7 Optimización en varias variables 839
15.8 Multiplicadores de Lagrange: optimización con restricciones 853

Capítulo 16 INTEGRACIÓN MÚLTIPLE 866

16.1 Integración en dos variables 866
16.2 Integrales dobles sobre regiones más generales 878
16.3 Integrales triples 891
16.4 Integración en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas 902
16.5 Aplicaciones de las integrales múltiples 913
16.6 Cambio de variables 926

Capítulo 17 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE 945

17.1 Campos vectoriales 945
17.2 Integrales de línea 952
17.3 Campos vectoriales conservativos 969
17.4 Superficies parametrizadas e integrales de superficie 980
17.5 Integrales de superficie de campos vectoriales 995

Capítulo 18 TEOREMAS FUNDAMENTALES DE ANÁLISIS VECTORIAL 1009

18.1 Teorema de Green 1009
18.2 Teorema de Stokes 1021
18.3 Teorema de divegencia 1034

APÉNDICES A1

A. El lenguaje de las matemáticas A1
B. Propiedades de los números reales A8
C. Inducción y el teorema del binomio A13
D. Demostraciones adicionales A18

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES A27

REFERENCIAS A51

CRÉDITOS DE LAS FOTOS A52

ÍNDICE DE MATERIAS I1

SOBRE JON ROGAWSKI

Como reconocido profesor, con una trayectoria de más de 30 años, Jon Rogawski ha tenido la oportunidad de escuchar y aprender de sus propios estudiantes. Estas valiosas enseñanzas forman ya parte de su pensamiento, manera de escribir y de diseñar un libro de cálculo inf nitesimal.

Jon Rogawski obtuvo su licenciatura y máster en matemáticas de forma simultánea por la Universidad de Yale y su doctorado en matemáticas por la Universidad de Princeton, donde estudió con Robert Langlands. Antes de unirse al Departamento de Matemáticas de la UCLA en 1986, donde actualmente es catedrático de matemáticas, fue profesor visitante en el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Bonn y en la Universidad de París en Jussieu y Orsay.

Las áreas de interés de Jon son teoría de números, formas automórf cas y el análisis armónico sobre grupos semisimples. Ha publicado numerosos artículos de investigación en revistas matemáticas de primera línea, incluyendo el monográf co *Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables* (Princeton University Press). Ha recibido una Beca Sloan y es editor del *Pacif c Journal of Mathematics* y del *Transactions of the AMS*.

Jon y su esposa, Julie, médico de familia, tienen cuatro hijos. Gozan de una vida familiar activa y, siempre que pueden, disfrutan de las vacaciones familiares en las montañas de California. Jon es un apasionado de la música clásica y toca el violín y la guitarra clásica.

PREÁMBULO

SOBRE *CÁLCULO* por Jon Rogawski

Sobre la enseñanza de las matemáticas

En los inicios de mi carrera como profesor, me gustaba enseñar pero no me di cuenta de lo difícil que es comunicar con ef cacia las matemáticas. Al poco tiempo, en mi carrera como docente, tuve que enfrentarme a una rebelión estudiantil cuando mis esfuerzos para explicar las demostraciones epsilon-delta no fueron recibidos con el entusiasmo que yo esperaba. Experiencias de este tipo me enseñaron dos principios básicos:

1. Se debe intentar enseñar a los estudiantes tanto como sea posible, pero no más.
2. Como profesores de matemáticas, lo que decimos es tan importante como la manera en que lo decimos.

El lenguaje formal de las matemáticas puede intimidar a los no iniciados. Al presentar los conceptos mediante el lenguaje cotidiano, que es más familiar aunque no menos preciso, se abre el camino para que los estudiantes entiendan las ideas fundamentales e integrarlas en su forma de pensar. Los estudiantes se encuentran entonces en una posición más favorable para apreciar la necesidad de las def niciones formales y las demostraciones, y para comprender su lógica.

Sobre la confección de un libro de cálculo

Empecé a escribir *Cálculo* con el objetivo de crear un texto en el que la exposición, los gráf cos y el diseño se unieran para mejorar el entendimiento del cálculo para el estudiante: el dominio de las destrezas básicas, la comprensión conceptual y una apreciación de la amplia gama de aplicaciones. También quise que los estudiantes fueran conscientes, ya desde el inicio del curso, de la belleza de la materia y del importante papel que desempeñará, tanto en sus estudios como en su comprensión del mundo en general. Presté especial atención a los siguientes aspectos del texto:

(a) Claridad, explicación asequible que se anticipe y aborde las dif cultades de los estudiantes.
(b) Diseño y f guras que relacionen el f ujo de ideas.
(c) Elementos destacados en el texto que enfaticen los conceptos y el razonamiento matemático: Apunte conceptual, Apunte gráf co, Las hipótesis son importantes, Recordatorio y Perspectiva histórica.
(d) Una amplia colección de ejemplos y ejercicios de dif cultad gradual que enseñen las destrezas básicas y técnicas de resolución de problemas, refuercen la comprensión conceptual, y motiven el cálculo a través de aplicaciones interesantes. Cada sección contiene ejercicios en que se tratan nuevas ideas y retos para los estudiantes que les ayuden a desarrollar sus capacidades.

Animado por la respuesta entusiasta a la primera edición, en esta nueva edición me planteé el objetivo de desarrollar aún más estos puntos fuertes. Cada sección del texto ha sido revisada cuidadosamente. Durante el proceso de revisión, presté especial atención a los comentarios de los revisores y los estudiantes que han utilizado el libro. Sus ideas y creativas sugerencias han dado lugar a numerosas mejoras en el texto.

El cálculo inf nitesimal tiene un merecido papel central en la educación superior. No sólo es la clave para una amplia gama de disciplinas cuantitativas, sino que también es una componente crucial en el desarrollo intelectual del estudiante. Espero que esta nueva edición continúe siendo relevante en la apertura a los estudiantes al polifacético mundo del cálculo.

Mi libro de texto sigue una organización mayormente tradicional, aunque con algunas excepciones. Una de esas excepciones es la disposición de los polinomios de Taylor en el Capítulo 9.

Disposición de los polinomios de Taylor

Los polinomios de Taylor se encuentran el el capítulo 9, antes de las series infinitas en el capítulo 11. Mi objetivo es introducir los polinomios de Taylor como una extensión natural de la aproximación lineal. Cuando explico las series infinitas, me centro en la convergencia, un tema que muchos estudiantes encuentran estimulante. Después de estudiar los criterios de convergencia básicos y la convergencia de las series de potencias, los estudiantes se encuentran preparados para abordar las cuestiones derivadas de la representación de una función por su serie de Taylor. Pueden utilizar entonces sus conocimientos previos sobre polinomios de Taylor y sobre la cota de error del capítulo 9. Aún así, la sección sobre los polinomios de Taylor se ha diseñado de tal manera que se pueda tratar de forma conjunta con el material sobre series de potencias y series de Taylor del capítulo 11 si se prefiere este orden.

DESARROLLO ESMERADO Y METICULOSO

W. H. Freeman es conocida por sus libros de texto, y materiales adicionales, de gran calidad. Desde el inicio de este proyecto y a lo largo de su desarrollo y producción, se ha dado prioridad importante a la calidad y exactitud. Tenemos en marcha procedimientos sin precedentes para garantizar la precisión de todos los aspectos del texto:

- Ejercicios y ejemplos
- Exposición
- Figuras
- Edición
- Composición

En conjunto, estos procedimientos superan con creces los estándares previos de la industria para salvaguardar la calidad y la precisión de un libro de cálculo.

Nuevo en la segunda edición

Listas de problemas mejoradas... con aproximadamente un 25 % de problemas nuevos y de problemas revisados: Para matizar este destacado elemento del texto, las listas de problemas fueron revisadas extensamente por colaboradores externos. Basándose en parte en sus comentarios, el autor revisó cuidadosamente los problemas para mejorar su calidad y cantidad. Esta segunda edición presenta miles de nuevos y actualizados problemas.

Nueva y mayor variedad de aplicaciones: La segunda edición contiene muchos ejemplos y problemas nuevos centrados en aplicaciones innovadoras y contemporáneas de la ingeniería, la biología, la física, la administración de empresas, la economía, la medicina y las ciencias sociales.

Cambios en el contenido en respuesta a los usuarios y revisores, incluyendo:

- Capítulo 2: el tema “Límites en el infinito” se ha movido del capítulo 4 a la sección 2.7.
- Capítulo 3: diferenciación –se ha ampliado el tratamiento de los diferenciales.
- Capítulo 8: se ha movido la integración numérica al final del capítulo, después de tratar todas las técnicas de integración.

- Nueva sección 8.7: Probabilidad e integración. En esta sección se presenta una aplicación básica de integración, de suma importancia en las ciencias físicas, así como en la administración de empresas y en las ciencias sociales.
- Los capítulos multivariables, elogiados por su intensidad en la primera edición, se han revisado y pulido.
- Nueva sección 16.5: Aplicaciones de las integrales múltiples.
- Revisión y mejora de los gráf cos en todo el libro.

MATERIALES ADICIONALES

Para el profesor

- Instructor's Solutions Manual
  Brian Bradie, Christopher Newport University; y Greg Dresden, Washington y Lee University
  Single Variable ISBN: 1-4292-4313-9
  Multivariable ISBN: 1-4292-5501-3
  Contiene soluciones desarrolladas para todos los problemas del libro.

- Test Bank
  Impreso, ISBN: 1-4292-4311-2
  CD-ROM, ISBN: 1-4292-4310-4
  Incluye preguntas de opción múltiple y de respuesta breve.

- Instructor's Resource Manual
  ISBN: 1-4292-4315-5
  Facilita la temporización sugerida, los elementos clave, material para las clases, temas de discusión, actividades de clase, hojas de trabajo y proyectos de grupo correspondientes a cada sección del texto.

- Instructor's Resource CD-ROM
  ISBN: 1-4292-4314-7
  Permite realizar búsquedas y exportar todos los recursos por concepto clave o por capítulo. Incluye el Instructor's Solutions Manual, Instructor's Resource Manual y el Test Bank.

Para el estudiante

- Free & Open Resources: bcs.whfreeman.com/calculus2e

- Software Manuals
  A través de CalcPortal se pueden obtener manuales de software para Maple y Mathematica. Estos manuales están disponibles en versiones impresas a través de publicaciones a medida. Sirven como introducción a estas populares opciones de software matemático y como guías para su uso con *Cálculo*, Segunda Edición.

- Sitio web de soporte **www.whfreeman.com/rogawski2e**

CARACTERÍSTICAS

Apuntes conceptuales fomentan la comprensión conceptual del cálculo explicando ideas importantes de manera clara pero informal.

UN APUNTE CONCEPTUAL La notación de Leibniz se usa por diferentes motivos. En primer lugar, recuerda que la derivada df/dx, aunque no es un cociente propiamente dicho, es un *límite* de cocientes $\Delta f/\Delta x$. En segundo lugar, esta notación especifica la variable independiente. Esto resulta útil cuando se emplean otras variables además de x. Por ejemplo, si la variable independiente es t, se escribe df/dt. En tercer lugar, se suele pensar en d/dx como en un "operador" que aplica la operación de derivación sobre las funciones. En otras palabras, se aplica el operador d/dx a f para obtener la derivada df/dx. Otras ventajas de la notación de Leibniz se pondrán de manifiesto cuando se trate la regla de la cadena en la sección 3.7.

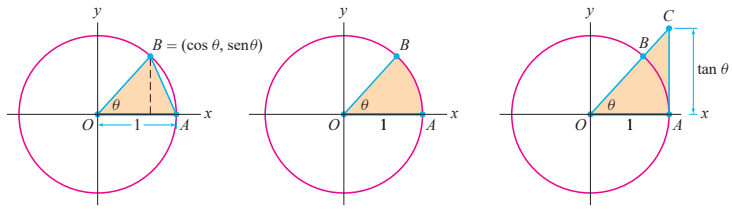
Cap. 3, p. 111

Apuntes gráficos mejoran la comprensión visual de los estudiantes poniendo de manifiesto las conexiones entre las propiedades gráficas y los conceptos subyacentes.

UN APUNTE GRÁFICO Tenga presente la interpretación gráfica de los límites. En la figura 4(A), $f(x)$ se aproxima a L cuando $x \to c$, porque para cada $\epsilon > 0$ se puede reducir la desviación por debajo de ϵ eligiendo δ suficientemente pequeño. Por el contrario, la función de la figura 4(B) presenta una discontinuidad de salto en $x = c$. La desviación no puede reducirse, sin importar lo pequeña que se escoja δ. Por este motivo, el límite no existe.

Cap. 2, p. 95

Recordatorios son notas al margen que enlazan la discusión que se lleva a cabo en ese momento con conceptos importantes que se han introducido previamente en el texto, para proporcionar a los estudiantes una revisión rápida y realizar conexiones entre ideas afines.



Área del triángulo $= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$ Área del sector circular $= \frac{1}{2}\theta$ Área del triángulo $= \frac{1}{2}\tan\theta$

FIGURA 5

Demostración Suponga en primer lugar que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. La demostración se va a basar en la siguiente relación entre las áreas de la figura 5:

$$\text{área de } \triangle OAB < \text{área del sector circular } BOA < \text{área de } \triangle OAC \qquad \boxed{2}$$

A continuación se van a calcular estas tres áreas. En primer lugar, la base de $\triangle OAB$ es 1 y su altura es $\operatorname{sen}\theta$, por lo que su área es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$. Ahora, recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ es $\frac{1}{2}\theta$. Finalmente, para calcular el área del triángulo $\triangle OAC$, observe que:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{1} = AC$$

Por tanto, como la base del triángulo $\triangle OAC$ es 1, y su altura es $\tan\theta$, su área será $\frac{1}{2}\tan\theta$. De esta manera, se ha demostrado que:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta}_{\text{Área } \triangle OAB} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\theta}_{\text{Área del sector}} \leq \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}_{\text{Área } \triangle OAC} \qquad \boxed{3}$$

Según la primera desigualdad $\operatorname{sen}\theta \leq \theta$ y, como $\theta > 0$, se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq 1 \qquad \boxed{4}$$

◄··· ***RECORDATORIO*** *Recuerde que el área de un sector circular de ángulo θ en una circunferencia de radio r es $\frac{1}{2}r^2\theta$. La razón es la siguiente: un sector circular de ángulo θ representa una fracción de $\frac{\theta}{2\pi}$ de la circunferencia. El área de la circunferencia es πr^2, por lo que el área del sector circular es $(\frac{\theta}{2\pi})\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. Para la circunferencia unitaria ($r = 1$), el área del sector es $\frac{1}{2}\theta$.*

Nota: *La demostración del teorema 3 utiliza la fórmula $\frac{1}{2}\theta$ para el área de un sector circular, pero ésta, a su vez, está basada en la fórmula πr^2 para el área de un círculo, cuya demostración completa requiere del cálculo integral.*

Cap. 2, p. 78

Atención estas anotaciones advierten a los estudiantes sobre escollos habituales con los que se pueden encontrar en la comprensión del material.

ATENCIÓN *La regla de la potencia se puede aplicar únicamente a las funciones potenciales $y = x^n$. No se puede aplicar a las funciones exponenciales como $y = 2^x$. La derivada de $y = 2^x$* ***no es*** *$x2^{x-1}$. Se estudiarán las derivadas de las funciones exponenciales en esta sección, pero más adelante.*

Antes de continuar, he aquí algunas observaciones:

- Puede ser de ayuda recordar la regla de la potencia en palabras: para derivar x^n, "baje el exponente y reste uno (al exponente)".

$$\frac{d}{dx}x^{\text{exponente}} = (\text{exponente})\,x^{\text{exponente}-1}$$

- La regla de la potencia es válida para cualquier exponente, ya sea negativo, fraccionario, o irracional:

$$\frac{d}{dx}x^{-3/5} = -\frac{3}{5}x^{-8/5}, \qquad \frac{d}{dx}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$$

Cap. 3, p. 112

Perspectivas históricas son breves viñetas que sitúan descubrimientos clave y avances conceptuales en su contexto histórico. Facilitan a los estudiantes un vistazo a algunos de los logros de los grandes matemáticos y una apreciación de su importancia.

Esta estatua de Isaac Newton en la Universidad de Cambridge se describe en *El Preludio*, un poema de William Wordsworth (1770-1850):

"Newton con su prisma y cara en silencio, El exponente en mármol de una mente Viajando para siempre a través de los mares extraños del Pensamiento, solo."

PERSPECTIVA HISTÓRICA

La filosofía está escrita en ese gran libro —el universo— que permanece abierto ante nuestros ojos, pero que no podremos entender hasta que no comprendamos el lenguaje... en el que está escrito: el lenguaje de las matemáticas...

GALILEO GALILEI, 1623

La revolución científica de los siglos XVI y XVII alcanzó su punto culminante en la obra de Isaac Newton (1643-1727), el primer científico que demostró que el mundo físico, a pesar de su complejidad y diversidad, está regido por un pequeño número de leyes universales. Una de las grandes intuiciones de Newton fue que las leyes del universo no describen el mundo tal como es, ni en el momento actual ni en ningún otro, sino cómo el mundo *cambia en el tiempo* en respuesta a diversas fuerzas. Estas leyes se expresan mejor en el lenguaje del cálculo infinitesimal, que son las matemáticas del cambio.

Más de cincuenta años antes de los trabajos de Newton, el astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) descubrió sus tres leyes del movimiento planetario, una de las cuales postula que la trayectoria de cualquier planeta alrededor del Sol es una elipse. Kepler encontró esas leyes después de un análisis minucioso de muchísimos datos astronómicos, pero no pudo explicar por qué se cumplían. Las leyes de Newton explican el movimiento de cualquier objeto —desde un planeta hasta una canica— en términos de las fuerzas que actúan sobre él.

Según Newton, los planetas, si pudiesen moverse libremente, lo harían en trayectorias rectas. Puesto que sus trayectorias son en realidad elipses, debe existir alguna fuerza —en este caso, la atracción gravitatoria del Sol— que les haga cambiar de dirección continuamente. En su obra magna *Principia Mathematica*, publicada en 1687, Newton demostró que las leyes de Kepler se deducían de sus propias leyes de movimiento y de gravitación.

Por estos descubrimientos, Newton consiguió fama generalizada a lo largo de su vida. Su fama siguió creciendo después de su muerte, llegando a alcanzar una dimensión casi mítica, y sus ideas tuvieron una profunda influencia no sólo en la ciencia, sino también en las artes y la literatura, tal como lo expresa en su epitafio el poeta inglés Alexander Pope: "La Naturaleza y las leyes de la Naturaleza se escondían en la Noche. Dijo Dios, *Sea Newton!* y todo fue Luz".

Cap. 2, p. 41

Las hipótesis son importantes utiliza explicaciones cortas y contraejemplos bien escogidos para que los estudiantes valoren por qué se necesitan las hipótesis en los teoremas.

Resúmenes de la sección resume los puntos clave de una sección de manera concisa y útil para los estudiantes, y hace hincapié en lo que es más importante en cada sección.

Lista de problemas de la sección proporcionan un amplio conjunto de ejercicios en estrecha coordinación con el texto. Estos ejercicios varían en dif cultad desde rutinarios, a moderados y a más difíciles. También se incluyen iconos que indican los problemas que requieren respuesta por escrito o que hacen necesario el uso de tecnología .

Problemas de repaso del capítulo ofrecen un amplio conjunto de ejercicios en estrecha coordinación con el material del capítulo para proporcionar más problemas para el estudio personal, o para las asignaciones.

AGRADECIMIENTOS

Jon Rogawski y W. H. Freeman and Company quieren agradecer a todos los profesores de Estados Unidos y Canadá que han proporcionado los comentarios que ayudaron en el desarrollo y el perfeccionamiento de este libro. Estas contribuciones incluyen pruebas en la clase, la revisión del manuscrito, la revisión de los problemas y la participación en las encuestas sobre el libro y sobre las necesidades de un curso genérico.

ALABAMA Tammy Potter, *Gadsden State Community College*; David Dempsey, *Jacksonville State University*; Douglas Bailer, *Northeast Alabama Community College*; Michael Hicks, *Shelton State Community College*; Patricia C. Eiland, *Troy University, Montgomery Campus*; James L. Wang, *The University of Alabama*; Stephen Brick, *University of South Alabama*; Joerg Feldvoss, *University of South Alabama* **ALASKA** Mark A. Fitch, *University of Alaska Anchorage*; Kamal Narang, *University of Alaska Anchorage*; Alexei Rybkin, *University of Alaska Fairbanks*; Martin Getz, *University of Alaska Fairbanks* **ARIZONA** Stefania Tracogna, *Arizona State University*; Bruno Welfert, *Arizona State University*; Light Bryant, *Arizona Western College*; Daniel Russow, *Arizona Western College*; Jennifer Jameson, *Coconino College*; George Cole, *Mesa Community College*; David Schultz, *Mesa Community College*; Michael Bezusko, *Pima Community College, Desert Vista Campus*; Garry Carpenter, *Pima Community College, Northwest Campus*; Paul Flasch, *Pima County Community College*; Jessica Knapp, *Pima Community College, Northwest Campus*; Roger Werbylo, *Pima County Community College*; Katie Louchart, *Northern Arizona University*; Janet McShane, *Northern Arizona University*; Donna M. Krawczyk, *The University of Arizona* **ARKANSAS** Deborah Parker, *Arkansas Northeastern College*; J. Michael Hall, *Arkansas State University*; Kevin Cornelius, *Ouachita Baptist University*; Hyungkoo Mark Park, *Southern Arkansas University*; Katherine Pinzon, *University of Arkansas at Fort Smith*; Denise LeGrand, *University of Arkansas at Little Rock*; John Annulis, *University of Arkansas at Monticello*; Erin Haller, *University of Arkansas, Fayetteville*; Daniel J. Arrigo, *University of Central Arkansas* **CALIFORNIA** Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Charles Hale, *California Polytechnic State University*; John M. Alongi, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; John Hagen, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Colleen Margarita Kirk, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Lawrence Sze, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; Raymond Terry, *California Polytechnic State University, San Luis Obispo*; James R. McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*; Robin Wilson, *California State Polytechnic University, Pomona*; Charles Lam, *California State University, Bakersf eld*; David McKay, *California State University, Long Beach*; Melvin Lax, *California State University, Long Beach*; Wallace A. Etterbeek, *California State University, Sacramento*; Mohamed Allali, *Chapman University*; George Rhys, *College of the Canyons*; Janice Hector, *DeAnza College*; Isabelle Saber, *Glendale Community College*; Peter Stathis, *Glendale Community College*; Douglas B. Lloyd, *Golden West College*; Thomas Scardina, *Golden West College*; Kristin Hartford, *Long Beach City College*; Eduardo Arismendi-Pardi, *Orange Coast College*; Mitchell Alves, *Orange Coast College*; Yenkanh Vu, *Orange Coast College*; Yan Tian, *Palomar College*; Donna E. Nordstrom, *Pasadena City College*; Don L. Hancock, *Pepperdine University*; Kevin Iga, *Pepperdine University*; Adolfo J. Rumbos, *Pomona College*; Carlos de la Lama, *San Diego City College*; Matthias Beck, *San Francisco State University*; Arek Goetz, *San Francisco State University*; Nick Bykov, *San Joaquin Delta College*; Eleanor Lang Kendrick, *San Jose City College*; Elizabeth Hodes, *Santa Barbara City College*; William Konya, *Santa Monica College*; John Kennedy, *Santa Monica College*; Peter Lee, *Santa Monica College*; Richard Salome, *Scotts Valley High School*; Norman Feldman, *Sonoma State University*; Elaine McDonald, *Sonoma State University*; John D. Eggers, *University of California, San Diego*; Bruno Nachtergaele, *University of California, Davis*; Boumediene Hamzi, *University of California, Davis*; Richard Leborne, *University of California, San Diego*; Peter Stevenhagen, *University of California, San Diego*; Jeffrey Stopple, *University of California, Santa Barbara*; Guofang Wei, *University of California, Santa Barbara*; Rick A. Simon, *University of La Verne*; Mohamad A. Alwash, *West Los Angeles College*; Calder Daenzer, *University of California, Berkeley*; Jude Thaddeus Socrates, *Pasadena City College*; Cheuk Ying Lam, *California State University Bakersf eld*; Borislava Gutarts, *California State University, Los Angeles*; Daniel Rogalski, *University of California, San Diego*; Don Hartig, *California Polytechnic State University*; Anne Voth, *Palomar College*; Jay Wiestling, *Palomar College*; Lindsey Bramlett-Smith, *Santa Barbara City College*; Dennis Morrow, *College of the Canyons*; Sydney Shanks, *College of the Canyons*; Bob Tolar, *College of the Canyons*; Gene W. Majors, *Fullerton College*; Robert Diaz, *Fullerton College*; Gregory Nguyen, *Fullerton College*; Paul Sjoberg, *Fullerton College*; Deborah Ritchie, *Moorpark College*; Maya Rahnamaie, *Moorpark College*; Kathy Fink, *Moorpark College*; Christine Cole, *Moorpark College*; K. Di Passero, *Moorpark College*; Sid Kolpas, *Glendale Community College*; Miriam Castrconde, *Irvine Valley College*; Ilkner Erbas-White, *Irvine Valley College*; Corey

Manchester, *Grossmont College*; Donald Murray, *Santa Monica College*; Barbara McGee, *Cuesta College*; Marie Larsen, *Cuesta College*; Joe Vasta, *Cuesta College*; Mike Kinter, *Cuesta College*; Mark Turner, *Cuesta College*; G. Lewis, *Cuesta College*; Daniel Kleinfelter, *College of the Desert*; Esmeralda Medrano, *Citrus College*; James Swatzel, *Citrus College*; Mark Littrell, *Rio Hondo College*; Rich Zucker, *Irvine Valley College*; Cindy Torigison, *Palomar College*; Craig Chamberline, *Palomar College*; Lindsey Lang, *Diablo Valley College*; Sam Needham, *Diablo Valley College*; Dan Bach, *Diablo Valley College*; Ted Nirgiotis, *Diablo Valley College*; Monte Collazo, *Diablo Valley College*; Tina Levy, *Diablo Valley College*; Mona Panchal, *East Los Angeles College*; Ron Sandvick, *San Diego Mesa College*; Larry Handa, *West Valley College*; Frederick Utter, *Santa Rose Junior College*; Farshod Mosh, *DeAnza College*; Doli Bambhania, *DeAnza College*; Charles Klein, *DeAnza College*; Tammi Marshall, *Cauyamaca College*; Inwon Leu, *Cauyamaca College*; Michael Moretti, *Bakersf eld College*; Janet Tarjan, *Bakersf eld College*; Hoat Le, *San Diego City College*; Richard Fielding, *Southwestern College*; Shannon Gracey, *Southwestern College*; Janet Mazzarella, *Southwestern College*; Christina Soderlund, *California Lutheran University*; Rudy Gonzalez, *Citrus College*; Robert Crise, *Crafton Hills College*; Joseph Kazimir, *East Los Angeles College*; Randall Rogers, *Fullerton College*; Peter Bouzar, *Golden West College*; Linda Ternes, *Golden West College*; Hsiao-Ling Liu, *Los Angeles Trade Tech Community College*; Yu-Chung Chang-Hou, *Pasadena City College*; Guillermo Alvarez, *San Diego City College*; Ken Kuniyuki, *San Diego Mesa College*; Laleh Howard, *San Diego Mesa College*; Sharareh Masooman, *Santa Barbara City College*; Jared Hersh, *Santa Barbara City College*; Betty Wong, *Santa Monica College*; Brian Rodas, *Santa Monica College* **COLORADO** Tony Weathers, *Adams State College*; Erica Johnson, *Arapahoe Community College*; Karen Walters, *Arapahoe Community College*; Joshua D. Laison, *Colorado College*; G. Gustave Greivel, *Colorado School of Mines*; Jim Thomas, *Colorado State University*; Eleanor Storey, *Front Range Community College*; Larry Johnson, *Metropolitan State College of Denver*; Carol Kuper, *Morgan Community College*; Larry A. Pontaski, *Pueblo Community College*; Terry Chen Reeves, *Red Rocks Community College*; Debra S. Carney, *University of Denver*; Louis A. Talman, *Metropolitan State College of Denver*; Mary A. Nelson, *University of Colorado at Boulder*; J. Kyle Pula, *University of Denver*; Jon Von Stroh, *University of Denver*; Sharon Butz, *University of Denver*; Daniel Daly, *University of Denver*; Tracy Lawrence, *Arapahoe Community College*; Shawna Mahan, *University of Colorado Denver*; Adam Norris, *University of Colorado at Boulder*; Anca Radulescu, *University of Colorado at Boulder*; Mike Kawai, *University of Colorado Denver*; Janet Barnett, *Colorado State University–Pueblo*; Byron Hurley, *Colorado State University–Pueblo*; Jonathan Portiz, *Colorado State University–Pueblo*; Bill Emerson, *Metropolitan State College of Denver*; Suzanne Caulk, *Regis University*; Anton Dzhamay, *University of Northern Colorado* **CONNECTICUT** Jeffrey McGowan, *Central Connecticut State University*; Ivan Gotchev, *Central Connecticut State University*; Charles Waiveris, *Central Connecticut State University*; Christopher Hammond, *Connecticut College*; Kim Ward, *Eastern Connecticut State University*; Joan W. Weiss, *Fairf eld University*; Theresa M. Sandifer, *Southern Connecticut State University*; Cristian Rios, *Trinity College*; Melanie Stein, *Trinity College*; Steven Orszag, *Yale University* **DELAWARE** Patrick F. Mwerinde, *University of Delaware* **DISTRICT OF COLUMBIA** Jeffrey Hakim, *American University*; Joshua M. Lansky, *American University*; James A. Nickerson, *Gallaudet University* **FLORIDA** Abbas Zadegan, *Florida International University*; Gerardo Aladro, *Florida International University*; Gregory Henderson, *Hillsborough Community College*; Pam Crawford, *Jacksonville University*; Penny Morris, *Polk Community College*; George Schultz, *St. Petersburg College*; Jimmy Chang, *St. Petersburg College*; Carolyn Kistner, *St. Petersburg College*; Aida Kadic-Galeb, *The University of Tampa*; Constance Schober, *University of Central Florida*; S. Roy Choudhury, *University of Central Florida*; Kurt Overhiser, *Valencia Community College*; Jiongmin Yong, *University of Central Florida*; Giray Okten, *The Florida State University*; Frederick Hoffman, *Florida Atlantic University*; Thomas Beatty, *Florida Gulf Coast University*; Witny Librun, *Palm Beach Community College North*; Joe Castillo, *Broward County College*; Joann Lewin, *Edison College*; Donald Ransford, *Edison College*; Scott Berthiaume, *Edison College*; Alexander Ambrioso, *Hillsborough Community College*; Jane Golden, *Hillsborough Community College*; Susan Hiatt, *Polk Community College–Lakeland Campus*; Li Zhou, *Polk Community College–Winter Haven Campus*; Heather Edwards, *Seminole Community College*; Benjamin Landon, *Daytona State College*; Tony Malaret, *Seminole Community College*; Lane Vosbury, *Seminole Community College*; William Rickman, *Seminole Community College*; Cheryl Cantwell, *Seminole Community College*; Michael Schramm, *Indian River State*

College; Janette Campbell, *Palm Beach Community College–Lake Worth* **GEORGIA** Thomas T. Morley, *Georgia Institute of Technology*; Ralph Wildy, *Georgia Military College*; Shahram Nazari, *Georgia Perimeter College*; Alice Eiko Pierce, *Georgia Perimeter College, Clarkson Campus*; Susan Nelson, *Georgia Perimeter College, Clarkson Campus*; Laurene Fausett, *Georgia Southern University*; Scott N. Kersey, *Georgia Southern University*; Jimmy L. Solomon, *Georgia Southern University*; Allen G. Fuller, *Gordon College*; Marwan Zabdawi, *Gordon College*; Carolyn A. Yackel, *Mercer University*; Shahryar Heydari, *Piedmont College*; Dan Kannan, *The University of Georgia*; Abdelkrim Brania, *Morehouse College*; Ying Wang, *Augusta State University*; James M. Benedict, *Augusta State University*; Kouong Law, *Georgia Perimeter College*; Rob Williams, *Georgia Perimeter College*; Alvina Atkinson, *Georgia Gwinnett College*; Amy Erickson, *Georgia Gwinnett College* **HAWAII** Shuguang Li, *University of Hawaii at Hilo*; Raina B. Ivanova, *University of Hawaii at Hilo* **IDAHO** Charles Kerr, *Boise State University*; Otis Kenny, *Boise State University*; Alex Feldman, *Boise State University*; Doug Bullock, *Boise State University*; Ed Korntved, *Northwest Nazarene University* **ILLINOIS** Chris Morin, *Blackburn College*; Alberto L. Delgado, *Bradley University*; John Haverhals, *Bradley University*; Herbert E. Kasube, *Bradley University*; Marvin Doubet, *Lake Forest College*; Marvin A. Gordon, *Lake Forest Graduate School of Management*; Richard J. Maher, *Loyola University Chicago*; Joseph H. Mayne, *Loyola University Chicago*; Marian Gidea, *Northeastern Illinois University*; Miguel Angel Lerma, *Northwestern University*; Mehmet Dik, *Rockford College*; Tammy Voepel, *Southern Illinois University Edwardsville*; Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*; Thomas Smith, *University of Chicago*; Laura DeMarco, *University of Illinois*; Jennifer McNeilly, *University of Illinois at Urbana-Champaign*; Manouchehr Azad, *Harper College*; Minhua Liu, *Harper College*; Mary Hill, *College of DuPage*; Arthur N. DiVito, *Harold Washington College* **INDIANA** Julie A. Killingbeck, *Ball State University*; John P. Boardman, *Franklin College*; Robert N. Talbert, *Franklin College*; Robin Symonds, *Indiana University Kokomo*; Henry L. Wyzinski, *Indiana University Northwest*; Melvin Royer, *Indiana Wesleyan University*; Gail P. Greene, *Indiana Wesleyan University*; David L. Finn, *Rose-Hulman Institute of Technology* **IOWA** Nasser Dastrange, *Buena Vista University*; Mark A. Mills, *Central College*; Karen Ernst, *Hawkeye Community College*; Richard Mason, *Indian Hills Community College*; Robert S. Keller, *Loras College*; Eric Robert Westlund, *Luther College*; Weimin Han, *The University of Iowa* **KANSAS** Timothy W. Flood, *Pittsburg State University*; Sarah Cook, *Washburn University*; Kevin E. Charlwood, *Washburn University*; Conrad Uwe, *Cowley County Community College* **KENTUCKY** Alex M. McAllister, *Center College*; Sandy Spears, *Jefferson Community & Technical College*; Leanne Faulkner, *Kentucky Wesleyan College*; Donald O. Clayton, *Madisonville Community College*; Thomas Riedel, *University of Louisville*; Manabendra Das, *University of Louisville*; Lee Larson, *University of Louisville*; Jens E. Harlander, *Western Kentucky University*; Philip McCartney, *Northern Kentucky University*; Andy Long, *Northern Kentucky University*; Omer Yayenie, *Murray State University*; Donald Krug, *Northern Kentucky University* **LOUISIANA** William Forrest, *Baton Rouge Community College*; Paul Wayne Britt, *Louisiana State University*; Galen Turner, *Louisiana Tech University*; Randall Wills, *Southeastern Louisiana University*; Kent Neuerburg, *Southeastern Louisiana University*; Guoli Ding, *Louisiana State University*; Julia Ledet, *Louisiana State University* **MAINE** Andrew Knightly, *The University of Maine*; Sergey Lvin, *The University of Maine*; Joel W. Irish, *University of Southern Maine*; Laurie Woodman, *University of Southern Maine*; David M. Bradley, *The University of Maine*; William O. Bray, *The University of Maine* **MARYLAND** Leonid Stern, *Towson University*; Mark E. Williams, *University of Maryland Eastern Shore*; Austin A. Lobo, *Washington College*; Supawan Lertskrai, *Harford Community College*; Fary Sami, *Harford Community College*; Andrew Bulleri, *Howard Community College* **MASSACHUSETTS** Sean McGrath, *Algonquin Regional High School*; Norton Starr, *Amherst College*; Renato Mirollo, *Boston College*; Emma Previato, *Boston University*; Richard H. Stout, *Gordon College*; Matthew P. Leingang, *Harvard University*; Suellen Robinson, *North Shore Community College*; Walter Stone, *North Shore Community College*; Barbara Loud, *Regis College*; Andrew B. Perry, *Springf eld College*; Tawanda Gwena, *Tufts University*; Gary Simundza, *Wentworth Institute of Technology*; Mikhail Chkhenkeli, *Western New England College*; David Daniels, *Western New England College*; Alan Gorf n, *Western New England College*; Saeed Ghahramani, *Western New England College*; Julian Fleron, *Westf eld State College*; Brigitte Servatius, *Worcester Polytechnic Institute*; John Goulet, *Worcester Polytechnic Institute*; Alexander Martsinkovsky, *Northeastern University*; Marie Clote, *Boston College* **MICHIGAN** Mark E. Bollman, *Albion College*; Jim Chesla, *Grand*

Rapids Community College; Jeanne Wald, *Michigan State University*; Allan A. Struthers, *Michigan Technological University*; Debra Pharo, *Northwestern Michigan College*; Anna Maria Spagnuolo, *Oakland University*; Diana Faoro, *Romeo Senior High School*; Andrew Strowe, *University of Michigan–Dearborn*; Daniel Stephen Drucker, *Wayne State University*; Christopher Cartwright, *Lawrence Technological University*; Jay Treiman, *Western Michigan University* **MINNESOTA** Bruce Bordwell, *Anoka-Ramsey Community College*; Robert Dobrow, *Carleton College*; Jessie K. Lenarz, *Concordia College–Moorhead Minnesota*; Bill Tomhave, *Concordia College*; David L. Frank, *University of Minnesota*; Steven I. Sperber, *University of Minnesota*; Jeffrey T. McLean, *University of St. Thomas*; Chehrzad Shakiban, *University of St. Thomas*; Melissa Loe, *University of St. Thomas*; Nick Christopher Fiala, *St. Cloud State University*; Victor Padron, *Normandale Community College*; Mark Ahrens, *Normandale Community College*; Gerry Naughton, *Century Community College*; Carrie Naughton, *Inver Hills Community College* **MISSISSIPPI** Vivien G. Miller, *Mississippi State University*; Ted Dobson, *Mississippi State University*; Len Miller, *Mississippi State University*; Tristan Denley, *The University of Mississippi* **MISSOURI** Robert Robertson, *Drury University*; Gregory A. Mitchell, *Metropolitan Community College–Penn Valley*; Charles N. Curtis, *Missouri Southern State University*; Vivek Narayanan, *Moberly Area Community College*; Russell Blyth, *Saint Louis University*; Blake Thornton, *Saint Louis University*; Kevin W. Hopkins, *Southwest Baptist University*; Joe Howe, *St. Charles Community College*; Wanda Long, *St. Charles Community College*; Andrew Stephan, *St. Charles Community College* **MONTANA** Kelly Cline, *Carroll College*; Richard C. Swanson, *Montana State University*; Nikolaus Vonessen, *The University of Montana* **NEBRASKA** Edward G. Reinke Jr., *Concordia University*; Judith Downey, *University of Nebraska at Omaha* **NEVADA** Rohan Dalpatadu, *University of Nevada, Las Vegas*; Paul Aizley, *University of Nevada, Las Vegas* **NEW HAMPSHIRE** Richard Jardine, *Keene State College*; Michael Cullinane, *Keene State College*; Roberta Kieronski, *University of New Hampshire at Manchester*; Erik Van Erp, *Dartmouth College* **NEW JERSEY** Paul S. Rossi, *College of Saint Elizabeth*; Mark Galit, *Essex County College*; Katarzyna Potocka, *Ramapo College of New Jersey*; Nora S. Thornber, *Raritan Valley Community College*; Avraham Soffer, *Rutgers, The State University of New Jersey*; Chengwen Wang, *Rutgers, The State University of New Jersey*; Stephen J. Greenf eld, *Rutgers, The State University of New Jersey*; John T. Saccoman, *Seton Hall University*; Lawrence E. Levine, *Stevens Institute of Technology*; Barry Burd, *Drew University*; Penny Luczak, *Camden County College*; John Climent, *Cecil Community College*; Kristyanna Erickson, *Cecil Community College*; Eric Compton, *Brookdale Community College*; John Atsu-Swanzy, *Atlantic Cape Community College* **NEW MEXICO** Kevin Leith, *Central New Mexico Community College*; David Blankenbaker, *Central New Mexico Community College*; Joseph Lakey, *New Mexico State University*; Kees Onneweer, *University of New Mexico*; Jurg Bolli, *The University of New Mexico* **NEW YORK** Robert C. Williams, *Alfred University*; Timmy G. Bremer, *Broome Community College State University of New York*; Joaquin O. Carbonara, *Buffalo State College*; Robin Sue Sanders, *Buffalo State College*; Daniel Cunningham, *Buffalo State College*; Rose Marie Castner, *Canisius College*; Sharon L. Sullivan, *Catawba College*; Camil Muscalu, *Cornell University*; Maria S. Terrell, *Cornell University*; Margaret Mulligan, *Dominican College of Blauvelt*; Robert Andersen, *Farmingdale State University of New York*; Leonard Nissim, *Fordham University*; Jennifer Roche, *Hobart and William Smith Colleges*; James E. Carpenter, *Iona College*; Peter Shenkin, *John Jay College of Criminal Justice/CUNY*; Gordon Crandall, *LaGuardia Community College/CUNY*; Gilbert Traub, *Maritime College, State University of New York*; Paul E. Seeburger, *Monroe Community College Brighton Campus*; Abraham S. Mantell, *Nassau Community College*; Daniel D. Birmajer, *Nazareth College*; Sybil G. Shaver, *Pace University*; Margaret Kiehl, *Rensselaer Polytechnic Institute*; Carl V. Lutzer, *Rochester Institute of Technology*; Michael A. Radin, *Rochester Institute of Technology*; Hossein Shahmohamad, *Rochester Institute of Technology*; Thomas Rousseau, *Siena College*; Jason Hofstein, *Siena College*; Leon E. Gerber, *St. Johns University*; Christopher Bishop, *Stony Brook University*; James Fulton, *Suffolk County Community College*; John G. Michaels, *SUNY Brockport*; Howard J. Skogman, *SUNY Brockport*; Cristina Bacuta, *SUNY Cortland*; Jean Harper, *SUNY Fredonia*; Kelly Black, *Union College*; Thomas W. Cusick, *University at Buffalo/The State University of New York*; Gino Biondini, *University at Buffalo/The State University of New York*; Robert Koehler, *University at Buffalo/The State University of New York*; Robert Thompson, *Hunter College*; Ed Grossman, *The City College of New York* **NORTH CAROLINA** Jeffrey Clark, *Elon University*; William L. Burgin, *Gaston College*; Manouchehr H. Misaghian, *Johnson C. Smith University*; Legunchim

L. Emmanwori, *North Carolina A&T State University*; Drew Pasteur, *North Carolina State University*; Demetrio Labate, *North Carolina State University*; Mohammad Kazemi, *The University of North Carolina at Charlotte*; Richard Carmichael, *Wake Forest University*; Gretchen Wilke Whipple, *Warren Wilson College*; John Russell Taylor, *University of North Carolina at Charlotte*; Mark Ellis, *Piedmont Community College* **NORTH DAKOTA** Anthony J. Bevelacqua, *The University of North Dakota*; Richard P. Millspaugh, *The University of North Dakota*; Thomas Gilsdorf, *The University of North Dakota*; Michele Iiams, *The University of North Dakota* **OHIO** Christopher Butler, *Case Western Reserve University*; Pamela Pierce, *The College of Wooster*; Tzu-Yi Alan Yang, *Columbus State Community College*; Greg S. Goodhart, *Columbus State Community College*; Kelly C. Stady, *Cuyahoga Community College*; Brian T. Van Pelt, *Cuyahoga Community College*; David Robert Ericson, *Miami University*; Frederick S. Gass, *Miami University*; Thomas Stacklin, *Ohio Dominican University*; Vitaly Bergelson, *The Ohio State University*; Robert Knight, *Ohio University*; John R. Pather, *Ohio University, Eastern Campus*; Teresa Contenza, *Otterbein College*; Ali Hajjafar, *The University of Akron*; Jianping Zhu, *The University of Akron*; Ian Clough, *University of Cincinnati Clermont College*; Atif Abueida, *University of Dayton*; Judith McCrory, *The University at Findlay*; Thomas Smotzer, *Youngstown State University*; Angela Spalsbury, *Youngstown State University*; James Osterburg, *The University of Cincinnati*; Frederick Thulin, *University of Illinois at Chicago*; Weimin Han, *The Ohio State University*; Critchton Ogle, *The Ohio State University*; Jackie Miller, *The Ohio State University*; Walter Mackey, *Owens Community College*; Jonathan Baker, *Columbus State Community College* **OKLAHOMA** Michael McClendon, *University of Central Oklahoma*; Teri Jo Murphy, *The University of Oklahoma*; Shirley Pomeranz, *University of Tulsa* **OREGON** Lorna TenEyck, *Chemeketa Community College*; Angela Martinek, *Linn-Benton Community College*; Tevian Dray, *Oregon State University*; Mark Ferguson, *Chemekata Community College*; Andrew Flight, *Portland State University* **PENNSYLVANIA** John B. Polhill, *Bloomsburg University of Pennsylvania*; Russell C. Walker, *Carnegie Mellon University*; Jon A. Beal, *Clarion University of Pennsylvania*; Kathleen Kane, *Community College of Allegheny County*; David A. Santos, *Community College of Philadelphia*; David S. Richeson, *Dickinson College*; Christine Marie Cedzo, *Gannon University*; Monica Pierri-Galvao, *Gannon University*; John H. Ellison, *Grove City College*; Gary L. Thompson, *Grove City College*; Dale McIntyre, *Grove City College*; Dennis Benchoff, *Harrisburg Area Community College*; William A. Drumin, *King's College*; Denise Reboli, *King's College*; Chawne Kimber, *Lafeyette College*; David L. Johnson, *Lehigh University*; Zia Uddin, *Lock Haven University of Pennsylvania*; Donna A. Dietz, *Mansf eld University of Pennsylvania*; Samuel Wilcock, *Messiah College*; Neena T. Chopra, *The Pennsylvania State University*; Boris A. Datskovsky, *Temple University*; Dennis M. DeTurck, *University of Pennsylvania*; Jacob Burbea, *University of Pittsburgh*; Mohammed Yahdi, *Ursinus College*; Timothy Feeman, *Villanova University*; Douglas Norton, *Villanova University*; Robert Styer, *Villanova University*; Peter Brooksbank, *Bucknell University*; Larry Friesen, *Butler County Community College*; Lisa Angelo, *Bucks County College*; Elaine Fitt, *Bucks County College*; Pauline Chow, *Harrisburg Area Community College*; Diane Benner, *Harrisburg Area Community College*; Emily B. Dryden, *Bucknell University* **RHODE ISLAND** Thomas F. Banchoff, *Brown University*; Yajni Warnapala-Yehiya, *Roger Williams University*; Carol Gibbons, *Salve Regina University*; Joe Allen, *Community College of Rhode Island*; Michael Latina, *Community College of Rhode Island* **SOUTH CAROLINA** Stanley O. Perrine, *Charleston Southern University*; Joan Hoffacker, *Clemson University*; Constance C. Edwards, *Coastal Carolina University*; Thomas L. Fitzkee, *Francis Marion University*; Richard West, *Francis Marion University*; John Harris, *Furman University*; Douglas B. Meade, *University of South Carolina*; George Androulakis, *University of South Carolina*; Art Mark, *University of South Carolina Aiken*; Sherry Biggers, *Clemson University*; Mary Zachary Krohn, *Clemson University*; Andrew Incognito, *Coastal Carolina University*; Deanna Caveny, *College of Charleston* **SOUTH DAKOTA** Dan Kemp, *South Dakota State University* **TENNESSEE** Andrew Miller, *Belmont University*; Arthur A. Yanushka, *Christian Brothers University*; Laurie Plunk Dishman, *Cumberland University*; Beth Long, *Pellissippi State Technical Community College*; Judith Fethe, *Pellissippi State Technical Community College*; Andrzej Gutek, *Tennessee Technological University*; Sabine Le Borne, *Tennessee Technological University*; Richard Le Borne, *Tennessee Technological University*; Jim Conant, *The University of Tennessee*; Pavlos Tzermias, *The University of Tennessee*; Jo Ann W. Staples, *Vanderbilt University*; Dave Vinson, *Pellissippi State Community College*; Jonathan Lamb, *Pellissippi State Community College* **TEXAS** Sally Haas, *Angelina*

College; Michael Huff, *Austin Community College*; Scott Wilde, *Baylor University and The University of Texas at Arlington*; Rob Eby, *Blinn College*; Tim Sever, *Houston Community College–Central*; Ernest Lowery, *Houston Community College–Northwest*; Shirley Davis, *South Plains College*; Todd M. Steckler, *South Texas College*; Mary E. Wagner-Krankel, *St. Mary's University*; Elise Z. Price, *Tarrant County College, Southeast Campus*; David Price, *Tarrant County College, Southeast Campus*; Michael Stecher, *Texas A&M University*; Philip B. Yasskin, *Texas A&M University*; Brock Williams, *Texas Tech University*; I. Wayne Lewis, *Texas Tech University*; Robert E. Byerly, *Texas Tech University*; Ellina Grigorieva, *Texas Woman's University*; Abraham Haje, *Tomball College*; Scott Chapman, *Trinity University*; Elias Y. Deeba, *University of Houston Downtown*; Jianping Zhu, *The University of Texas at Arlington*; Tuncay Aktosun, *The University of Texas at Arlington*; John E. Gilbert, *The University of Texas at Austin*; Jorge R. Viramontes-Olivias, *The University of Texas at El Paso*; Melanie Ledwig, *The Victoria College*; Gary L. Walls, *West Texas A&M University*; William Heierman, *Wharton County Junior College*; Lisa Rezac, *University of St. Thomas*; Raymond J. Cannon, *Baylor University*; Kathryn Flores, *McMurry University*; Jacqueline A. Jensen, *Sam Houston State University*; James Galloway, *Collin County College*; Raja Khoury, *Collin County College*; Annette Benbow, *Tarrant County College–Northwest*; Greta Harland, *Tarrant County College–Northeast*; Doug Smith, *Tarrant County College–Northeast*; Marcus McGuff, *Austin Community College*; Clarence McGuff, *Austin Community College*; Steve Rodi, *Austin Community College*; Vicki Payne, *Austin Community College*; Anne Pradera, *Austin Community College*; Christy Babu, *Laredo Community College*; Deborah Hewitt, *McLennan Community College*; W. Duncan, *McLennan Community College*; Hugh Griff th, *Mt. San Antonio College* **UTAH** Jason Isaac Preszler, *The University of Utah*; Ruth Trygstad, *Salt Lake City Community College* **VIRGINIA** Verne E. Leininger, *Bridgewater College*; Brian Bradie, *Christopher Newport University*; Hongwei Chen, *Christopher Newport University*; John J. Avioli, *Christopher Newport University*; James H. Martin, *Christopher Newport University*; Mike Shirazi, *Germanna Community College*; Ramon A. Mata-Toledo, *James Madison University*; Adrian Riskin, *Mary Baldwin College*; Josephine Letts, *Ocean Lakes High School*; Przemyslaw Bogacki, *Old Dominion University*; Deborah Denvir, *Randolph-Macon Woman's College*; Linda Powers, *Virginia Tech*; Gregory Dresden, *Washington and Lee University*; Jacob A. Siehler, *Washington and Lee University*; Nicholas Hamblet, *University of Virginia*; Lester Frank Caudill, *University of Richmond* **VERMONT** David Dorman, *Middlebury College*; Rachel Repstad, *Vermont Technical College* **WASHINGTON** Jennifer Laveglia, *Bellevue Community College*; David Whittaker, *Cascadia Community College*; Sharon Saxton, *Cascadia Community College*; Aaron Montgomery, *Central Washington University*; Patrick Averbeck, *Edmonds Community College*; Tana Knudson, *Heritage University*; Kelly Brooks, *Pierce College*; Shana P. Calaway, *Shoreline Community College*; Abel Gage, *Skagit Valley College*; Scott MacDonald, *Tacoma Community College*; Martha A. Gady, *Whitworth College*; Wayne L. Neidhardt, *Edmonds Community College*; Simrat Ghuman, *Bellevue College*; Jeff Eldridge, *Edmonds Community College*; Kris Kissel, *Green River Community College*; Laura Moore-Mueller, *Green River Community College*; David Stacy, *Bellevue College*; Eric Schultz, *Walla Walla Community College*; Julianne Sachs, *Walla Walla Community College* **WEST VIRGINIA** Ralph Oberste-Vorth, *Marshall University*; Suda Kunyosying, *Shepard University*; Nicholas Martin, *Shepherd University*; Rajeev Rajaram, *Shepherd University*; Xiaohong Zhang, *West Virginia State University*; Sam B. Nadler, *West Virginia University* **WYOMING** Claudia Stewart, *Casper College*; Pete Wildman, *Casper College*; Charles Newberg, *Western Wyoming Community College*; Lynne Ipina, *University of Wyoming*; John Spitler, *University of Wyoming* **WISCONSIN** Paul Bankston, *Marquette University*; Jane Nichols, *Milwaukee School of Engineering*; Yvonne Yaz, *Milwaukee School of Engineering*; Terry Nyman, *University of Wisconsin–Fox Valley*; Robert L. Wilson, *University of Wisconsin–Madison*; Dietrich A. Uhlenbrock, *University of Wisconsin–Madison*; Paul Milewski, *University of Wisconsin–Madison*; Donald Solomon, *University of Wisconsin–Milwaukee*; Kandasamy Muthuvel, *University of Wisconsin–Oshkosh*; Sheryl Wills, *University of Wisconsin–Platteville*; Kathy A. Tomlinson, *University of Wisconsin–River Falls*; Joy Becker, *University of Wisconsin-Stout*; Jeganathan Sriskandarajah , *Madison Area Tech College*; Wayne Sigelko, *Madison Area Tech College* **CANADA** Don St. Jean, *George Brown College*; Len Bos, *University of Calgary*; Tony Ware, *University of Calgary*; Peter David Papez, *University of Calgary*; John O'Conner, *Grant MacEwan University*; Michael P. Lamoureux, *University of Calgary*; Yousry Elsabrouty, *University of Calgary*; Douglas Farenick, *University of Regina*

Es una tarea agradable agradecer a las personas cuya orientación y apoyo fue crucial para poder llevar esta nueva edición a buen término. Tuve la suerte de que Tony Palermino continuó siendo mi editor. Estoy contento de poder darle las gracias de nuevo por sus conocimientos, por su dedicación al proyecto y por las mejoras que propuso, demasiado numerosas para ser detalladas en este momento.

Quiero agradecer a los muchos matemáticos que generosamente han compartido sus valiosas ideas, crítica constructiva y problemas innovadores. Estoy particularmente agradecido a los profesores Elka Block, Brian Bradie, C. K. Cheung, Greg Dresden, Stephen Greenf eld, John Kennedy, Frank Purcell y Jude Socrates y a Frances Hammock, Don Larson, Nikki Meshkat y Jane Sherman por su valiosa ayuda. También quiero agradecer a Ricardo Chavez y a los Profesores Elena Galaktionova, Istvan Kovacs y Jiri Lebl por sus valiosos y perspicaces comentarios.

Mi más sincero agradecimiento a Terri Ward por la gestión de esta Segunda Edición con gran habilidad y gracia, y a Julie Lindstrom por supervisar el proceso de revisión. Estoy en deuda con Craig Bleyer por la f rma de este proyecto y continuar creyendo en él con los años. Agradezco a Ruth Baruth por aprotar su amplio conocimiento y experiencia en publicación al proyecto, a Steve Rigolosi por un desarrollo de mercado experto y a Katrina Wilhelm por su asistencia editorial. También debo mi agradecimiento al excelente equipo de producción de W. H. Freeman: Blake Logan, Bill Page, Paul Rohloff, Ted Szczepanski y Vivien Weiss y también a John Rogosich y Carol Sawyer en Techsetters, Inc. por su experta maquetación y a Ron Weickart de Network Graphics por su ejecución hábil y creativa del programa de arte.

A mi querida esposa, Julie, le debo mucho más de lo que puedo expresar con palabras. Gracias por todo. A nuestros maravillosos hijos Rivkah, Dvora, Hannah y Akiva, gracias por aguantar el libro de cálculo durante todos estos años. Y a mi madre Elise y mi difunto padre Alexander Rogawski, MD זיל, gracias por vuestro amor y apoyo desde el principio.

AL ESTUDIANTE

Aunque he enseñado cálculo durante más de 30 años, cada vez que entro en el aula el primer día de un nuevo semestre tengo un sentimiento de excitación, como si un gran drama estuviera a punto de tener lugar. ¿Está fuera de lugar la palabra *drama* en una discusión sobre matemáticas?

Muchas personas estarían de acuerdo en que el cálculo es útil –se aplica desde las ciencias y a la ingeniería a todo, desde los vuelos espaciales y la predicción del tiempo a la nanotecnología y a los modelos f nancieros. Pero ¿qué es lo que resulta dramático?

Para mi, una parte del drama reside en el desarrollo conceptual y lógico del cálculo. El cálculo inf nitesimal está basado en unos pocos conceptos fundamentales (como límites, rectas tangentes y aproximaciones). Pero a medida que la materia se desarrolla, se tiene que estos conceptos son adecuados para construir, paso a paso, una disciplina matemática capaz de resolver innumerables problemas de gran importancia práctica. En este camino hay puntos álgidos y momentos de suspense –por ejemplo, el cálculo de la derivada mediante límites por primera vez, o aprender, a través del teorema fundamental del cálculo, que las dos ramas del cálculo (diferencial e integral) están mucho más relacionadas de lo que se podía esperar. También se descubre que el cálculo proporciona el lenguaje correcto para expresar las leyes más fundamentales y universales de la naturaleza, no únicamente las leyes de Newton del movimiento, sino también las leyes del electromagnetismo e incluso las leyes cuánticas de la estructura atómica.

Otra parte del drama es el proceso de aprendizaje propiamente dicho –el viaje personal de descubrimiento. Sin duda, uno de los aspectos a tener en cuenta en el aprendizaje del cálculo es el desarrollo de diversas habilidades técnicas. Aprenderá cómo calcular derivadas e integrales, resolver problemas de optimización y así con muchos otros temas.

Estas habilidades son necesarias para la aplicación del cálculo en situaciones prácticas y para sentar las bases del estudio para varias ramas de las matemáticas avanzadas. Pero quizás más importante, usted se familiarizará con las ideas fundamentales en que se basa el cálculo. Estas ideas son fundamentales en las ciencias y en todas las disciplinas cuantitativas, por lo que se abrirá para usted un mundo de nuevas oportunidades. El distinguido matemático I. M. Gelfand lo dijo de este modo: "Lo más importante que un estudiante puede obtener a partir del estudio de las matemáticas es el logro de un mayor nivel intelectual".

Este texto está diseñado para desarrollar tanto las habilidades como la comprensión conceptual. De hecho, los dos van de la mano. A medida que se es competente en la resolución de problemas, se llega a apreciar las ideas subyacentes. Y es igualmente cierto que una sólida comprensión de los conceptos le capacitará para realizar una resolución de problemas más ef caz. Es probable que tenga que dedicar gran parte de su tiempo al estudio de los ejemplos en el texto y a trabajar sobre los problemas. Sin embargo, el texto también contiene numerosas explicaciones de los conceptos básicos, ideas y motivaciones (en ocasiones bajo el título "Apunte conceptual" o "Apunte gráf co"). Le insto a invertir tiempo en leer estas explicaciones y ref exionar sobre ellas.

El aprendizaje del cálculo siempre será un desafío y siempre va a requerir esfuerzo. Según la leyenda, Alejandro Magno le pidió al matemático Menecmo en una ocasión que le mostrara una manera fácil de aprender geometría. Menecmo le respondió: "No hay ningún camino real hacia la geometría". Incluso los reyes deben trabajar duro para aprender geometría, y lo mismo es cierto para el cálculo.

Uno de los principales retos al escribir este libro fue encontrar una manera de presentar el cálculo con la mayor claridad posible, en un estilo que los estudiantes encontraran comprensible e interesante. Mientras escribía, me preguntaba continuamente: ¿puede ser más sencillo? ¿he asumido algo que el estudiante puede no tener en cuenta? ¿puedo explicar el signif cado de un concepto básico, sin confundir a un estudiante que está aprendiendo la materia por primera vez?

Espero que mis esfuerzos hayan dado lugar a un libro de texto que sea no sólo atractivo para el estudiante, sino que también le anime a ver todo el conjunto –las bellas y elegantes ideas que sostienen toda la estructura del cálculo de forma conjunta. Si tiene algún comentario o sugerencia para la mejora del texto, no dude en hacérmelo saber. Espero sus aportaciones con interés.

¡Mis mejores deseos y buena suerte!

Jon Rogawski

La hermosa concha del nautilus pompilius crece con la forma de una espiral equiangular, una curva descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = e^{a\theta}$.

12 ECUACIONES PARAMÉTRICAS, COORDENADAS POLARES Y SECCIONES CÓNICAS

En este capítulo se introducen dos nuevas herramientas importantes. En primer lugar, se consideran las ecuaciones paramétricas, que describen las curvas de una manera especialmente útil para analizar el movimiento y que resultan imprescindibles en áreas como los gráficos por ordenador y el diseño asistido por ordenador. A continuación se estudian las coordenadas polares, una alternativa a las coordenadas rectangulares que simplifica los cálculos en muchas aplicaciones. Este capítulo finaliza con un estudio de las secciones cónicas (elipses, hipérbolas y parábolas).

12.1 Ecuaciones paramétricas

Considere una partícula que se desplaza describiendo una curva C en el plano, tal y como se ilustra en la figura 1. Se puede describir el movimiento de la partícula especificando las coordenadas como función del tiempo t:

Se utilizará el término "partícula" para referirse a un objeto en movimiento, sin tener en cuenta su estructura interna.

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \tag{1}$$

Dicho de otro modo, en el instante t, la partícula se encuentra en el punto:

$$c(t) = (f(t), g(t))$$

Las ecuaciones (1) se denominan **ecuaciones paramétricas** y se dice que C es una **curva paramétrica**. Se dice que $c(t)$ es una **parametrización** de **parámetro** t.

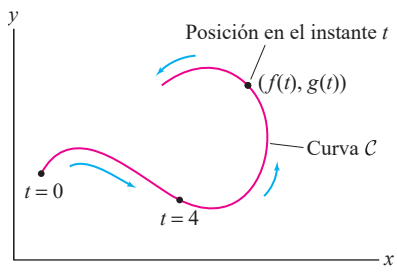


FIGURA 1 Partícula que se desplaza a lo largo de una curva C en el plano.

Como x e y son funciones de t, a menudo se escribe $c(t) = (x(t), y(t))$ en lugar de $(f(t), g(t))$. Por supuesto, se puede utilizar cualquier otra variable para el parámetro (como s o θ). En las representaciones gráficas de curvas paramétricas, se suele indicar la dirección del movimiento mediante una flecha, como en la figura 1.

EJEMPLO 1 Dibuje la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = 2t - 4 \qquad y = 3 + t^2 \tag{2}$$

Solución En primer lugar, calcule las coordenadas x e y para diferentes valores de t, como se muestra en la tabla 1 y represente los correspondientes puntos (x, y), como en la figura 2. Después, una los puntos por medio de una curva suave, indicando la dirección del movimiento con una flecha.

TABLA 1

t	$x = 2t - 4$	$y = 3 + t^2$
−2	−8	7
0	−4	3
2	0	7
4	4	19

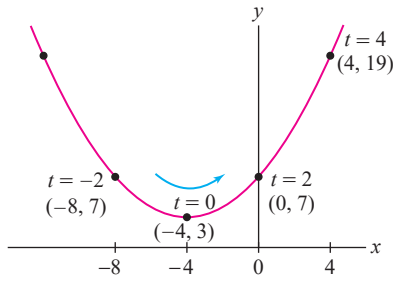


FIGURA 2 La curva paramétrica $x = 2t - 4$, $y = 3 + t^2$.

UN APUNTE CONCEPTUAL La gráfica de una función $y = f(x)$ siempre se puede parametrizar, de manera sencilla, como:

$$c(t) = (t, f(t))$$

Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ se parametriza como $c(t) = (t, t^2)$ y la curva $y = e^t$ como $c(t) = (t, e^t)$. Una ventaja de las ecuaciones paramétricas es que permiten describir curvas que no son gráficas de funciones. Por ejemplo, la curva de la figura 3 no es de la forma $y = f(x)$ pero se puede expresar de forma paramétrica.

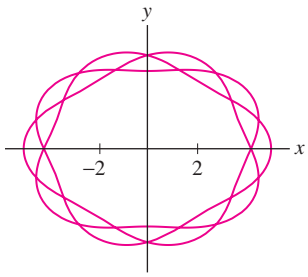


FIGURA 3 La curva paramétrica $x = 5\cos(3t)\cos(\frac{2}{3}\operatorname{sen}(5t))$, $y = 4\operatorname{sen}(3t)\cos(\frac{2}{3}\operatorname{sen}(5t))$.

Tal y como se acaba de mencionar, una curva paramétrica $c(t)$ no tiene por qué ser la gráfica de una función. Sin embargo, si lo fuera, es posible hallar la función $f(x)$ "eliminando el parámetro" como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Eliminando el parámetro Describa la curva paramétrica

$$c(t) = (2t - 4, 3 + t^2)$$

del ejemplo previo, en la forma $y = f(x)$.

Solución Se "elimina el parámetro" aislando y como función de x. En primer lugar, exprese t el términos de x: como $x = 2t - 4$, se obtiene que $t = \frac{1}{2}x + 2$. Ahora, sustituya en y:

$$y = 3 + t^2 = 3 + \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 = 7 + 2x + \frac{1}{4}x^2$$

Por tanto, $c(t)$ describe la gráfica de $f(x) = 7 + 2x + \frac{1}{4}x^2$ que se muestra en la figura 2.

EJEMPLO 3 La trayectoria de una bala, hasta el instante en el que toca el suelo, es:

$$c(t) = (80t, 200t - 4{,}9t^2)$$

con t expresado en segundos y la distancia en metros (figura 4). Halle:

(a) La altura de la bala en el instante $t = 5$ s. **(b)** Su altura máxima.

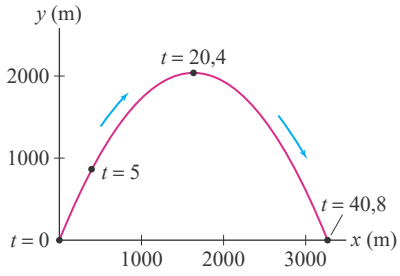


FIGURA 4 Trayectoria de una bala.

ATENCIÓN *La gráfica de la altura respecto al tiempo de un objeto que se lanza al aire es una parábola (según la fórmula de Galileo). Pero recuerde que la figura 4* ***no*** *es una gráfica de la altura respecto al tiempo. Muestra la trayectoria real de la bala (que presenta un desplazamiento vertical y uno horizontal).*

Solución La altura de la bala en el instante t es $y(t) = 200t - 4{,}9t^2$.

(a) La altura en $t = 5$ s es:

$$y(5) = 200(5) - 4{,}9(5^2) = 877{,}5 \text{ m}$$

(b) La altura máxima tiene lugar en el punto crítico de $y(t)$:

$$y'(t) = \frac{d}{dt}(200t - 4{,}9t^2) = 200 - 9{,}8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{200}{9{,}8} \approx 20{,}4 \text{ s}$$

La altura máxima de la bala es $y(20{,}4) = 200(20{,}4) - 4{,}9(20{,}4)^2 \approx 2041$ m. ■

A continuación se consideran la parametrización de rectas y de circunferencias. En los últimos capítulos, ambas aparecerán con frecuencia.

TEOREMA 1 Parametrización de una recta

(a) La recta que pasa por $P = (a, b)$ y tiene pendiente m se parametriza mediante:

$$x = a + rt \qquad y = b + st \qquad -\infty < t < +\infty \tag{3}$$

para cualquier r y s (con $r \neq 0$) tales que $m = s/r$.

(b) La parametrización de la recta que pasa por $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$ es:

$$x = a + t(c - a) \qquad y = b + t(d - b) \qquad -\infty < t < +\infty \tag{4}$$

El segmento que va de P a Q corresponde a $0 \leq t \leq 1$.

Solución (a) Aísle t como función de x en $x = a + rt$: se obtiene $t = (x - a)/r$. Entonces:

$$y = b + st = b + s\left(\frac{x - a}{r}\right) = b + m(x - a) \qquad \text{o} \qquad y - b = m(x - a)$$

Se trata de la ecuación de la recta que pasa por $P = (a, b)$ y tiene pendiente m. Para $r = 1$ y $s = m$ se obtiene la parametrización de la figura 5.

La parametrización de (b) define una recta que verifica $(x(0), y(0)) = (a, b)$ y $(x(1), y(1)) = (c, d)$. Por tanto, parametriza la recta que pasa por P y por Q y describe el segmento que va de P a Q cuando t varía de 0 a 1. ■

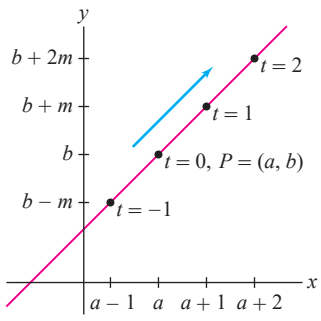


FIGURA 5 La parametrización de la recta $y - a = m(x - b)$ es: $c(t) = (a + t, b + mt)$. Corresponde a $r = 1$, $s = m$ en la ec. 3.

■ **EJEMPLO 4 Parametrización de una recta** Parametrice la recta que pasa por $P = (3, -1)$ y tiene pendiente $m = 4$.

Solución Se puede parametrizar esta recta considerando $r = 1$ y $s = 4$ en la ec. (3):

$$x = 3 + t, \qquad y = -1 + 4t$$

que se puede expresar como $c(t) = (3 + t, -1 + 4t)$. Otra parametrización de esta recta es $c(t) = (3 + 5t, -1 + 20t)$, correspondiente a $r = 5$ y $s = 20$ en la ec. (3). ■

La parametrización de la circunferencia centrada en el origen y de radio R es:

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\,\text{sen}\,\theta$$

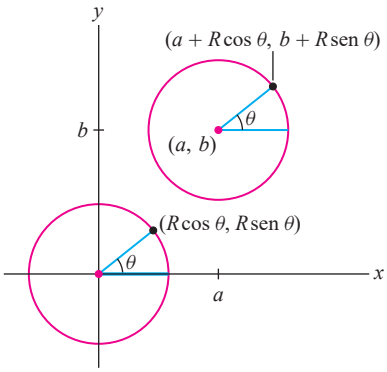


FIGURA 6 Parametrización de una circunferencia de radio R y centro (a, b).

El parámetro θ representa el ángulo correspondiente al punto (x, y) de la circunferencia (f gura 6). Cuando θ varía sobre un intervalo de longitud 2π, como $[0, 2\pi)$ o $[-\pi, \pi)$, el círculo se recorre una vez en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

De manera más general, la parametrización de la circunferencia de centro (a, b) y radio R es (f gura 6):

$$x = a + R\cos\theta, \qquad y = b + R\,\text{sen}\,\theta \tag{5}$$

Como comprobación, se va a verif car que un punto (x, y) dado por la ec. (5) cumple la ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (a + R\cos\theta - a)^2 + (b + R\,\text{sen}\,\theta - b)^2 =$$
$$= R^2\cos^2\theta + R^2\,\text{sen}^2\,\theta = R^2$$

En general, para realizar una **traslación** (es decir "desplazar") una curva paramétrica a unidades horizontalmente y b unidades verticalmente, reemplace $c(t) = (x(t), y(t))$ por $c(t) = (a + x(t), b + y(t))$.

Suponga que se dispone de una parametrización $c(t) = (x(t), y(t))$ donde $x(t)$ es una función par e $y(t)$es una función impar, es decir, $x(-t) = x(t)$ e $y(-t) = -y(t)$. En tal caso, $c(-t)$ es la *ref exión* de $c(t)$ respecto al eje x:

$$c(-t) = (x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$$

Por tanto, la curva es *simétrica* respecto al eje x. Se utilizará esta observación en el siguiente ejemplo y en el ejemplo 7.

EJEMPLO 5 Parametrización de una elipse Compruebe que una elipse de ecuación $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ se parametriza mediante:

$$c(t) = (a\cos t,\ b\,\text{sen}\,t) \qquad (\text{para } -\pi \le t < \pi)$$

Represente gráf camente el caso $a = 4$, $b = 2$.

Solución Para comprobar que $c(t)$ es una parametrización de la elipse, se muestra que los puntos $x = a\cos t$, $y = b\,\text{sen}\,t$ cumplen la ecuación de la elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cos t}{a}\right)^2 + \left(\frac{b\,\text{sen}\,t}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2\,t = 1$$

Para representar el caso $a = 4$, $b = 2$, se unen los puntos correspondientes a los valores de t de la tabla 2 (vea la f gura 7). De esta manera se obtiene la mitad superior de la elipse, correspondiente a $0 \le t \le \pi$. Ahora observe que $x(t) = 4\cos t$ es par y que $y(t) = 2\,\text{sen}\,t$ es impar. Tal y como se ha mencionado anteriormente, esto implica que la mitad inferior de la elipse se obtiene por simetría respecto al eje x. ■

TABLA 2

t	$x(t) = 4\cos t$	$y(t) = 2\,\text{sen}\,t$
0	4	0
$\frac{\pi}{6}$	$2\sqrt{3}$	1
$\frac{\pi}{3}$	2	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	2
$\frac{2\pi}{3}$	-2	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-2\sqrt{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	-4	0

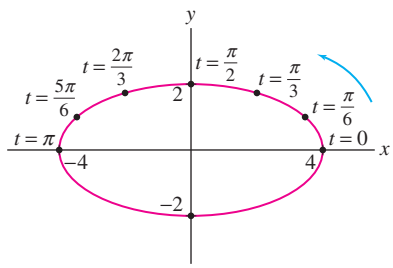


FIGURA 7 Elipse de ecuaciones paramétricas $x = 4\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$.

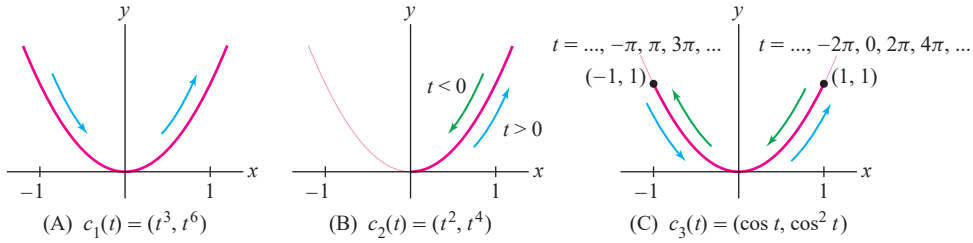
Una curva paramétrica $c(t)$ también se denomina un **camino** o trayectoria. Este término enfatiza el hecho que $c(t)$ no sólo describe $\mathcal{C}$ sino que se ref ere a una manera particular de desplazarse a lo largo de una curva.

UN APUNTE CONCEPTUAL Las ecuaciones paramétricas para la elipse del ejemplo 5 ilustran un punto clave de la diferencia entre el camino $c(t)$ y su curva subyacente $\mathcal{C}$. La curva subyacente $\mathcal{C}$ es una elipse en el plano, mientras que $c(t)$ describe un movimiento particular, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, a lo largo de la elipse. Si se permite que t varíe de 0 a 4π, entonces la partícula recorre la elipse dos veces.

Un punto clave en las parametrizaciones es que éstas no son únicas. De hecho, cada curva se puede parametrizar de inf nitas formas. Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ no se parametriza solamente por (t, t^2) sino que (t^3, t^6) o (t^5, t^{10}), entre otras, también serían parametrizaciones válidas.

EJEMPLO 6 Diferentes parametrizaciones de la misma curva Describa el movimiento de una partícula que se desplaza sobre cada una de los siguientes caminos.

(a) $c_1(t) = (t^3, t^6)$ **(b)** $c_2(t) = (t^2, t^4)$ **(c)** $c_3(t) = (\cos t, \cos^2 t)$



(A) $c_1(t) = (t^3, t^6)$ (B) $c_2(t) = (t^2, t^4)$ (C) $c_3(t) = (\cos t, \cos^2 t)$

FIGURA 8 Tres parametrizaciones de partes de la parábola.

Solución Cada una de estas parametrizaciones cumple que $y = x^2$ por lo que las tres parametrizan partes de la parábola $y = x^2$.

(a) Cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$, la función t^3 varía de $-\infty$ a $+\infty$. Por tanto, $c_1(t) = (t^3, t^6)$ describe la parábola completa $y = x^2$, desde la izquierda hasta la derecha y pasando por cada punto una sola vez. [f gura 8(A)].

(b) Como $x = t^2 \geq 0$, la curva $c_2(t) = (t^2, t^4)$ describe solamente la mitad derecha de la parábola. La partícula se aproxima al origen de la parábola cuando t varía de $-\infty$ a 0 y vuelve de nuevo hacia la derecha cuando t varía de 0 a $+\infty$ [f gura 8(B)].

(c) Cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$, $\cos t$ oscila entre 1 y -1. Por tanto, una partícula que describe el camino $c_3(t) = (\cos t, \cos^2 t)$ oscila adelante y atrás entre los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ sobre la parábola. [f gura 8(C)]. ■

EJEMPLO 7 Utilizando la simetría para dibujar un bucle Dibuje la curva:

$$c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$$

Marque los puntos correspondientes a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 2{,}5$.

Solución

Etapa 1. **Use simetría**

Observe que $x(t) = t^2 + 1$ es una función par y que $y(t) = t^3 - 4t$ es una función impar. Tal y como se apuntó antes del ejemplo 5, esto implica que la curva $c(t)$ es simétrica respecto al eje x. Por tanto, se representará la curva para $t \geq 0$ y se realizará una ref exión respecto al eje x para obtener la parte correspondiente a $t \leq 0$.

Etapa 2. **Estudie $x(t)$, $y(t)$ como funciones de t**

Se tiene que $x(t) = t^2 + 1$ y que $y(t) = t^3 - 4t$. La coordenada x, $x(t) = t^2 + 1$, tiende a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$. Para examinar la coordenada y, se representa $y(t) = t^3 - 4t = t(t-2)(t+2)$ como función de t (*no* como función de x). Como $y(t)$ es la altura por encima del eje x, la figura 9(A) muestra que:

$$y(t) < 0 \quad \text{para} \quad 0 < t < 2 \quad \Rightarrow \quad \text{curva por debajo del eje } x$$
$$y(t) > 0 \quad \text{para} \quad t > 2 \quad \Rightarrow \quad \text{curva por encima del eje } x$$

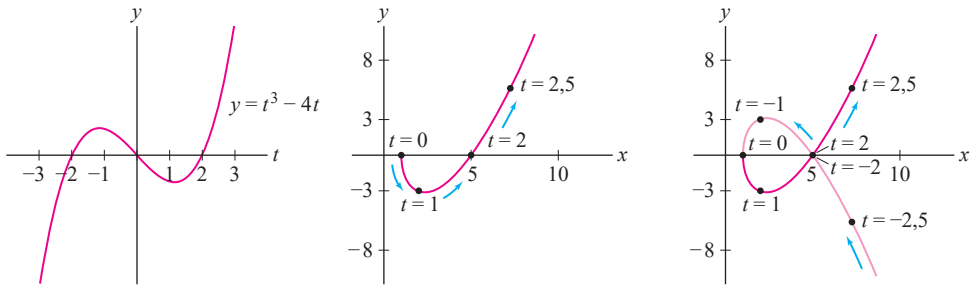
Así, la curva empieza en $c(0) = (1, 0)$, cae por debajo del eje x y vuelve al eje x en $t = 2$. Tanto $x(t)$ como $y(t)$ tienden a $+\infty$ cuando $t \to +\infty$. La curva es convexa porque $y(t)$ aumenta más rápidamente que $x(t)$.

Etapa 3. **Represente los puntos y únalos con un arco**

Se han representado los puntos $c(0)$, $c(1)$, $c(2)$, $c(2{,}5)$, vea la tabla 3, y unido mediante un arco para obtener la representación para $t \geq 0$ de la figura 9(B). La representación gráfica se complementa realizando una reflexión respecto al eje x, tal y como se ilustra en la figura 9(C). ■

TABLA 3

t	$x = t^2 + 1$	$y = t^3 - 4t$
0	1	0
1	2	−3
2	5	0
2.5	7,25	5,625



(A) Gráfica de la coordenada $y(t) = t^3 - 4t$ (B) Gráfica para $t \geq 0$ (C) Complete la representación gráfica usando la propiedad de simetría.

FIGURA 9 La curva $c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$.

Una **cicloide** es una curva descrita por un punto sobre una circunferencia en una rueda en movimiento, tal y como se muestra en la figura 10. Las cicloides son famosas por su "propiedad braquistócrona" (vea la nota la margen, más abajo).

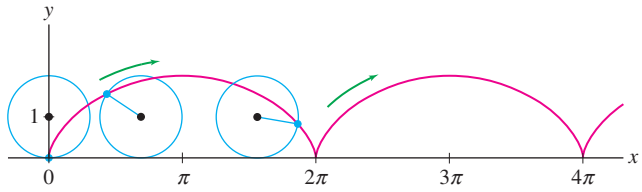


FIGURA 10 Una cicloide.

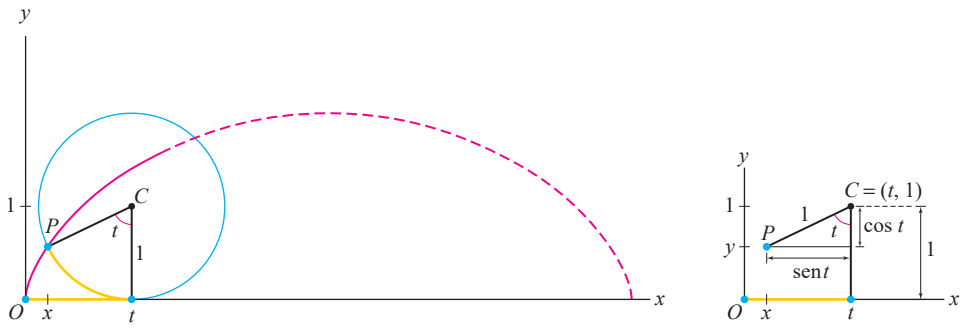
Destacados matemáticos (incluyendo a Galileo, Pascal, Newton, Leibniz, Huygens y Bernoulli) estudiaron la cicloide y descubrieron muchas de sus importantes propiedades. La curva que describe la caída de un cuerpo que debe llegar al punto inferior en el menor tiempo posible (suponiendo que no existe fricción) debe tener la forma de una cicloide invertida. Ésta es la propiedad braquistócrona, un término que deriva del griego brachistos, *"más corto," y* chronos, *"tiempo."*

■ **EJEMPLO 8** **Parametrización de una cicloide** Halle ecuaciones paramétricas para una cicloide generado por un punto P sobre la circunferencia unitaria.

Solución El punto P se encuentra en el origen en $t = 0$. En el instante t, la circunferencia se ha desplazado t radianes sobre el eje x con lo que el centro C de la circunferencia tendrá coordenadas $(t, 1)$, como se puede observar en la figura 11(A). La figura 11(B) muestra que para pasar de C a P hay que desplazarse $\cos t$ unidades hacia abajo y $\operatorname{sen} t$ a la izquierda, dando lugar a las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = t - \operatorname{sen} t, \qquad y(t) = 1 - \cos t \tag{5}$$

■



(A) Posición de P en el instante t

(B) P tiene las coordenadas $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$

FIGURA 11

De manera similar a como se ha procedido en el ejemplo 8, es posible demostrar que la cicloide generada por una circunferencia de radio R, tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = Rt - R\operatorname{sen} t, \qquad y = R - R\cos t \tag{6}$$

A continuación, se considera el problema de hallar las rectas tangentes a curvas paramétricas. La pendiente de la recta tangente es la derivada dy/dx, pero se debe utilizar la regla de la cadena para determinarla, porque y no se encuentra definida explícitamente como función de x. Exprese $x = f(t)$, $y = g(t)$. Entonces, según la regla de la cadena en la notación de Leibniz:

$$g'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}f'(t)$$

NOTACIÓN *En esta sección, se denota $f'(t), x'(t), y'(t)$, y así sucesivamente, como la derivada respecto a t.*

Si $f'(t) \neq 0$, se puede dividir por $f'(t)$ con el resultado

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Esta operación es factible si $f(t)$ y $g(t)$ son derivables, $f'(t)$ es continua y $f'(t) \neq 0$. En tal caso, la inversa $t = f^{-1}(x)$ existe y la función compuesta $y = g(f^{-1}(x))$ es una función derivable de x.

ATENCIÓN *No debe confundir dy/dx con las derivadas dx/dt y dy/dt, que son las derivadas respecto al parámetro t. Únicamente dy/dx es la pendiente de la recta tangente.*

TEOREMA 2 Pendiente de la recta tangente Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son derivables. Suponga que $x'(t)$ es continua y que $x'(t) \neq 0$. Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{7}$$

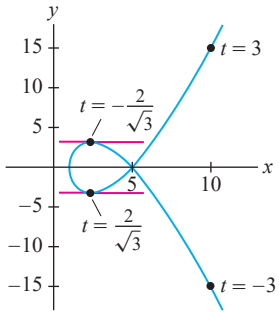


FIGURA 12 Rectas tangentes horizontales para $c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$.

EJEMPLO 9 Sea $c(t) = (t^2 + 1, t^3 - 4t)$. Determine:

(a) Una ecuación de la recta tangente en $t = 3$.

(b) Los puntos en que la recta tangente sea horizontal (figura 12).

Solución Se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(t^3 - 4t)'}{(t^2 + 1)'} = \frac{3t^2 - 4}{2t}$$

(a) La pendiente en $t = 3$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 4}{2t}\bigg|_{t=3} = \frac{3(3)^2 - 4}{2(3)} = \frac{23}{6}$$

Como $c(3) = (10, 15)$, la ecuación de la recta tangente en la forma punto-pendiente es:

$$y - 15 = \frac{23}{6}(x - 10)$$

(b) La pendiente dy/dx es cero si $y'(t) = 0$ y $x'(t) \neq 0$. Se tiene que $y'(t) = 3t^2 - 4 = 0$ si $t = \pm 2/\sqrt{3}$ (y $x'(t) = 2t \neq 0$ para estos valores de t). Por tanto, la recta tangente es horizontal en los puntos:

$$c\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{16}{3\sqrt{3}}\right), \qquad c\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{16}{3\sqrt{3}}\right)$$

■

Las curvas de Bézier se introdujeron en la década de 1960 por el ingeniero francés Pierre Bézier (1910-1999), que trabajó para la compañía de automóviles Renault. Se basan en las propiedades de los polinomios de Bernstein, introducidos 50 años antes por el matemático ruso Sergei Bernstein, para estudiar la aproximación de funciones continuas por polinomios. Hoy en día, las curvas de Bézier se utilizan en programas de gráficos estándar, Adobe Illustrator™ y Corel Draw™ y en la construcción y el almacenamiento de fuentes de escritura para un ordenador, como las fuentes TrueType™ y PostScript™.

Las curvas paramétricas se utilizan ampliamente en el campo de computación gráfica. Una clase de curvas especialmente importante es la de las **curvas de Bézier**, que se tratan brevemente a continuación para el caso cúbico. Dados cuatro "puntos de control" (figura 13):

$$P_0 = (a_0, b_0) \qquad P_1 = (a_1, b_1) \qquad P_2 = (a_2, b_2) \qquad P_3 = (a_3, b_3)$$

se define la curva de Bézier $c(t) = (x(t), y(t))$, para $0 \leq t \leq 1$, mediante:

$$x(t) = a_0(1-t)^3 + 3a_1t(1-t)^2 + 3a_2t^2(1-t) + a_3t^3 \qquad \boxed{8}$$

$$y(t) = b_0(1-t)^3 + 3b_1t(1-t)^2 + 3b_2t^2(1-t) + b_3t^3 \qquad \boxed{9}$$

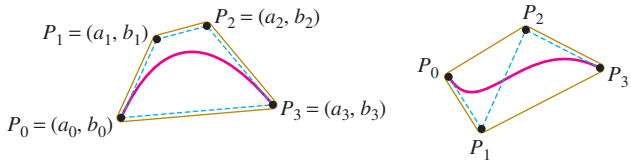
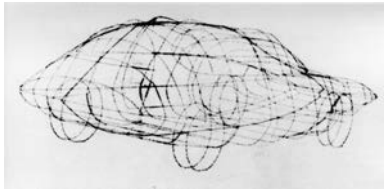


FIGURA 13 Curvas cúbicas de Bézier determinadas por cuatro puntos de control.

Observe que $c(0) = (a_0, b_0)$ y $c(1) = (a_3, b_3)$, por lo que la curva de Bézier empieza en P_0 y finaliza en P_3 (figura 13). Se puede probar también que la curva de Bézier se encuentra dentro del cuadrilátero (en azul) de vértices P_0, P_1, P_2, P_3. Sin embargo, $c(t)$ no pasa por P_1 ni por P_2. Por el contrario, estos puntos intermedios de control determinan las pendientes de las rectas tangentes en P_0 y P_3, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo (vea también los problemas 65-68).



Dibujo realizado a mano en 1964 por Pierre Bézier, para la compañía francesa de automóviles Renault.

■ **EJEMPLO 10** Pruebe que la curva de Bézier es tangente al segmento $\overline{P_0P_1}$ en P_0.

Solución La curva de Bézier pasa por P_0 en $t = 0$, por lo que se debe probar que la pendiente de la recta tangente en $t = 0$ es igual a la pendiente de $\overline{P_0P_1}$. Para hallar la pendiente, se calculan las derivadas:

$$x'(t) = -3a_0(1-t)^2 + 3a_1(1 - 4t + 3t^2) + a_2(2t - 3t^2) + 3a_3t^2$$
$$y'(t) = -3b_0(1-t)^2 + 3b_1(1 - 4t + 3t^2) + b_2(2t - 3t^2) + 3b_3t^2$$

Evaluando en $t = 0$, se obtiene $x'(0) = 3(a_1 - a_0)$, $y'(0) = 3(b_1 - b_0)$, y

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = \frac{3(b_1 - b_0)}{3(a_1 - a_0)} = \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0}$$

Este valor es justamente la pendiente de la recta que pasa por $P_0 = (a_0, b_0)$ y por $P_1 = (a_1, b_1)$, tal y como se quería probar (siempre que $a_1 \neq a_0$). ■

12.1 RESUMEN

- Una *curva paramétrica* $c(t) = (f(t), g(t))$ describe el camino de una partícula que se desplaza sobre una curva, como función del parámetro t.
- Las parametrizaciones no son únicas: cada curva $\mathcal{C}$ se puede parametrizar de infinitas maneras. Además, el camino $c(t)$ puede recorrer toda o parte de $\mathcal{C}$ más de una vez.
- Pendiente de la recta tangente en $c(t)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad (\text{válida si } x'(t) \neq 0)$$

- No confunda la pendiente de la recta tangente dy/dx con las derivadas dy/dt y dx/dt, respecto a t.
- Parametrizaciones estándar:
  - Recta de pendiente $m = s/r$ que pasa por $P = (a, b)$: $c(t) = (a + rt, b + st)$.
  - Circunferencia de radio R centrada en $P = (a, b)$: $c(t) = (a + R\cos t, b + R\,\text{sen}\, t)$.
  - Cicloide generada por una circunferencia de radio R: $c(t) = (R(t - \text{sen}\, t), R(1 - \cos t))$.

12.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Describa la forma de la curva $x = 3\cos t, y = 3\,\text{sen}\, t$.

2. ¿Cuál es la diferencia entre la curva $x = 4 + 3\cos t, y = 5 + 3\,\text{sen}\, t$ y la del problema anterior?

3. ¿Cuál es la altura máxima de una partícula cuya trayectoria queda descrita por las ecuaciones paramétricas $x = t^9, y = 4 - t^2$?

4. ¿Se puede representar la curva paramétrica $(t, \text{sen}\, t)$ como una gráfica $y = f(x)$? ¿Y la curva $(\text{sen}\, t, t)$?

5. Relacione las derivadas con la descripción verbal:

(a) $\dfrac{dx}{dt}$ **(b)** $\dfrac{dy}{dt}$ **(c)** $\dfrac{dy}{dx}$

(i) Pendiente de la recta tangente a la curva.

(ii) Tasa de cambio vertical respecto al tiempo.

(iii) Tasa de cambio horizontal respecto al tiempo.

Problemas

1. Halle las coordenadas en los instantes $t = 0, 2, 4$ de una partícula cuya trayectoria es $x = 1 + t^3, y = 9 - 3t^2$.

2. Halle las coordenadas en $t = 0, \frac{\pi}{4}, \pi$ de una partícula que se mueve describiendo la trayectoria $c(t) = (\cos 2t, \text{sen}^2\, t)$.

3. Pruebe, eliminando el parámetro, que la trayectoria descrita por la bala del ejemplo 3 es una parábola.

4. Use la tabla de valores para dibujar la curva paramétrica $(x(t), y(t))$, indicando la dirección del movimiento.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-15	0	3	0	-3	0	15
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

5. Represente las siguientes curvas paramétricas. Incluya flechas que indiquen la dirección del movimiento.

(a) $(t, t), \quad -\infty < t < +\infty$ **(b)** $(\text{sen}\, t, \text{sen}\, t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

(c) $(e^t, e^t), \quad -\infty < t < +\infty$ **(d)** $(t^3, t^3), \quad -1 \le t \le 1$

6. Proporcione dos parametrizaciones diferentes de la recta que pasa por $(4, 1)$ y tiene pendiente 2.

En los problemas 7-14, elimine el parámetro para conseguir expresar $y = f(x)$.

7. $x = t + 3, \quad y = 4t$ **8.** $x = t^{-1}, \quad y = t^{-2}$

9. $x = t, \quad y = \tan^{-1}(t^3 + e^t)$ **10.** $x = t^2, \quad y = t^3 + 1$

11. $x = e^{-2t}, \quad y = 6e^{4t}$ **12.** $x = 1 + t^{-1}, \quad y = t^2$

13. $x = \ln t, \quad y = 2 - t$ **14.** $x = \cos t, \quad y = \tan t$

En los problemas 15-18, represente la curva y dibuje una flecha que indique la dirección del movimiento.

15. $x = \frac{1}{2}t, \quad y = 2t^2$ **16.** $x = 2 + 4t, \quad y = 3 + 2t$

17. $x = \pi t, \quad y = \text{sen}\, t$ **18.** $x = t^2, \quad y = t^3$

19. Relacione las parametrizaciones (a)-(d) que se encuentran a continuación con sus gráficas de la figura 14 y dibuje una flecha que indique la dirección del movimiento.

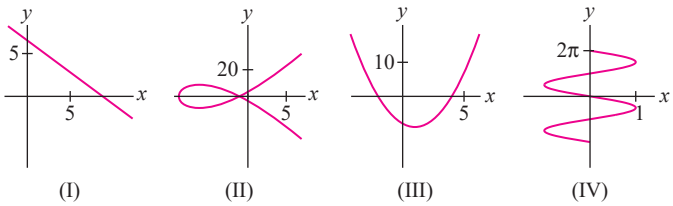


FIGURA 14

(a) $c(t) = (\operatorname{sen} t, -t)$ **(b)** $c(t) = (t^2 - 9, 8t - t^3)$

(c) $c(t) = (1 - t, t^2 - 9)$ **(d)** $c(t) = (4t + 2, 5 - 3t)$

20. Una partícula describe la trayectoria:

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 + 2t, \qquad y(t) = 20t - t^2$$

donde t se expresa en segundos y la distancia se expresa en centímetros.

(a) ¿Cuál es la altura máxima de la partícula?

(b) ¿En qué momento y a qué distancia del origen llega la partícula al suelo?

21. Halle un intervalo de valores de t para el que $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ describa la parte inferior de la circunferencia unidad.

22. Halle un intervalo de valores de t para el que $c(t) = (2t + 1, 4t - 5)$ parametrice el segmento que va de $(0, -7)$ a $(7, 7)$.

En los problemas 23-38, halle ecuaciones paramétricas para la curva dada.

23. $y = 9 - 4x$ **24.** $y = 8x^2 - 3x$

25. $4x - y^2 = 5$ **26.** $x^2 + y^2 = 49$

27. $(x + 9)^2 + (y - 4)^2 = 49$ **28.** $\left(\frac{y}{12}\right)^2 = 1$

29. Recta de pendiente 8 que pasa por $(-4, 9)$.

30. Recta que pasa por $(2, 5)$ y es perpendicular a $y = 3x$.

31. Recta que pasa por $(3, 1)$ y por $(-5, 4)$.

32. Recta que pasa por $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ y por $(-\frac{7}{6}, \frac{5}{3})$.

33. Segmento que une $(1, 1)$ y $(2, 3)$.

34. Segmento que une $(-3, 0)$ y $(0, 4)$.

35. Circunferencia de centro $(3, 9)$ y radio 4.

36. Elipse del problema 28, con su centro trasladado a $(7, 4)$.

37. $y = x^2$, a la que se ha aplicado una traslación de manera que el mínimo se dé en $(-4, -8)$.

38. $y = \cos x$, a la que se ha aplicado una traslación de manera que el máximo se dé en $(3, 5)$.

En los problemas 39-42, halle una parametrización $c(t)$ de la curva, que cumpla la condición indicada.

39. $y = 3x - 4, \quad c(0) = (2, 2)$

40. $y = 3x - 4, \quad c(3) = (2, 2)$

41. $y = x^2, \quad c(0) = (3, 9)$

42. $x^2 + y^2 = 4, \quad c(0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

43. Describa $c(t) = (\sec t, \tan t)$ para $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ de la forma $y = f(x)$. Especif que el dominio de x.

44. Halle una parametrización de la rama derecha $(x > 0)$ de la hipérbola:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

usando las funciones cosh t y senh t. ¿Cómo puede parametrizar la rama $x < 0$?

45. En la f gura 15(A) se muestran las gráf cas de $x(t)$ y de $y(t)$ como funciones de t. ¿Cuál de las representaciones gráf cas (I)-(III) corresponde a la gráf ca de $c(t) = (x(t), y(t))$? Justif que su respuesta.

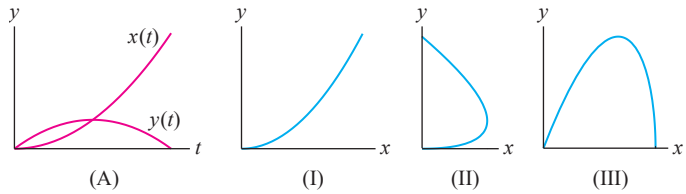


FIGURA 15

46. ¿Cuál de las representaciones gráf cas (I) o (II), corresponde a la gráf ca de $x(t)$ y cuál es la gráf ca de $y(t)$ para la curva paramétrica de la f gura 16(A)?

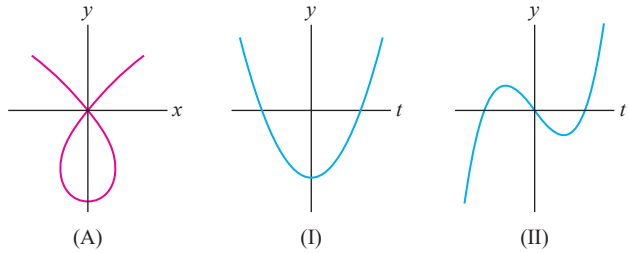


FIGURA 16

47. Dibuje $c(t) = (t^3 - 4t, t^2)$ siguiendo los pasos del ejemplo 7.

48. Dibuje $c(t) = (t^2 - 4t, 9 - t^2)$ para $-4 \le t \le 10$.

En los problemas 49-52, use la ec. (7) para hallar dy/dx en el punto que se indica.

49. $(t^3, t^2 - 1), \quad t = -4$ **50.** $(2t + 9, 7t - 9), \quad t = 1$

51. $(s^{-1} - 3s, s^3), \quad s = -1$ **52.** $(\operatorname{sen} 2\theta, \cos 3\theta), \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

En los problemas 53-56, halle una ecuación $y = f(x)$ para la curva paramétrica y calcule dy/dx de dos maneras: usando la ec. (7) y derivando $f(x)$.

53. $c(t) = (2t + 1, 1 - 9t)$

54. $c(t) = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2 - t)$

55. $x = s^3, \quad y = s^6 + s^{-3}$

56. $x = \cos\theta, \quad y = \cos\theta + \text{sen}^2\,\theta$

57. Halle los puntos de la curva $c(t) = (3t^2 - 2t, t^3 - 6t)$ en los que la recta tangente tiene pendiente igual a 3.

58. Halle la ecuación de la recta tangente a la cicloide generada por una circunferencia de radio 4, en $t = \frac{\pi}{2}$.

En los problemas 59-62, sea $c(t) = (t^2 - 9, t^2 - 8t)$ (vea la figura 17).

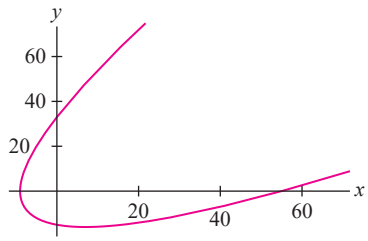


FIGURA 17 Representación gráfica de $c(t) = (t^2 - 9, t^2 - 8t)$.

59. Dibuje una flecha que indique la dirección del movimiento y determine el intervalo de valores de t que corresponden a la porción de la curva que se encuentra en cada uno de los cuatro cuadrantes.

60. Halle la ecuación de la recta tangente en $t = 4$.

61. Halle los puntos en que la pendiente de la recta tangente sea igual a $\frac{1}{2}$.

62. Halle los puntos en que la recta tangente es horizontal y aquellos en que la recta tangente es vertical.

63. Sean A y B los puntos en los que la semirrecta de ángulo θ corta las dos circunferencias concéntricas de radios $r < R$ y centradas en el origen (figura 18). Sea P el punto de la intersección entre la recta horizontal que pasa por A y la recta vertical que pasa por B. Exprese las coordenadas de P como función de θ y describa la curva trazada por P para $0 \le \theta \le 2\pi$.

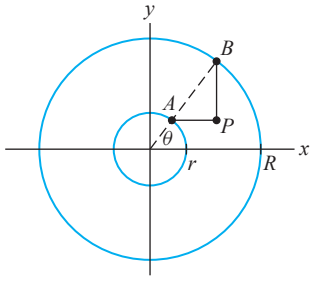


FIGURA 18

64. Una escalera de 10 pies se desliza por una pared cuando se desplaza su extremo inferior B, alejándolo de la pared (figura 19). Usando el ángulo θ como parámetro, encuentre las ecuaciones paramétricas del camino seguida por (a) la parte superior de la escalera de A, (b) la parte inferior de la escalera de B y (c) el punto P que se encuentra a 4 pies de la parte superior de la escalera. Pruebe que P describe una elipse.

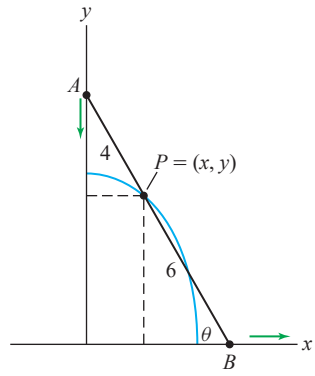


FIGURA 19

En los problemas 65-68, se hace referencia a la curva de Bézier definida por las ecs. (8) y (9).

65. Pruebe que la curva de Bézier de puntos de control:

$$P_0 = (1, 4), \quad P_1 = (3, 12), \quad P_2 = (6, 15), \quad P_3 = (7, 4)$$

tiene parametrización

$$c(t) = (1 + 6t + 3t^2 - 3t^3, 4 + 24t - 15t^2 - 9t^3)$$

Compruebe que la pendiente en $t = 0$ es igual a la pendiente del segmento $\overline{P_0P_1}$.

66. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva de Bézier del problema 65 en $t = \frac{1}{3}$.

67. Encuentre y represente la curva de Bézier $c(t)$ que pasa por los puntos de control:

$$P_0 = (3, 2) \quad P_1 = (0, 2) \quad P_2 = (5, 4) \quad P_3 = (2, 4)$$

68. Pruebe que una curva cúbica de Bézier es tangente al segmento $\overline{P_2P_3}$ en P_3.

69. Una bala disparada desde una pistola sigue la trayectoria:

$$x = at, \qquad y = bt - 16t^2 \quad (a, b > 0)$$

Pruebe que la bala sale del arma con un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$ y que llega al suelo a una distancia $ab/16$ del origen.

70. SAC Represente gráficamente $c(t) = (t^3 - 4t, t^4 - 12t^2 + 48)$ para $-3 \le t \le 3$. Halle los puntos en que la recta tangente es horizontal o vertical.

71. SAC Represente gráficamente el astroide $x = \cos^3\theta, y = \text{sen}^3\,\theta$ y halle la ecuación de la recta tangente en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

72. Halle la ecuación de la recta tangente en $t = \frac{\pi}{4}$ a la cicloide generada por la circunferencia unidad con ecuación paramétrica (5).

73. Halle los puntos sobre la cicloide de ecuación paramétrica (5) en que la recta tangente sea horizontal.

74. Propiedad de la cicloide Demuestre que la recta tangente en un punto P de la cicloide siempre pasa por el punto superior de una circunferencia rodante, tal y como se muestra en la f gura 20. Suponga que el radio de la circunferencia generadora de la cicloide es 1.

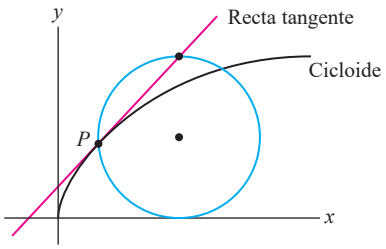


FIGURA 20

75. Una *cicloide acortada* (f gura 21) es la curva que se genera por un punto a distancia h del centro de una circunferencia de radio R que rueda a lo largo del eje x, siendo $h < R$. Pruebe que esta curva admite la parametrización $x = Rt - h\,\text{sen}\,t$, $y = R - h\cos t$.

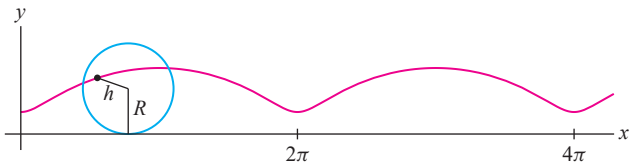


FIGURA 21 Cicloide acortada.

76. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para examinar qué pasa si $h > R$ en las ecuaciones paramétricas del problema 75. Describa el resultado obtenido.

77. Pruebe que la recta de pendiente t que pasa por $(-1, 0)$ corta la circunferencia unidad en el punto de coordenadas:

$$x = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}, \qquad y = \frac{2t}{t^2 + 1} \tag{10}$$

Deduzca que estas ecuaciones son una parametrización de la circunferencia unidad, excluyendo el punto $(-1, 0)$ (f gura 22). Demuestre además que $t = y/(x + 1)$.

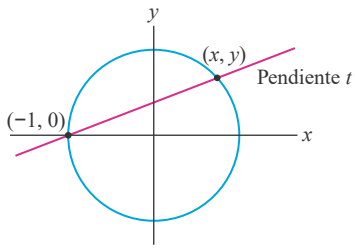


FIGURA 22 Circunferencia unidad.

78. El **folium de Descartes** es la curva de ecuación:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

donde $a \neq 0$ es una constante (f gura 23).

(a) Pruebe que la recta $y = tx$ corta el folium en el origen y en otro punto P, para todo $t \neq -1, 0$. Exprese las coordenadas de P en términos de t para obtener una parametrización del folium. Indique la dirección de la parametrización en la gráf ca.

(b) Describa el intervalo de valores de t mediante los que se parametriza las partes de la curva que se encuentran en los cuadrantes I, II y IV. Observe que $t = -1$ es un punto de discontinuidad de la parametrización.

(c) Calcule dy/dx como función de t y encuentre los puntos en que la recta tangente es horizontal y los puntos en que es vertical.

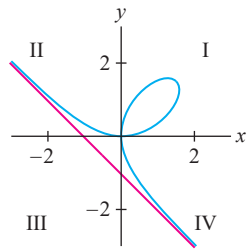


FIGURA 23 Folium $x^3 + y^3 = 3axy$.

79. Use los resultados del problema 78 para probar que la asíntota del folium es la recta $x + y = -a$. *Indicación:* pruebe que $\lim_{t \to -1} (x + y) = -a$.

80. Halle una parametrización de $x^{2n+1} + y^{2n+1} = ax^n y^n$, donde a y n son constantes.

81. Derivada segunda para una curva parametrizada Dada una curva parametrizada $c(t) = (x(t), y(t))$, pruebe que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2}$$

Use este resultado para demostrar la fórmula:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^3} \tag{11}$$

82. La derivada segunda de $y = x^2$ es $dy^2/d^2x = 2$. Compruebe que la ec. (11) aplicada a $c(t) = (t, t^2)$ da como resultado $dy^2/d^2x = 2$. De hecho, se puede utilizar cualquier parametrización. Compruebe que $c(t) = (t^3, t^6)$ y $c(t) = (\tan t, \tan^2 t)$ también dan como resultado $dy^2/d^2x = 2$.

En los problemas 83-86, use la ec. (11) para hallar d^2y/dx^2.

83. $x = t^3 + t^2$, $y = 7t^2 - 4$, $t = 2$

84. $x = s^{-1} + s$, $y = 4 - s^{-2}$, $s = 1$

85. $x = 8t + 9$, $y = 1 - 4t$, $t = -3$

86. $x = \cos\theta$, $y = \text{sen}\,\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

87. Use la ec. (11) para hallar los intervalos de t en que $c(t) = (t^2, t^3 - 4t)$ es convexa.

88. Use la ec. (11)para hallar los intervalos de t en que $c(t) = (t^2, t^4 - 4t)$ es convexa.

89. Área por debajo de una curva parametrizada Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $y(t) > 0$ y $x'(t) > 0$ (f gura 24). Pruebe que el área A por debajo de $c(t)$ para $t_0 \le t \le t_1$ es:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt \qquad \boxed{12}$$

Indicación: como es estrictamente creciente, la función $x(t)$ admite inversa $t = g(x)$ y $c(t)$ es la gráf ca de $y = y(g(x))$. Aplique la fórmula del cambio de variable a $A = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} y(g(x))\,dx$.

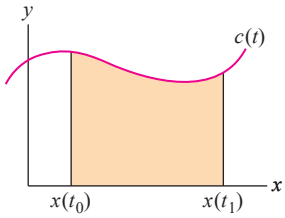


FIGURA 24

90. Calcule el área por debajo de $y = x^2$ en $[0, 1]$ utilizando la ec. (12) y con las parametrizaciones (t^3, t^6) y (t^2, t^4).

91. ¿Qué dice la ec. (12) para $c(t) = (t, f(t))$?

92. Dibuje la gráf ca de $c(t) = (\ln t, 2 - t)$ para $1 \le t \le 2$ y calcule el área por debajo de la gráf ca aplicando la ec. (12).

93. Galileo intentó, sin éxito, hallar el área por debajo de una cicloide. Sobre el 1630, Gilles de Roberval demostró que el área por debajo de un arco de la cicloide $c(t) = (Rt - R\,\text{sen}\,t, R - R\cos t)$ generado por una circunferencia de radio R es igual al triple del área del círculo (f gura 25). Compruebe el resultado de Roberval usando la ec. (12).

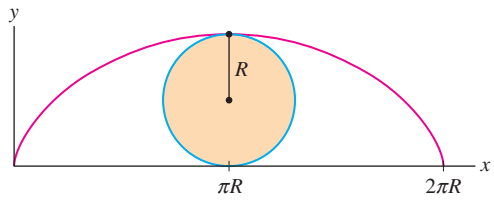
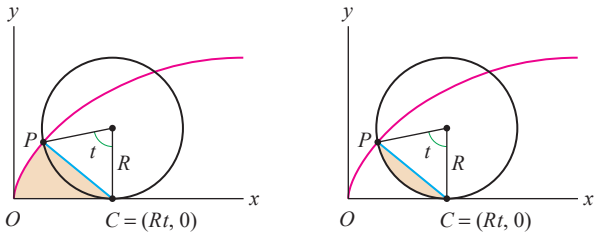


FIGURA 25 El área de un arco de la cicloide es igual al triple del área del círculo correspondiente a la circunferencia que lo genera.

Problemas avanzados

94. Demuestre la siguiente generalización del problema 93: para todo $t > 0$, el área del sector de la cicloide OPC es igual al triple del área del segmento circular limitado por la cuerda PC de la f gura 26.



(A) Sector de la cicloide OPC

(B) Segmento circular limitado por la cuerda PC

FIGURA 26

95. Obtenga la fórmula para la pendiente de la recta tangente a una curva paramétrica $c(t) = (x(t), y(t))$ mediante un método diferente al que se ha considerado en este libro. Suponga que $x'(t_0)$ e $y'(t_0)$ existen y que $x'(t_0) \ne 0$. Pruebe que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{x(t_0 + h) - x(t_0)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

A continuación, explique por qué este límite es igual a la pendiente dy/dx. Dibuje una f gura que muestre que la razón en el límite es la pendiente de una recta secante.

96. Compruebe que la curva **tractriz** ($\ell > 0$):

$$c(t) = \left(t - \ell \tanh\frac{t}{\ell}, \ell\,\text{sech}\,\frac{t}{\ell}\right)$$

tiene la siguiente propiedad: para todo t, el segmento que va de $c(t)$ a $(t, 0)$ es tangente a la curva y su longitud es ℓ (f gura 27).

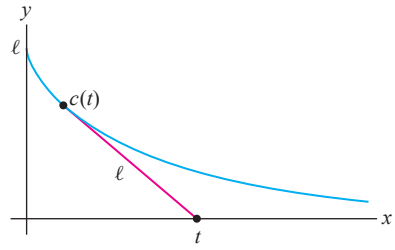


FIGURA 27 Tractriz $c(t) = \left(t - \ell \tanh\frac{t}{\ell}, \ell\,\text{sech}\,\frac{t}{\ell}\right)$.

97. En el problema 54 de la sección 9.1, se describió la tractriz mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{\ell^2 - y^2}}$$

Pruebe que la curva $c(t)$ identif cada como la tractriz en el problema 96 cumple esta ecuación diferencial. Observe que la derivada a la izquierda se considera respecto a x, no respecto a t.

En los problemas 98 y 99, se hace referencia a la f gura 28.

98. En la parametrización $c(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$ de una elipse, t *no* es un parámetro angular salvo si $a = b$ (es decir, cuando la elipse es una circunferencia). Sin embargo, se puede interpretar t en términos de un área: pruebe que si $c(t) = (x, y)$, entonces $t = (2/ab)A$, donde A es el área de la región sombreada de la f gura 28. *Indicación:* Use ec. (12).

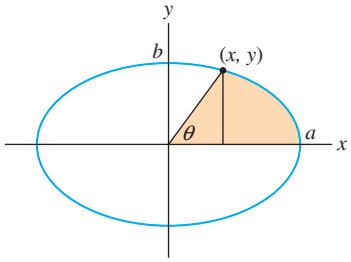


FIGURA 28 El parámetro θ para la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

99. Pruebe que la parametrización de la elipse por el ángulo θ es:

$$x = \frac{ab\cos\theta}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

$$y = \frac{ab\,\text{sen}\,\theta}{\sqrt{a^2\,\text{sen}^2\,\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

12.2 La longitud de arco y la velocidad

A continuación, se va a obtener una fórmula para la longitud de arco de una curva que se encuentre expresada en forma paramétrica. Recuerde que en la sección 9.1, se definió la longitud de arco como el límite de las longitudes de las aproximaciones poligonales (figura 1).

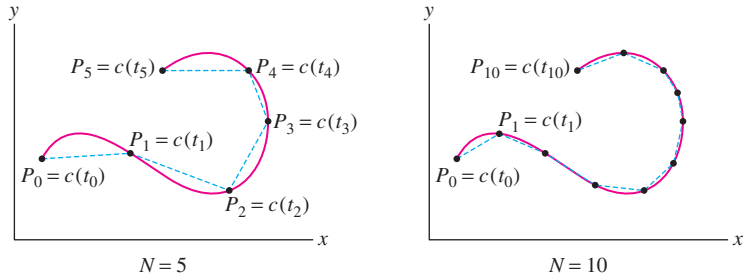


FIGURA 1 Aproximaciones poligonales para $N = 5$ y $N = 10$.

Dada una parametrización $c(t) = (x(t), y(t))$ para $a \le t \le b$, se construye una aproximación poligonal L formada por N segmentos uniendo los puntos:

$$P_0 = c(t_0), \quad P_1 = c(t_1), \quad \ldots, \quad P_N = c(t_N)$$

correspondientes a la elección de valores $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$. Según la fórmula de la distancia:

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \qquad \boxed{1}$$

Suponga ahora que tanto $x(t)$ como $y(t)$ son derivables. Según el teorema del valor medio de Lagrange, existen t_i^* y t_i^{**} en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ tales que:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(t_i^*)\Delta t_i, \qquad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(t_i^{**})\Delta t_i$$

donde $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por tanto:

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{x'(t_i^*)^2\Delta t_i^2 + y'(t_i^{**})^2\Delta t_i^2} = \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2}\,\Delta t_i$$

La longitud de la aproximación poligonal L es igual a la suma:

$$\sum_{i=1}^{N} P_{i-1}P_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{x'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2}\,\Delta t_i \qquad \boxed{2}$$

Se trata *prácticamente* de una suma de Riemann para la función $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Sería una suma de Riemann real, si los valores intermedios t_i^* y t_i^{**} fuesen iguales. Aunque no

son necesariamente el mismo, se puede probar (se va a considerar como cierto) que si $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas, entonces la suma de la ec. (2) continúa siendo una aproximación de la integral cuando las amplitudes Δt_i tienden a 0. Por tanto:

$$s = \lim \sum_{i=1}^{N} P_{i-1}P_i = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Debido a la raíz cuadrada, la integral de la longitud de arco no se puede evaluar explícitamente, excepto en casos especiales, pero sí que se puede aproximar numéricamente.

TEOREMA 1 Longitud de arco Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $x'(t)$ e $y'(t)$ existen y son continuas. Entonces, la longitud de arco s de $c(t)$ para $a \le t \le b$ es igual a:

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \qquad \boxed{3}$$

La parametrización de la gráfica de una función $y = f(x)$ es $c(t) = (t, f(t))$. En este caso:

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

y la ec. (3) se reduce a la fórmula de la longitud de arco que se obtuvo en la sección 9.1.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la integral de la longitud de arco se puede evaluar de forma explícita únicamente en casos especiales. La circunferencia y la cicloide son dos de estos casos.

EJEMPLO 1 Use la ec. 3 para calcular la longitud de arco de una circunferencia de radio R.

Solución Si se considera la parametrización $x = R\cos\theta$, $y = R\,\text{sen}\,\theta$, se tiene:

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = (-R\,\text{sen}\,\theta)^2 + (R\cos\theta)^2 = R^2(\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta) = R^2$$

Se obtiene el resultado esperado:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} R\, d\theta = 2\pi R$$

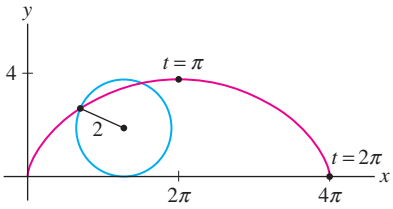


FIGURA 2 Un arco de la cicloide generada por una circunferencia de radio 2.

EJEMPLO 2 Longitud de la cicloide Calcule la longitud s de un arco de la cicloide generada por una circunferencia de radio $R = 2$ (figura 2).

Solución Considere la parametrización de la cicloide dada por la ec. (6) de la sección 1:

$$x(t) = 2(t - \text{sen}\,t), \qquad y(t) = 2(1 - \cos t)$$
$$x'(t) = 2(1 - \cos t), \qquad y'(t) = 2\,\text{sen}\,t$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 2^2(1 - \cos t)^2 + 2^2\,\text{sen}^2\,t \\ &= 4 - 8\cos t + 4\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2\,t \\ &= 8 - 8\cos t \\ &= 16\,\text{sen}^2\,\frac{t}{2} \qquad \text{(Use la identidad que se recuerda al margen.)} \end{aligned}$$

RECORDATORIO

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \text{sen}^2\,\frac{t}{2}$$

Cuando t varía de 0 a 2π, se genera un arco de la cicloide y, por tanto:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 4\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\, dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -8(-1) + 8 = 16$$

Observe que no es necesario el valor absoluto cuando se considera la raíz cuadrada de $16\,\text{sen}^2\,\frac{t}{2}$, pues $\text{sen}\,\frac{t}{2} \ge 0$ para $0 \le t \le 2\pi$.

En el capítulo 13, se tratará no sólo la celeridad sino la velocidad *de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva. La velocidad es la "celeridad junto con la dirección" y se representa mediante un vector.*

Considere ahora una partícula que se mueve a lo largo de $c(t)$. La distancia recorrida por la partícula a lo largo del intervalo $[t_0, t]$ viene dada por la integral de la longitud de arco:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$$

Por otra parte, la celeridad se def ne como la tasa de cambio de la distancia recorrida respecto al tiempo; así, por el teorema fundamental del cálculo:

$$\text{Celeridad} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

TEOREMA 2 Celeridad a lo largo de una curva parametrizada La celeridad de $c(t) = (x(t), y(t))$ es:

$$\text{Celeridad} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

El siguiente ejemplo ilustra la diferencia entre distancia recorrida a lo largo de una curva y **desplazamiento** (también denominado variación neta de la posición). El desplazamiento a lo largo de una curva es la distancia entre el punto inicial $c(t_0)$ y el f nal $c(t_1)$. La distancia recorrida es mayor, salvo si la partícula se desplaza en linea recta (f gura 3).

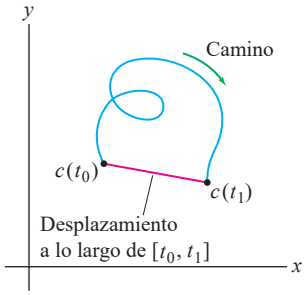


FIGURA 3 La distancia recorrida a lo largo de la trayectoria es mayor o igual que el desplazamiento.

EJEMPLO 3 Una partícula se desplaza a lo largo de $c(t) = (2t, 1 + t^{3/2})$. Halle:

(a) La celeridad de la partícula en $t = 1$ (suponga unidades de metros y de minutos).

(b) La distancia recorrida s y el desplazamiento d en el intervalo $0 \le t \le 4$.

Solución Se tiene que:

$$x'(t) = 2 \qquad y'(t) = \frac{3}{2}t^{1/2}$$

La celeridad en el instante t es:

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}t} \quad \text{m/min}$$

(a) La celeridad de la partícula en $t = 1$ es $s'(1) = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 2{,}5$ m/min.

(b) La distancia recorrida en los primeros 4 minutos es:

$$s = \int_0^4 \sqrt{4 + \frac{9}{4}t}\, dt = \frac{8}{27}\left(4 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(13^{3/2} - 8) \approx 11{,}52 \text{ m}$$

El desplazamiento d es la distancia desde el punto inicial $c(0) = (0, 1)$ al f nal $c(4) = (8, 1 + 4^{3/2}) = (8, 9)$ (vea la f gura 4):

$$d = \sqrt{(8-0)^2 + (9-1)^2} = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31 \text{ m}$$

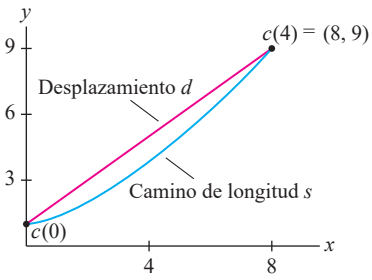


FIGURA 4 El camino $c(t) = (2t, 1 + t^{3/2})$.

En física, se suele describir el camino de una partícula que se mueve a celeridad constante sobre una circunferencia de radio R en términos de una constante ω (letra griega omega minúscula) de la siguiente manera:

$$c(t) = (R\cos \omega t, R \operatorname{sen} \omega t)$$

La constante ω, denominada *velocidad angular*, es la tasa de cambio respecto al tiempo del ángulo θ de la partícula (f gura 5).

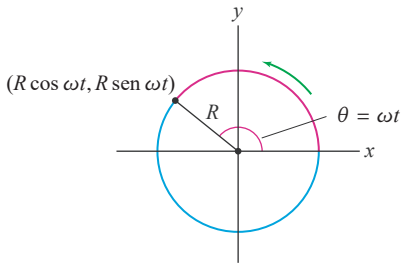


FIGURA 5 Una partícula que se mueve sobre una circunferencia de radio R con velocidad angular ω tiene celeridad $|\omega R|$.

EJEMPLO 4 Velocidad angular Calcule la velocidad de la trayectoria circular de radio R y velocidad angular ω. ¿Cuál es la celeridad si $R = 3$ m y $\omega = 4$ rad/s?

Solución Se tiene que $x = R\cos\omega t$ e $y = R\,\text{sen}\,\omega t$, y además:

$$x'(t) = -\omega R\,\text{sen}\,\omega t \qquad y'(t) = \omega R\cos\omega t$$

La celeridad de la partícula es:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-\omega R\,\text{sen}\,\omega t)^2 + (\omega R\cos\omega t)^2} =$$
$$= \sqrt{\omega^2 R^2(\text{sen}^2\,\omega t + \cos^2\omega t)} = |\omega| R$$

Por tanto, la celeridad es constante y de valor $|\omega|R$. Si $R = 3$ m y $\omega = 4$ rad/s, entonces la celeridad es $|\omega|R = 3(4) = 12$ m/s. ■

Considere la superf cie obtenida por rotación de una curva paramétrica $c(t) = (x(t), y(t))$ respecto al eje x. El área de la superf cie viene dada por la ec. (4) del siguiente teorema. Se puede obtener prácticamente de la misma manera en que se obtuvo la fórmula para la superf cie de revolución de una gráf ca $y = f(x)$ en la sección 9.1. En este teorema, se supone que $y(t) \geq 0$ por lo que la curva $c(t)$ se encuentra por encima del eje x y $x(t)$ es estrictamente creciente.

TEOREMA 3 Área de una superficie Sea $c(t) = (x(t), y(t))$, donde $y(t) \geq 0$, $x(t)$ es estrictamente creciente y tanto $x'(t)$ como $y'(t)$ son continuas. Entonces, el área de la superf cie que se obtiene por rotación de $c(t)$ respecto al eje x para $a \leq t \leq b$ es:

$$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \qquad \boxed{4}$$

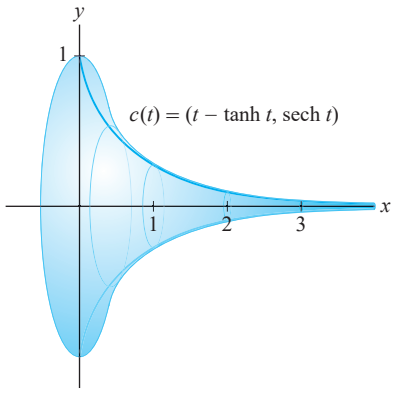


FIGURA 6 Superf cie generada por revolución de la tractriz respecto al eje x.

EJEMPLO 5 Calcule el área de la superf cie obtenida por rotación de la *tractriz* $c(t) = (t - \tanh t, \text{sech}\,t)$ respecto al eje x para $0 \leq t < +\infty$.

Solución Observe que la superf cie se extiende hacia la derecha de forma inf nita (f gura 6). Se tiene que:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(t - \tanh t) = 1 - \text{sech}^2\,t \qquad y'(t) = \frac{d}{dt}\,\text{sech}\,t = -\,\text{sech}\,t\tanh t$$

Aplicando las identidades $1 - \text{sech}^2\,t = \tanh^2 t$ y $\text{sech}^2\,t = 1 - \tanh^2 t$, se obtiene que:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = (1 - \text{sech}^2\,t)^2 + (-\,\text{sech}\,t\tanh t)^2 =$$
$$= (\tanh^2 t)^2 + (1 - \tanh^2 t)\tanh^2 t = \tanh^2 t$$

El área de la superf cie viene dada por una integral impropia, que se evalúa usando la fórmula de integrales que se menciona al margen:

$$S = 2\pi\int_0^{+\infty}\text{sech}\,t\sqrt{\tanh^2 t}\,dt = 2\pi\int_0^{+\infty}\text{sech}\,t\tanh t\,dt = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \text{sech}\,t\tanh t\,dt$$
$$= 2\pi\lim_{R\to+\infty}(-\,\text{sech}\,t)\Big|_0^R = 2\pi\lim_{R\to+\infty}(\text{sech}\,0 - \text{sech}\,R) = 2\pi\,\text{sech}\,0 = 2\pi$$

Aquí se utiliza que $\text{sech}\,R = \dfrac{1}{e^R + e^{-R}}$ tiende a cero (pues $e^R \to +\infty$ mientras que $e^{-R} \to 0$). ■

RECORDATORIO

$$\text{sech}\,t = \frac{1}{\cosh t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$$
$$1 - \text{sech}^2\,t = \tanh^2 t$$
$$\frac{d}{dt}\tanh t = \text{sech}^2\,t$$
$$\frac{d}{dt}\,\text{sech}\,t = -\,\text{sech}\,t\tanh t$$
$$\int \text{sech}\,t\tanh t\,dt = -\,\text{sech}\,t + C$$

12.2 RESUMEN

- *Longitud de arco* de $c(t) = (x(t), y(t))$ para $a \le t \le b$:

$$s = \text{longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

- La longitud de arco es la distancia a lo largo del camino $c(t)$. El *desplazamiento* es la distancia del punto inicial $c(a)$ al punto final $c(b)$.
- *Integral de la longitud de arco:*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}\, du$$

- Celeridad en el instante t:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

- Área de la superficie obtenida por rotación de $c(t) = (x(t), y(t))$ respecto al eje x para $a \le t \le b$:

$$S = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

12.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la definición de longitud de arco?

2. ¿Cuál es la interpretación de $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ para una partícula de trayectoria $(x(t), y(t))$?

3. Una partícula recorre un camino de $(0, 0)$ a $(3, 4)$. ¿A qué es igual el desplazamiento? ¿Se puede determinar la distancia recorrida en base a la información proporcionada?

4. Una partícula recorre la parábola $y = x^2$ a velocidad constante de 3 cm/s. ¿Cuál es la distancia recorrida durante el primer minuto? *Indicación:* no es necesario realizar ningún cálculo.

Problemas

En los problemas 1-10, use la ec. (3) para hallar la longitud del camino en el intervalo dado.

1. $(3t + 1, 9 - 4t)$, $0 \le t \le 2$

2. $(1 + 2t, 2 + 4t)$, $1 \le t \le 4$

3. $(2t^2, 3t^2 - 1)$, $0 \le t \le 4$

4. $(3t, 4t^{3/2})$, $0 \le t \le 1$

5. $(3t^2, 4t^3)$, $1 \le t \le 4$

6. $(t^3 + 1, t^2 - 3)$, $0 \le t \le 1$

7. $(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t)$, $0 \le t \le \pi$

8. $(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta, \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta)$, $0 \le \theta \le 2$

En los problemas 9 y 10, use, además, la identidad:

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$$

9. $(2\cos t - \cos 2t, 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

10. $(5(\theta - \operatorname{sen}\theta), 5(1 - \cos\theta))$, $0 \le \theta \le 2\pi$

11. Pruebe que la longitud de un arco de una cicloide generada por una circunferencia de radio R es igual a $8R$.

12. Halle la longitud de la espiral $c(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ con tres decimales de precisión (figura 7). *Indicación:* use la fórmula:

$$\int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{2} t\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$$

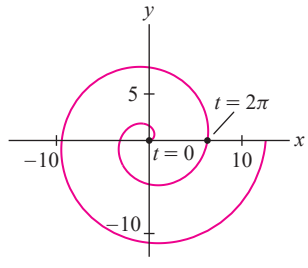


FIGURA 7 La espiral $c(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t)$.

13. Halle la longitud de la tractriz (vea la figura 6):

$$c(t) = (t - \tanh(t), \operatorname{sech}(t)), \qquad 0 \le t \le A$$

14. SAC Halle una aproximación numérica de la longitud de arco de $c(t) = (\cos 5t, \operatorname{sen} 3t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ (f gura 8).

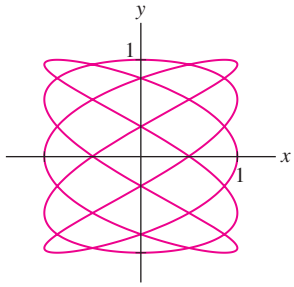


FIGURA 8

En los problemas 15-18, determine la celeridad s en el instante t (suponga unidades de metros y de segundos).

15. (t^3, t^2), $t = 2$

16. $(3 \operatorname{sen} 5t, 8 \cos 5t)$, $t = \frac{\pi}{4}$

17. $(5t + 1, 4t - 3)$, $t = 9$

18. $(\ln(t^2 + 1), t^3)$, $t = 1$

19. Halle la celeridad mínima de una partícula cuya trayectoria viene dada por $c(t) = (t^3 - 4t, t^2 + 1)$ para $t \ge 0$. *Indicación:* es más fácil hallar el mínimo del cuadrado de la celeridad.

20. Halle la celeridad mínima de una partícula cuya trayectoria viene dada por $c(t) = (t^3, t^{-2})$ para $t \ge 0{,}5$.

21. Halle la celeridad de la cicloide $c(t) = (4t - 4 \operatorname{sen} t, 4 - 4 \cos t)$ en aquellos puntos en que la recta tangente es horizontal.

22. Calcule la integral de la longitud de arco $s(t)$ para la *espiral logarítmica* $c(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$.

SAC *En los problemas 23-26, represente la curva y utilice la regla basada en el punto medio, con N = 10, 20, 30 y 50, para aproximar su longitud.*

23. $c(t) = (\cos t, e^{\operatorname{sen} t})$ para $0 \le t \le 2\pi$

24. $c(t) = (t - \operatorname{sen} 2t, 1 - \cos 2t)$ para $0 \le t \le 2\pi$

25. La elipse $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$

26. $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \operatorname{sen} 3t$ para $0 \le t \le 2\pi$

27. Si desenrolla un hilo de una bobina circular estacionaria, manteniendo el hilo tirante en todo momento, entonces el extremo describe una curva $\mathcal{C}$ denominada **involuta** de la circunferencia (f gura 9). Observe que la longitud de $\overline{PQ}$ es $R\theta$. Muestre que la curva $\mathcal{C}$ se puede parametrizar por:

$$c(\theta) = (R(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta), R(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta))$$

A continuación, halle la longitud de la involuta para $0 \le \theta \le 2\pi$.

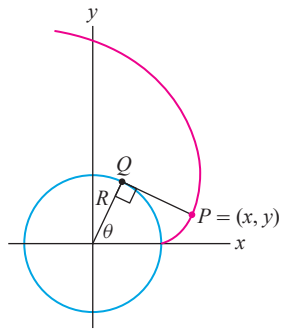


FIGURA 9 Involuta de una circunferencia.

28. Sea $a > b$ y considere:

$$k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Use una representación paramétrica para probar que la longitud de la elipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ es $L = 4aG(\frac{\pi}{2}, k)$, donde:

$$G(\theta, k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt$$

es la *integral elíptica de segunda especie*.

En los problemas 29-32, use la ec. (4) para calcular el área de la superf cie dada.

29. El cono generado por revolución de $c(t) = (t, mt)$ respecto al eje x para $0 \le t \le A$.

30. Una esfera de radio R.

31. La superf cie generada por revolución de un arco de la cicloide $c(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ respecto al eje x.

32. La superf cie generada por revolución del astroide

$c(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ respecto al eje x para $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Problemas avanzados

33. SAC Sea $b(t)$ la "curva mariposa":

$$x(t) = \operatorname{sen} t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{12}\right)^5\right)$$

$$y(t) = \cos t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{12}\right)^5\right)$$

(a) Use un programa informático de cálculo simbólico para representar gráf camente $b(t)$ y la celeridad $s'(t)$ para $0 \le t \le 12\pi$.

(b) Aproxime la longitud de $b(t)$ para $0 \le t \le 10\pi$.

34. SAC Sea $a \ge b > 0$ y sea $k = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a - b}$. Pruebe que la **trocoide**

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \qquad y = a - b\cos t, \qquad 0 \le t \le T$$

tiene una longitud de $2(a - b)G(\frac{T}{2}, k)$ con $G(\theta, k)$ como en el problema 28.

35. Un satélite que está en órbita a distancia R del centro de la Tierra describe una trayectoria circular dada por $x = R\cos\omega t$, $y = R \operatorname{sen}\omega t$.

(a) Pruebe que el periodo T (el tiempo necesario para una revolución) es $T = 2\pi/\omega$.

(b) Según las leyes del movimiento y de la gravedad de Newton:

$$x''(t) = -Gm_T \frac{x}{R^3} \qquad y''(t) = -Gm_T \frac{y}{R^3}$$

donde G es la constante de gravitación universal y m_e es la masa de la Tierra. Demuestre que $R^3/T^2 = Gm_T/4\pi^2$. Por tanto, R^3/T^2 es igual para todas las órbitas (un caso particular de la tercera ley de Kepler).

36. La aceleración debida a la gravedad sobre la superf cie de la Tierra es:

$$g = \frac{Gm_T}{R_T^2} = 9{,}8 \text{ m/s}^2, \quad \text{donde } R_T = 6378 \text{ km}$$

Use el problema 35(b) para probar que un satélite en órbita sobre la superf cie de la Tierra tendría periodo igual a $T_T = 2\pi\sqrt{R_T/g} \approx 84{,}5$ min. A continuación, estime la distancia R_m desde la Luna al centro de la Tierra. Suponga que el periodo de la Luna (mes sideral) es $T_L \approx 27{,}43$ días.

12.3 Coordenadas polares

Las coordenadas polares son adecuadas cuando la distancia al origen o un ángulo desempeña un papel destacado. Por ejemplo, la fuerza gravitacional que el Sol ejerce sobre un planeta depende únicamente de la distancia r al Sol y se describe de manera apropiada mediante coordenadas polares.

En coordenadas polares, se etiqueta un punto P mediante las coordenadas (r, θ), donde r es la distancia al origen O y θ es el ángulo entre $\overline{OP}$ y el eje de las x positivas (f gura 1). Por convenio, un ángulo es positivo si la correspondiente rotación es en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Se dice que r es la **coordenada radial** y que θ es la **coordenada angular**.

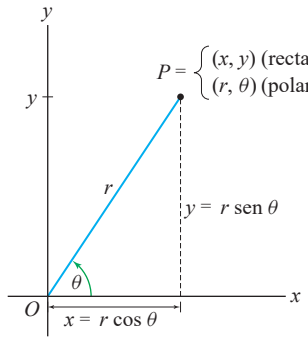


FIGURA 1

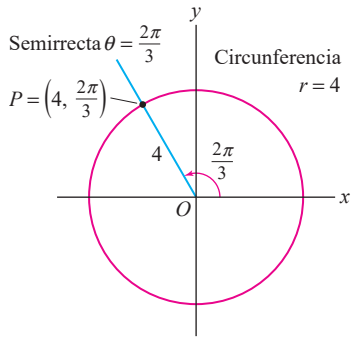


FIGURA 2

El punto P de la f gura 2 tiene coordenadas polares $(r, \theta) = (4, \frac{2\pi}{3})$. Está a distancia $r = 4$ del origen (por lo que se encuentra en la circunferencia de radio 4) y en la semirrecta de ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

La f gura 3 muestra las dos familias de **líneas de cuadrícula** en coordenadas polares:

$$\text{Circunferencia centrada en } O \iff r = \text{constante}$$
$$\text{Semirrecta de origen } O \iff \theta = \text{constante}$$

Todo punto del plano, excepto el origen, se encuentra en la intersección de dos líneas de cuadrícula y estas dos líneas determinan sus coordenadas polares. Por ejemplo, el punto Q de la f gura 3 se encuentra sobre la circunferencia $r = 3$ y la semirrecta $\theta = \frac{5\pi}{6}$, por lo que $Q = (3, \frac{5\pi}{6})$ en coordenadas polares.

La f gura 1 muestra que las coordenadas polares y rectangulares están relacionadas por medio de las ecuaciones $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Por otra parte, $r^2 = x^2 + y^2$, por la fórmula de la distancia, y $\tan\theta = y/x$ si $x \neq 0$. De esta manera se obtienen las fórmulas de conversión:

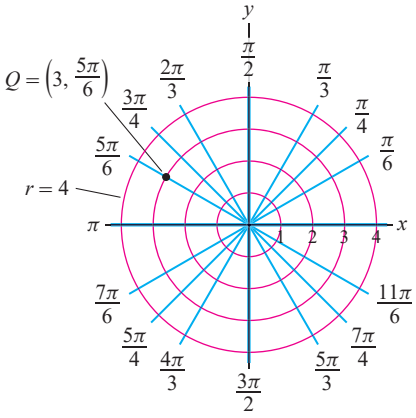


FIGURA 3 Las líneas de cuadrícula en coordenadas polares.

Polares a rectangulares	Rectangulares a polares
$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\,\text{sen}\,\theta$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

EJEMPLO 1 De coordenadas polares a rectangulares Halle las coordenadas rectangulares del punto Q de la figura 3.

Solución Las coordenadas rectangulares del punto $Q = (r, \theta) = (3, \frac{5\pi}{6})$ son:

$$x = r\cos\theta = 3\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 3\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

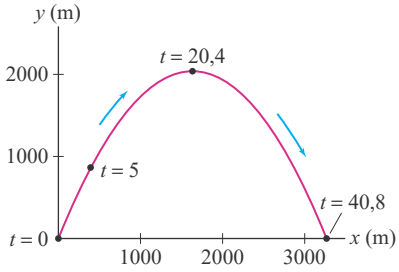


FIGURA 4 Las coordenadas polares de P cumplen $r = \sqrt{3^2 + 2^2}$ y $\tan\theta = \frac{2}{3}$.

EJEMPLO 2 De coordenadas rectangulares a polares Halle las coordenadas polares del punto P de la figura 4.

Como $P = (x, y) = (3, 2)$, tendremos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

y, ya que P se encuentra en el primer cuadrante:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 0{,}588$$

las coordenadas polares de P son $(r, \theta) \approx (3{,}6, 0{,}588)$.

Antes de continuar, se deben realizar algunas observaciones:

- La coordenada angular no es única pues (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi n)$ *etiquetan al mismo punto* para cualquier entero n. Por ejemplo, la coordenada radial del punto P en la figura 5 es $r = 2$, pero su coordenada angular podría ser cualquiera de los ángulos $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ o bien $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$.
- El origen O no tiene una coordenada angular bien definida, por lo que se asigna al origen O las coordenadas polares $(0, \theta)$ para cualquier ángulo θ.
- Por convenio, se permiten coordenadas radiales *negativas*. Por definición, $(-r, \theta)$ es la reflexión de (r, θ) respecto al origen (figura 6). Con este convenio, $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto.
- Se pueden especificar coordenadas polares únicas para todo punto diferente del origen, imponiendo restricciones sobre r y sobre θ. Habitualmente se suele exigir que $r > 0$ y que $0 \le \theta < 2\pi$.

Por definición,

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

Si $r > 0$, una coordenada θ de $P = (x, y)$ es

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

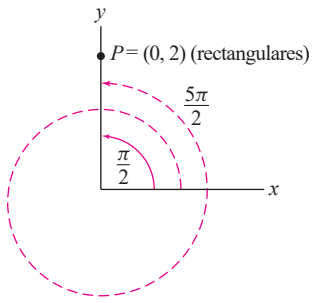


FIGURA 5 La coordenada angular de $P = (0, 2)$ es $\frac{\pi}{2}$ o cualquier ángulo $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, para n entero.

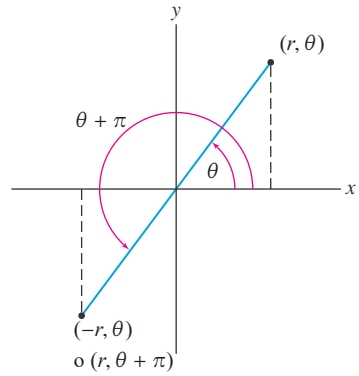


FIGURA 6 Relación entre (r, θ) y $(-r, \theta)$.

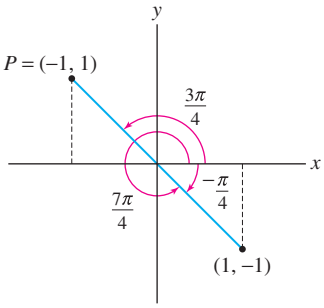


FIGURA 7

Para determinar la coordenada angular de un punto $P = (x, y)$, recuerde que hay dos ángulos entre 0 y 2π que cumplen $\tan\theta = y/x$. Debe elegir θ de manera que (r, θ) se encuentre en el cuadrante al que pertenece P y en el cuadrante opuesto (f gura 7).

EJEMPLO 3 Elección correcta de θ Halle dos representaciones polares de $P =$ $= (-1, 1)$, una con $r > 0$ y una con $r < 0$.

Solución El punto $P = (x, y) = (-1, 1)$ tiene coordenadas polares (r, θ), donde:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \tan\theta = \tan\frac{y}{x} = -1$$

Sin embargo, θ no viene dado por:

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

porque $\theta = -\frac{\pi}{4}$ y esta elección situaría a P en el cuarto cuadrante (f gura 7). Como P está en el segundo cuadrante, el ángulo correcto es:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

Si se quisiera utilizar la coordenada radial negativa $r = -\sqrt{2}$, entonces el ángulo sería $\theta = -\frac{\pi}{4}$ or $\frac{7\pi}{4}$. Por tanto:

$$P = \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \qquad \text{o} \qquad \left(-\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

Una curva queda descrita en coordenadas polares mediante una ecuación que involucra r y θ, denominada **ecuación polar**. Por convenio, se permiten soluciones con $r < 0$.

Una recta que pasa por el origen O tiene como ecuación $\theta = \theta_0$, donde θ_0 es el ángulo entre la recta y el eje x (f gura 8). De hecho, los puntos en que $\theta = \theta_0$ son (r, θ_0), donde r es arbitrario (positivo, negativo o cero).

EJEMPLO 4 Recta que pasa por el origen Halle la ecuación polar de la recta que pasa por el origen y que tiene pendiente $\frac{3}{2}$ (f gura 9).

Solución Una recta de pendiente m tiene un ángulo θ_0 con el eje x, donde $m = \tan\theta_0$. En nuestra situación, $\theta_0 = \tan^{-1}\frac{3}{2} \approx 0{,}98$. La ecuación de la recta es $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{2}$ o $\theta \approx 0{,}98$.

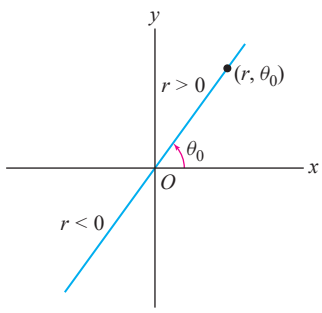


FIGURA 8 Rectas por O de ecuación polar $\theta = \theta_0$.

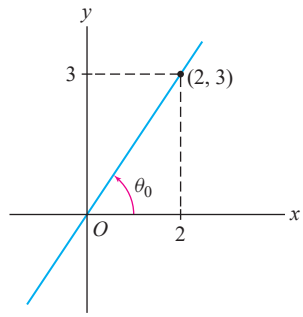


FIGURA 9 Recta de pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el origen.

Para describir rectas que no pasan por el origen, cabe observar que cualquiera de estas rectas tiene un punto P_0 que es el *más cercano* al origen. El siguiente ejemplo ilustra cómo expresar la ecuación polar de la recta en términos de P_0 (f gura 10).

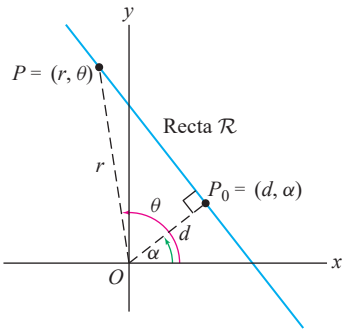


FIGURA 10 P_0 es el punto de $\mathcal{R}$ más cercano al origen.

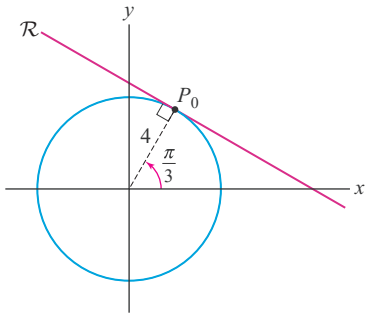


FIGURA 11 La ecuación de la recta tangente es $r = 4\sec\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

EJEMPLO 5 Recta que no pasa por *O* Pruebe que:

$$r = d\sec(\theta - \alpha) \qquad \boxed{1}$$

es la ecuación polar de la recta $\mathcal{R}$ cuyo punto más cercano al origen es $P_0 = (d, \alpha)$.

Solución El punto P_0 de obtiene trazando una recta perpendicular a $\mathcal{R}$ que pase por el origen (f gura 10) y, si $P = (r, \theta)$ es un punto cualquiera de $\mathcal{R}$ diferente de P_0, entonces $\triangle OPP_0$ es un triángulo rectángulo. Por tanto, $d/r = \cos(\theta - \alpha)$ o $r = d\sec(\theta - \alpha)$, tal y como se quería demostrar. ■

EJEMPLO 6 Halle la ecuación polar de la recta $\mathcal{R}$ tangente a la circunferencia $r = 4$ en el punto de coordenadas polares $P_0 = (4, \frac{\pi}{3})$.

Solución El punto de $\mathcal{R}$ más cercano al origen es el propio P_0 (f gura 11). Por tanto, considere $(d, \alpha) = (4, \frac{\pi}{3})$ en la ec. (1) para obtener la ecuación $r = 4\sec(\theta - \frac{\pi}{3})$. ■

A menudo, resulta complicado imaginar la forma de la gráf ca de una ecuación polar. En algunos casos ayuda reescribir la ecuación en coordenadas rectangulares.

EJEMPLO 7 Convirtiendo a coordenadas rectangulares Identif que la curva de ecuación polar $r = 2a\cos\theta$ (a es constante).

Solución Multiplique la ecuación por r, con el resultado $r^2 = 2ar\cos\theta$. Como $r^2 = x^2 + y^2$ y $x = r\cos\theta$, esta ecuación resulta:

$$x^2 + y^2 = 2ax \qquad \text{o} \qquad x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

Ahora complete el cuadrado para obtener $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Se trata de la ecuación de una circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a (f gura 12). ■

Un cálculo análogo muestra que la circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ de centro $(0, a)$ y radio a tiene como ecuación polar $r = 2a\,\text{sen}\,\theta$. En el siguiente ejemplo, se aplicarán argumentos involucrando simetrías. Observe que los puntos (r, θ) y $(r, -\theta)$ son simétricos respecto al eje x (f gura 13).

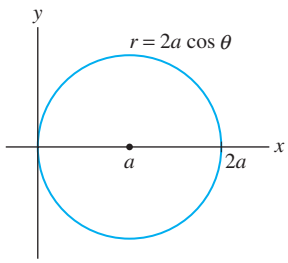


FIGURA 12

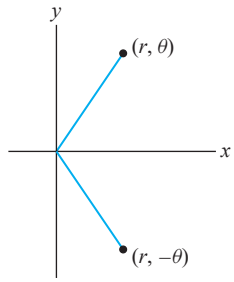


FIGURA 13 Los puntos (r, θ) y $(r, -\theta)$ son simétricos respecto al eje x .

EJEMPLO 8 Simetría respecto al eje *x* Dibuje el *caracol de Pascal*, curva dada por $r = 2\cos\theta - 1$.

Solución Como $\cos\theta$ es periódico, basta representar puntos para $-\pi \le \theta \le \pi$.

Etapa 1. **Represente puntos**

Para empezar, represente los puntos A-G en una cuadrícula y únalos mediante una curva suave (f gura 14).

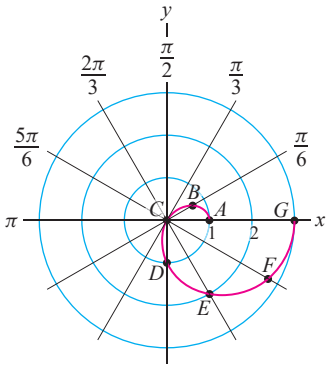


FIGURA 14 Representación de $r = 2\cos\theta - 1$ usando una cuadrícula.

	A	B	C	D	E	F	G
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r = 2\cos\theta - 1$	1	0,73	0	−1	−2	−2,73	−3

Etapa 2. **Analice r como una función de θ**

Para entender mejor el problema, suele ayudar representar r como función de θ en coordenadas rectangulares. La f gura 15(A) muestra que:

Cuando θ varía de 0 a $\frac{\pi}{3}$, r varía de 1 a 0.

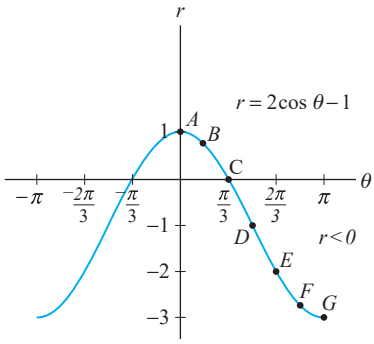
Cuando θ varía de $\frac{\pi}{3}$ a π, r es *negativo* y varía de 0 a −3.

En consecuencia:

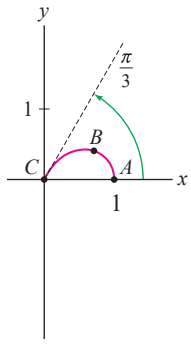
- La gráf ca empieza en el punto A en la f gura 15(B) y se mueve hacia en origen cuando θ varía de 0 a $\frac{\pi}{3}$.
- Como r es negativo para $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \pi$, la curva continúa en el tercer y cuarto cuadrantes (en lugar de en el primero y segundo), yendo hacia el punto $G = (-3, \pi)$ de la f gura 15(C).

Etapa 3. **Use simetría**

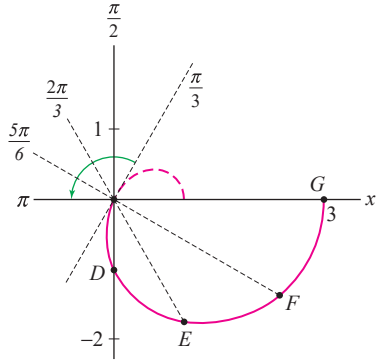
Como $r(\theta) = r(-\theta)$, la curva es simétrica respecto al eje x. Por tanto, la parte de la curva correspondiente a $-\pi \le \theta \le 0$ se obtiene por ref exión respecto al eje x, como se muestra en la f gura 15(D). ■



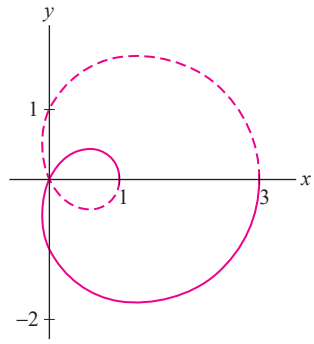
(A) Variación de r como función de θ



(B) θ varía de 0 a $\pi/3$, r varía de 1 a 0.



(C) θ varía de $\pi/3$ a π pero r es negativa y varia de 0 -3.



(D) El caracol de Pascal completo

FIGURA 15 La curva $r = 2\cos\theta - 1$ fue descrita por primera vez en 1525 por el artista alemán Albrecht Dürer.

12.3 RESUMEN

- Las coordenadas polares de un punto $P = (x, y)$ son (r, θ), donde r es la distancia al origen y θ es el ángulo entre el eje de las x positivas y el segmento $\overline{OP}$, medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

$$x = r\cos\theta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

- La coordenada angular θ debe ser seleccionada de manera que (r, θ) se encuentre en el cuadrante apropiado. Si $r > 0$, entonces:

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- No unicidad: (r, θ) y $(r, \theta + 2n\pi)$ representan el mismo punto, para cualquier entero n. Las coordenadas polares del origen O son $(0, \theta)$, para cualquier θ.
- Coordenadas radiales negativas: $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto.
- Ecuaciones polares:

Curva	Ecuación polar
Circunferencia de centro el origen y radio R	$r = R$
Recta por el origen de pendiente $m = \tan\theta_0$	$\theta = \theta_0$
Recta en que $P_0 = (d, \alpha)$ es el punto más cercano al origen	$r = d\sec(\theta - \alpha)$
Circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a, $(x-a)^2 + y^2 = a^2$	$r = 2a\cos\theta$
Circunferencia de centro $(0, a)$ y radio a, $x^2 + (y-a)^2 = a^2$	$r = 2a\,\text{sen}\,\theta$

12.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Dos puntos P y Q que tengan la misma coordenada radial (elija la respuesta correcta):

(a) se encuentran en la misma circunferencia centrada en el origen.

(b) se encuentran en la misma semirrecta de extremo el origen.

2. Proporcione dos representaciones polares del punto $(x, y) = (0, 1)$, una en la que r sea negativa y otra en la que r sea positiva.

3. Describa cada una de las siguientes curvas:

(a) $r = 2$ **(b)** $r^2 = 2$ **(c)** $r\cos\theta = 2$

4. Si $f(-\theta) = f(\theta)$, entonces la curva $r = f(\theta)$ es simétrica respecto a (elija la respuesta correcta):

(a) eje x **(b)** eje y **(c)** origen

Problemas

1. Halle coordenadas polares para cada uno de los siete puntos que se han representado en la f gura 16.

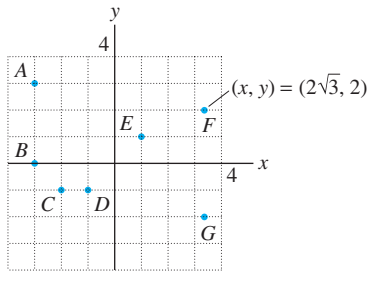


FIGURA 16

2. Represente los puntos de coordenadas polares:

(a) $(2, \frac{\pi}{6})$ **(b)** $(4, \frac{3\pi}{4})$ **(c)** $(3, -\frac{\pi}{2})$ **(d)** $(0, \frac{\pi}{6})$

3. Convierta de coordenadas rectangulares a polares.

(a) $(1, 0)$ **(b)** $(3, \sqrt{3})$ **(c)** $(-2, 2)$ **(d)** $(-1, \sqrt{3})$

4. Convierta de coordenadas rectangulares a polares utilizando una calculadora (asegúrese de que su elección de θ da lugar al cuadrante correcto).

(a) $(2, 3)$ **(b)** $(4, -7)$ **(c)** $(-3, -8)$ **(d)** $(-5, 2)$

5. Convierta de coordenadas polares a rectangulares:

(a) $(3, \frac{\pi}{6})$ **(b)** $(6, \frac{3\pi}{4})$ **(c)** $(0, \frac{\pi}{5})$ **(d)** $(5, -\frac{\pi}{2})$

6. ¿Cuál de las siguientes son unas posibles coordenadas polares para el punto P, cuyas coordenadas rectangulares son $(0, -2)$?

(a) $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\left(2, \frac{7\pi}{2}\right)$

(c) $\left(-2, -\frac{3\pi}{2}\right)$ **(d)** $\left(-2, \frac{7\pi}{2}\right)$

(e) $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$ **(f)** $\left(2, -\frac{7\pi}{2}\right)$

7. Describa cada sector sombreado de la f gura 17 mediante desigualdades en r y θ.

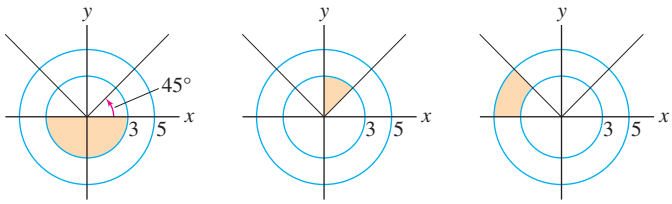


FIGURA 17

8. Halle la ecuación en coordenadas polares de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

9. ¿Cuál es la pendiente de la recta $\theta = \frac{3\pi}{5}$?

10. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones $r = 2 \sec\theta$ y $r = 2 \csc\theta$ def ne una recta horizontal?

En los problemas 11-16, convierta a una ecuación en coordenadas rectangulares.

11. $r = 7$ **12.** $r = \operatorname{sen}\theta$

13. $r = 2 \operatorname{sen}\theta$ **14.** $r = 2 \csc\theta$

15. $r = \dfrac{1}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$ **16.** $r = \dfrac{1}{2 - \cos\theta}$

En los problemas 17-20, convierta a una ecuación en coordenadas rectangulares.

17. $x^2 + y^2 = 5$ **18.** $x = 5$

19. $y = x^2$ **20.** $xy = 1$

21. Relacione cada ecuación con su descripción.

(a) $r = 2$ **(i)** Línea vertical

(b) $\theta = 2$ **(ii)** Línea horizontal

(c) $r = 2 \sec\theta$ **(iii)** Circunferencia

(d) $r = 2 \csc\theta$ **(iv)** Recta que pasa por origen

22. Halle los valores de θ en la gráf ca de $r = 4 \cos\theta$ correspondientes a los puntos A, B, C, D de la f gura 18. A continuación, indique la porción de la gráf ca descrita cuando θ varía en los siguientes intervalos:

(a) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ **(b)** $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ **(c)** $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

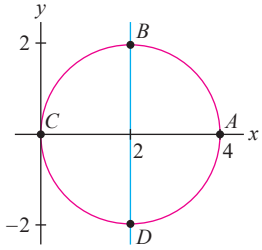


FIGURA 18 Representación gráf ca de $r = 4 \cos\theta$.

23. Suponga que las coordenadas polares de $P = (x, y)$ son (r, θ). Halle las coordenadas polares para los puntos:

(a) $(x, -y)$ **(b)** $(-x, -y)$ **(c)** $(-x, y)$ **(d)** (y, x)

24. Relacione cada ecuación en coordenadas rectangulares con su ecuación en coordenadas polares.

(a) $x^2 + y^2 = 4$ **(i)** $r^2(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = 4$

(b) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ **(ii)** $r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) = 4$

(c) $x^2 - y^2 = 4$ **(iii)** $r = 2 \operatorname{sen}\theta$

(d) $x + y = 4$ **(iv)** $r = 2$

25. ¿Cuáles son las ecuaciones polares de las rectas paralelas a la recta $r\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 1$?

26. Pruebe que la circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de la f gura 19 tiene ecuación polar $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$ y halle los valores de θ entre 0 y π correspondientes a los puntos A, B, C, y D.

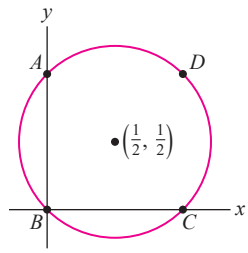


FIGURA 19 Representación gráf ca de $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

27. Dibuje la curva $r = \frac{1}{2}\theta$ (la espiral de Arquímedes) para θ entre 0 y 2π representando los puntos correspondientes a $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \ldots, 2\pi$.

28. Dibuje la curva $r = 3\cos\theta - 1$ (vea el ejemplo 8).

29. Dibuje la curva cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

30. Muestre que la cardioide del problema 29 tiene ecuación:

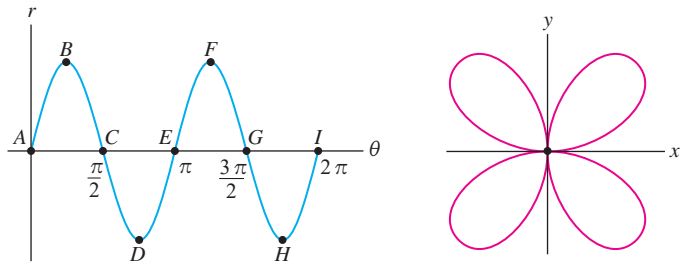
$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$$

en coordenadas rectangulares.

31. La f gura 20 muestra las gráf cas de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ en coordenadas rectangulares y en polares, donde se trata de una "rosa con cuatro pétalos." Identif que:

(a) Los puntos en (B) que corresponden a los puntos A-I en (A).

(b) Las partes de la curva en (B) que corresponden a los ángulos en los intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ y $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.



(A) Gráfica de r como una función de θ, donde $r = \operatorname{sen} 2\theta$

(B) Gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ en coordenas polares.

FIGURA 20

32. Dibuje la curva $r = \operatorname{sen} 3\theta$. En primer lugar, obtenga los valores de r para la tabla que se encuentra a continuación y represente los correspondientes puntos de la curva. Observe que los tres pétalos de la curva corresponden a los ángulos en los intervalos $[0, \frac{\pi}{3}]$, $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ y $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Después represente $r = \operatorname{sen} 3\theta$ en coordenadas rectangulares y etiquete los puntos en esta gráfica correspondientes a los (r, θ) de la tabla.

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{11\pi}{12}$	π
r									

33. SAC Represente gráficamente la **cisoide** $r = 2 \operatorname{sen}\theta \tan\theta$ y pruebe que su ecuación en coordenadas rectangulares es

$$y^2 = \frac{x^3}{2 - x}$$

34. Demuestre que $r = 2a\cos\theta$ es la ecuación de la circunferencia de la figura 21 usando únicamente el hecho que un triángulo inscrito en una circunferencia, de manera que un lado de éste sea igual al diámetro de la circunferencia, es un triángulo rectángulo.

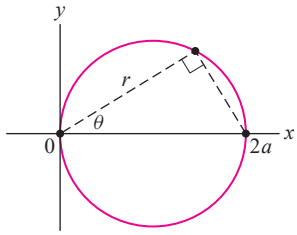


FIGURA 21

35. Pruebe que:

$$r = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$$

es la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen. Exprese el radio y el centro (en coordenadas rectangulares) en términos de a y de b.

36. Use el problema previo para expresar la ecuación de una circunferencia de centro $(3, 4)$ y radio 5 de la forma $r = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$.

37. Use la identidad $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ para hallar una ecuación polar de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

38. Halle una ecuación en coordenadas polares para la curva $r^2 = \cos 2\theta$.

39. Pruebe que $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$ y use esta identidad para hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la curva $r = \cos 3\theta$.

40. Use la fórmula de adición para el coseno para probar que la recta $\mathcal{R}$ de ecuación polar $r\cos(\theta - \alpha) = d$ tiene ecuación en coordenadas rectangulares $(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)y = d$. Pruebe que la pendiente de $\mathcal{R}$ es $m = -\cot\alpha$ y la ordenada en el origen es $d/\operatorname{sen}\alpha$.

En los problemas 41-44, halle una ecuación en coordenadas polares de la recta $\mathcal{R}$ a la que se hace referencia.

41. El punto de $\mathcal{R}$ que se encuentra más cercano al origen tiene coordenadas polares $(2, \frac{\pi}{9})$.

42. El punto de $\mathcal{R}$ que se encuentra más cercano al origen, tiene coordenadas rectangulares $(-2, 2)$.

43. $\mathcal{R}$ es tangente a la circunferencia $r = 2\sqrt{10}$ en el punto de coordenadas rectangulares $(-2, -6)$.

44. La pendiente de $\mathcal{R}$ es 3 y es tangente a la circunferencia unidad en el cuarto cuadrante.

45. Pruebe que cualquier recta que no pase por el origen tiene ecuación polar de la forma:

$$r = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta - a\cos\theta}$$

donde $b \neq 0$.

46. Según el teorema del coseno, la distancia d entre dos puntos (figura 22) de coordenadas polares (r, θ) y (r_0, θ_0) es:

$$d^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)$$

Use esta fórmula de la distancia para probar que:

$$r^2 - 10r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 56$$

es la ecuación de la circunferencia de radio 9 y centro (en coordenadas polares) $(5, \frac{\pi}{4})$.

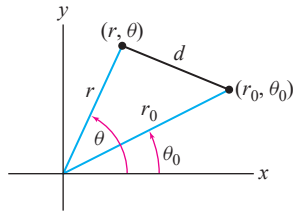


FIGURA 22

47. Para $a > 0$, una **curva lemniscata** es el conjunto de puntos P tales que el producto de las distancias de P a $(a, 0)$ y a $(-a, 0)$ es a^2. Pruebe que la ecuación de la lemniscata es:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

A continuación, halle la ecuación de la lemniscata en coordenadas polares. Para obtener la ecuación en su forma más simple, use la identidad $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$. Represente la lemniscata para $a = 2$, si dispone de un programa informático de cálculo simbólico.

48. Sea c una constante fijada. Explique la relación entre las gráficas de:

(a) $y = f(x + c)$ e $y = f(x)$ (rectangulares)

(b) $r = f(\theta + c)$ y $r = f(\theta)$ (polares)

(c) $y = f(x) + c$ e $y = f(x)$ (rectangulares)

(d) $r = f(\theta) + c$ y $r = f(\theta)$ (polares)

49. La derivada en coordenadas polares Muestre que una curva polar $r = f(\theta)$, tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

A continuación, aplique el teorema 2 de la sección 12.1 para demostrar que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta}{-f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta} \qquad \boxed{2}$$

donde $f'(\theta) = df/d\theta$.

50. Use la ec. (2) para hallar la pendiente de la recta tangente a $r = \operatorname{sen}\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{3}$.

51. Use la ec. (2) para hallar la pendiente de la recta tangente a $r = \theta$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y en $\theta = \pi$.

52. Halle la ecuación en coordenadas rectangulares de la recta tangente a $r = 4\cos 3\theta$ en $\theta = \frac{\pi}{6}$.

53. Halle las coordenadas polares de los puntos de la lemniscata $r^2 = \cos 2t$ de la f gura 23 en los que la recta tangente sea horizontal.

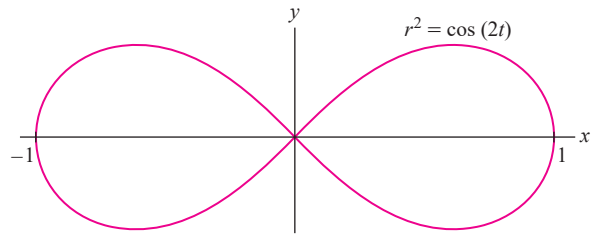


FIGURA 23

54. Halle las coordenadas polares de los puntos de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ en que la recta tangente sea horizontal (vea la f gura 24).

55. Use la ec. (2) para probar que para $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, se verif ca:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta - \operatorname{sen} 2\theta}$$

A continuación, calcule las pendientes de las rectas tangentes a los puntos A, B, C de la f gura 19.

Problemas avanzados

56. Sea $f(x)$ una función periódica de periodo 2π, es decir $f(x) = f(x + 2\pi)$. Explique de qué manera se ref eja esta periodicidad en la gráf ca de:

(a) $y = f(x)$ en coordenadas rectangulares

(b) $r = f(\theta)$ en coordenadas polares

57. GU Utilice un programa informático de representación gráf ca para convencerse de que las ecuaciones polares $r = f_1(\theta) = 2\cos\theta - 1$ y $r = f_2(\theta) = 2\cos\theta + 1$ tienen la misma gráf ca. A continuación explique la razón. *Indicación:* muestre que los puntos $(f_1(\theta + \pi), \theta + \pi)$ y $(f_2(\theta), \theta)$ coinciden.

58. SAC En este problema se va a analizar cómo la forma del caracol de Pascal $r = b + \cos\theta$ depende de la constante b (vea la f gura 24).

(a) Siga los pasos del problema 57 para mostrar que las constantes b y $-b$ dan lugar a la misma curva.

(b) Represente el caracol de Pascal para $b = 0, 0{,}2, 0{,}5, 0{,}8, 1$ y describa el cambio que observa en la forma de las curvas.

(c) Represente el caracol de Pascal para $1{,}2, 1{,}5, 1{,}8, 2, 2{,}4$ y describa el cambio que observa en la forma de las curvas.

(d) Use la ec. (2) para demostrar que:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{b\cos\theta + \cos 2\theta}{b + 2\cos\theta}\right)\csc\theta$$

(d) Halle los puntos en los que la recta tangente sea vertical. Observe que hay tres casos: $0 \le b < 2$, $b = 1$ y $b > 2$. ¿Ref ejan estos resultados los gráf cos que ha obtenido en (b) y (c)?

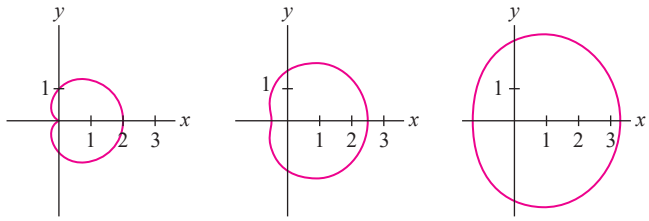
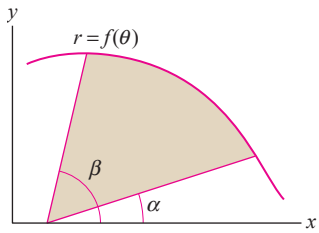


FIGURA 24

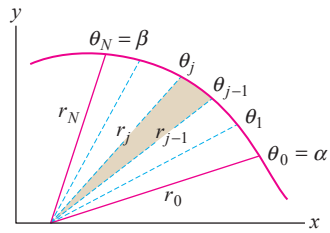
12.4 El área y la longitud de arco en coordenadas polares

La integración en coordenadas polares no tiene como objetivo hallar el área *por debajo* de una curva sino el área de un sector limitado por una curva, tal y como se muestra en la f gura 1(A). Considere la región limitada por la curva $r = f(\theta)$ y las dos semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ con $\alpha < \beta$. Para deducir una fórmula para el área, divida la región en N sectores estrechos de ángulo $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/N$ correspondientes a una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$:

$$\theta_0 = \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_N = \beta$$



(A) Región $\alpha \le \theta \le \beta$



(B) Región dividida en estrechos sectores

FIGURA 1 Área limitada por la curva $r = f(\theta)$ y las dos semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$.

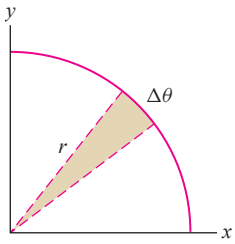


FIGURA 2 El área de un sector circular es *exactamente* $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$.

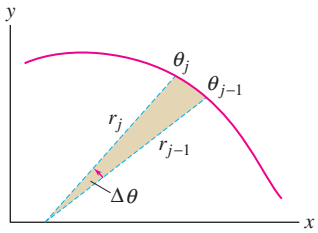


FIGURA 3 El área del sector j-ésimo es *aproximadamente* $\frac{1}{2}r_j^2\Delta\theta$.

Recuerde que el área de un sector circular de ángulo $\Delta\theta$ y radio r es $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ (f gura 2). Si $\Delta\theta$ es pequeño, el sector j-ésimo (f gura 3) es prácticamente un sector circular de radio $r_j = f(\theta_j)$, por lo que su área es *aproximadamente* $\frac{1}{2}r_j^2\Delta\theta$. El área total se puede aproximar por la suma:

$$\text{Área de la región} \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} r_j^2 \Delta\theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} f(\theta_j)^2 \Delta\theta \qquad \boxed{1}$$

Se trata de una suma de Riemann para la integral $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\, d\theta$. Si $f(\theta)$ es continua, entonces la suma tiende a la integral cuando $N \to +\infty$ y se obtiene la siguiente fórmula.

TEOREMA 1 Área en coordenadas polares Si $f(\theta)$ es una función continua, entonces el área limitada por una curva en forma polar $r = f(\theta)$ y las semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (con $\alpha < \beta$) es igual a:

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\, d\theta \qquad \boxed{2}$$

Tal y como se ha visto, $r = R$ def ne una circunferencia de radio R. Según la ec. (2), el área del círculo que delimita es igual a $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\, d\theta = \frac{1}{2}R^2(2\pi) = \pi R^2$, como cabía esperar.

EJEMPLO 1 Aplique el teorema 1 para calcular el área limitada por la semicircunferencia derecha de ecuación $r = 4 \operatorname{sen}\theta$.

Solución La ecuación $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ def ne una semicircunferencia de radio 2 tangente al eje x en el origen. La región limitada por la semicircunferencia derecha queda "barrida" cuando θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$, como en la f gura 4(A). Según la ec. (2), el área de esta región es:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (4\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \qquad \boxed{4}$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\, d\theta =$$

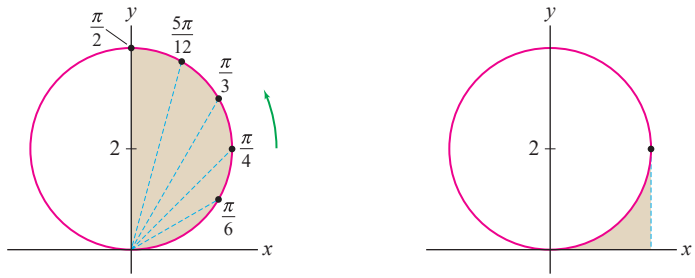
$$= (4\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = 2\pi$$

■

◄··· **RECORDATORIO** *En la ec. (4), se utiliza la identidad:*

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \qquad \boxed{3}$$

ATENCIÓN *Recuerde que con la integral* $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$ ***no*** *se calcula* ***por debajo*** *de una curva, como en la figura 4(B), sino que se calcula el área "barrida" por un segmento radial cuando* θ *va de* α *a* β*, como en la figura 4(A).*



(A) La integral polar calcula el área barrida por un segmento radial.

(B) La integral ordinaria en coordenadas rectangulares calcula el área por debajo de una curva.

FIGURA 4

EJEMPLO 2 Dibuje $r = \operatorname{sen} 3\theta$ y calcule el área de un "pétalo."

Solución Para dibujar la curva, represente en primer lugar $r = \operatorname{sen} 3\theta$ en coordenadas rectangulares. En la f gura 5 se muestra que el radio r va de 0 a 1 y que vuelve hacia 0 cuando θ varía de 0 a $\frac{\pi}{3}$. Así se obtiene el pétalo A de la f gura 6. El pétalo B se describe cuando θ va de $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{2\pi}{3}$ (con $r \le 0$) y el pétalo C se dibuja para $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$. Se obtiene que el área del pétalo A (usando la ec. (3) que se encuentra en el margen de la página previa para evaluar la integral) es igual a:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (\operatorname{sen} 3\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \left(\frac{1-\cos 6\theta}{2}\right) d\theta = \left(\frac{1}{4}\theta - \frac{1}{24}\operatorname{sen} 6\theta\right)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}$$

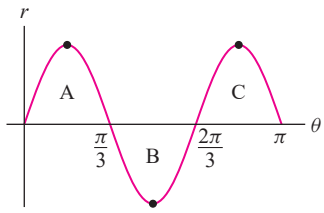


FIGURA 5 Gráf ca de $r = \operatorname{sen} 3\theta$ como función de θ.

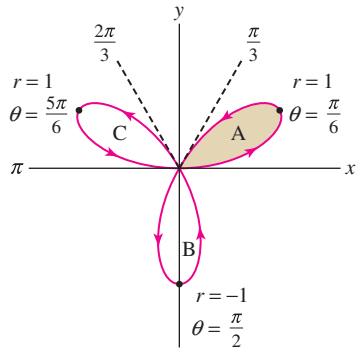


FIGURA 6 Gráf ca de la curva polar $r = \operatorname{sen} 3\theta$, una "rosa con tres pétalos".

El área entre dos curvas polares $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ con $f_2(\theta) \ge f_1(\theta)$, para $\alpha \le \theta \le \beta$, es igual a (f gura 7):

$$\text{Área entre dos curvas} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f_2(\theta)^2 - f_1(\theta)^2)\,d\theta \qquad \boxed{5}$$

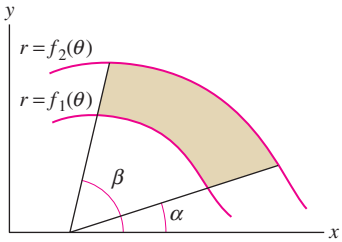
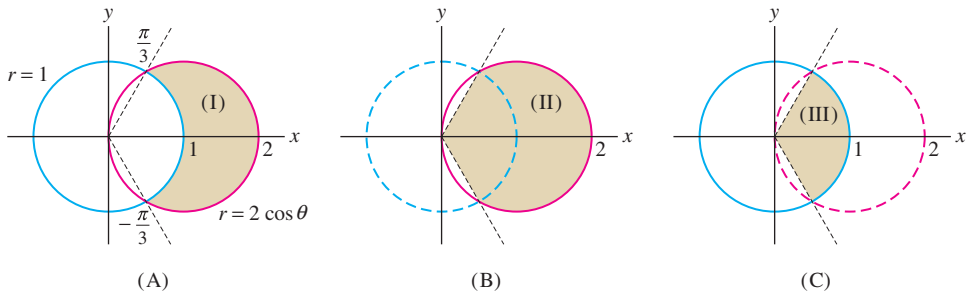


FIGURA 7 Área entre dos curvas polares en un sector.

EJEMPLO 3 **Área entre dos curvas** Halle el área de la región dentro de la circunferencia $r = 2\cos\theta$ pero fuera de la circunferencia $r = 1$ [f gura 8(A)].

Solución Las dos circunferencias se cortan en los puntos $(r, 2\cos\theta) = (r, 1)$ o, dicho de otro modo , cuando $2\cos\theta = 1$. Así $\cos\theta = \frac{1}{2}$, que tiene como solución $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.



(A) (B) (C)

FIGURA 8 La región (I) es la diferencia entre las regiones (II) y (III).

En la f gura 8 se observa que la región (I) es la diferencia entre las regiones (II) y (III) de las f guras 8(B) y (C). Por tanto:

$$\text{Área de (I)} = \text{área de (II)} - \text{área de (III)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(2\cos\theta)^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1)^2\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(4\cos^2\theta - 1)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(2\cos 2\theta + 1)\,d\theta = \quad \boxed{6}$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2\theta + \theta)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \approx 1{,}91 \quad \blacksquare$$

◄··· **RECORDATORIO** *En la ec. (6), se utiliza la identidad:*

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

Se f naliza esta sección deduciendo una fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares. Observe que una curva polar $r = f(\theta)$ admite una parametrización con θ como parámetro dada por:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Utilizando la prima para denotar la derivación respecto a θ, se obtiene:

$$x'(\theta) = \frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta$$

$$y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Recuerde, de la sección 12.2, que la longitud de arco se obtiene integrando $\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}$. Mediante manipulaciones algebraicas elementales resulta que $x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2$ y, por tanto:

$$\text{Longitud de arco } s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,d\theta \qquad \boxed{7}$$

■ **EJEMPLO 4** Halle la longitud total de la circunferencia $r = 2a\cos\theta$ para $a > 0$.

Solución En esta situación, $f(\theta) = 2a\cos\theta$ y se tiene:

$$f(\theta)^2 + f'(\theta)^2 = 4a^2\cos^2\theta + 4a^2\operatorname{sen}^2\theta = 4a^2$$

La longitud total de esta circunferencia de radio a es el valor que cabía esperar:

$$\int_0^\pi \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,d\theta = \int_0^\pi (2a)\,d\theta = 2\pi a$$

Observe que el límite superior de integración es π y no 2π, porque la circunferencia completa se genera cuando θ va de 0 a π (vea la f gura 9). ■

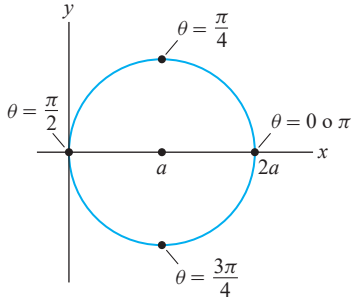


FIGURA 9 Gráf ca de $r = 2a\cos\theta$.

12.4 RESUMEN

- Área del sector limitado por una curva polar $r = f(\theta)$ y dos semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ (f gura 10):

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\, d\theta$$

- Área entre $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$, donde $f_2(\theta) \geq f_1(\theta)$ (f gura 11):

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f_2(\theta)^2 - f_1(\theta)^2)\, d\theta$$

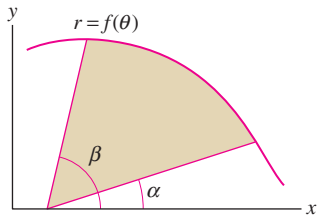


FIGURA 10 Región limitada por la curva polar $r = f(\theta)$ y las semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$.

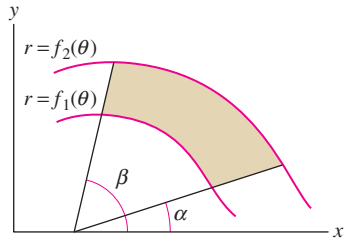


FIGURA 11 Región comprendida entre dos curvas polares.

- Longitud de arco de una curva polar $r = f(\theta)$ para $\alpha \leq \theta \leq \beta$:

$$\text{Longitud de arco} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta$$

12.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Las coordenadas polares son adecuadas para hallar el área (seleccione una):

(a) por debajo de una curva, entre $x = a$ y $x = b$.

(b) limitada por una curva y dos semirrectas por el origen.

2. Si $f(\theta)$ es negativa, ¿es válida la fórmula para el área en coordenadas polares?

3. La ecuación polar de la recta horizontal $y = 1$ es $r = \csc\theta$. ¿Qué área representa la integral $\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc^2\theta\, d\theta$ (f gura 12)?

(a) $\square ABCD$ **(b)** $\triangle ABC$ **(c)** $\triangle ACD$

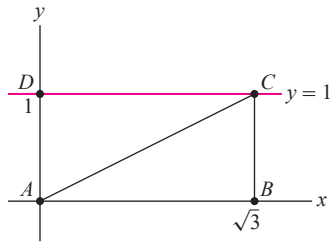


FIGURA 12

Problemas

1. Dibuje la región limitada por la circunferencia $r = 5$ y las semirrectas $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \pi$ y calcule su área como una integral en coordenadas polares.

2. Dibuje la región limitada por la recta $r = \sec\theta$ y las semirrectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$. Calcule su área de dos maneras: como una integral y aplicando geometría plana.

3. Calcule el área encerrada por la circunferencia $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ como una integral en coordenadas polares (vea la f gura 4). Tenga presente el seleccionar correctamente los límites de integración.

4. Halle el área del triángulo sombreado de la f gura 13 como una integral en coordenadas polares. A continuación, halle las coordenadas rectangulares de P y de Q y calcule el área aplicando geometría plana.

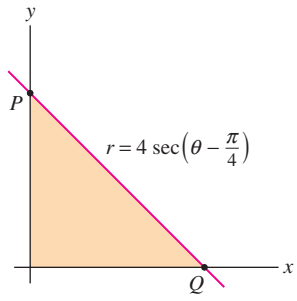


FIGURA 13

5. Halle el área de la región sombreada de la f gura 14. Observe que θ va de 0 a $\frac{\pi}{2}$.

6. ¿Qué intervalo de valores de θ corresponde a la región sombreada de la f gura 15? Halle el área de la región.

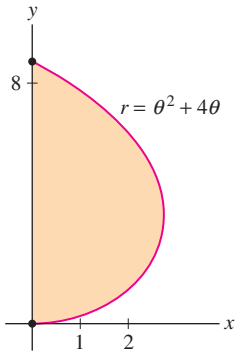


FIGURA 14

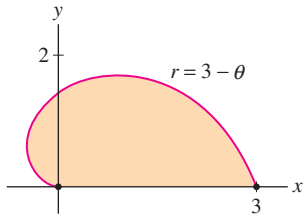


FIGURA 15

7. Halle el área total limitada por la cardioide de la f gura 16.

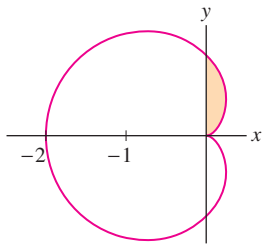


FIGURA 16 La cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

8. Halle el área de la región sombreada de la f gura 16.

9. Halle el área de una hoja de la "rosa de cuatro pétalos" $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (f gura 17). A continuación demuestre que el área total de la rosa es igual a la mitad del área del círculo limitado de la circunferencia circunscrita.

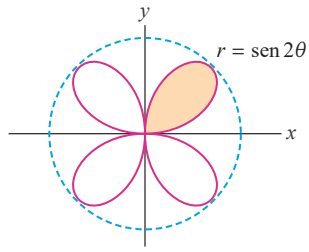


FIGURA 17 Rosa de cuatro pétalos $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

10. Halle el área limitada por un bucle de la lemniscata de ecuación $r^2 = \cos 2\theta$ (f gura 18). Seleccione sus límites de integración con cuidado.

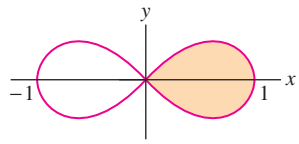


FIGURA 18 La lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$.

11. Dibuje la espiral $r = \theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ y halle el área limitada por la curva y el primer cuadrante.

12. Halle el área comprendida entre las circunferencias $r = \operatorname{sen}\theta$ y $r = \cos\theta$.

13. Halle el área de la región A de la f gura 19.

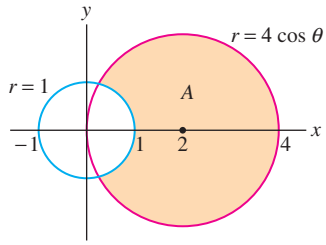


FIGURA 19

14. Halle el área de la región sombreada de la f gura 20, limitada por la circunferencia $r = \frac{1}{2}$ y un pétalo de la curva $r = \cos 3\theta$. *Indicación:* Calcule tanto el área del pétalo como la de la región dentro del pétalo y por fuera de la circunferencia.

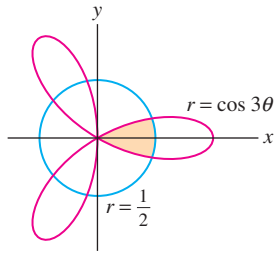


FIGURA 20

15. Halle el área del bucle interior del caracol de Pascal con ecuación polar $r = 2\cos\theta - 1$ (f gura 21).

16. Halle el área de la región sombreada de la f gura 21 entre los bucles interior y exterior del caracol de Pascal $r = 2\cos\theta - 1$.

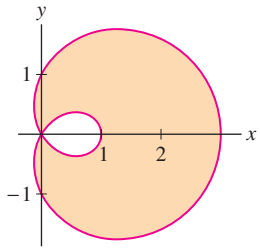


FIGURA 21 El caracol de Pascal dado por $r = 2\cos\theta - 1$.

17. Halle el área de la porción del círculo de circunferencia $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$, que se encuentra en el cuarto cuadrante (vea el problema 26 de la sección 12.3).

18. Halle el área de la región que se encuentra en el interior de la circunferencia $r = 2\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{4})$ y por encima de la recta $r = \sec(\theta - \frac{\pi}{4})$.

19. Halle el área comprendida entre las dos curvas de la f gura 22(A).

20. Halle el área comprendida entre las dos curvas de la f gura 22(B).

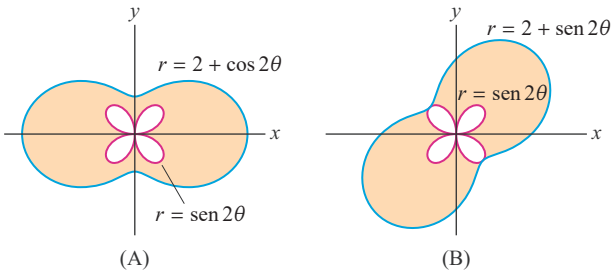


FIGURA 22

21. Halle el área entre las dos curvas de la f gura 23.

22. Halle el área de la región que se encuentra dentro de una pero no de las dos curvas de la f gura 23.

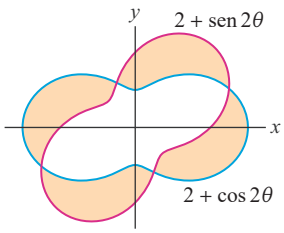


FIGURA 23

23. Calcule la longitud total de la circunferencia $r = 4\operatorname{sen}\theta$ como una integral en coordenadas polares.

24. Dibuje el segmento $r = \sec\theta$ para $0 \le \theta \le A$. A continuación, calcule su longitud de dos maneras: como una integral en coordenadas polares y aplicando trigonometría.

En los problemas 25-30, calcule la longitud de la curva polar.

25. La longitud de $r = \theta^2$ para $0 \le \theta \le \pi$.

26. La espiral $r = \theta$ para $0 \le \theta \le A$.

27. La espiral equiangular $r = e^{\theta}$ para $0 \le \theta \le 2\pi$.

28. El bucle interior de $r = 2\cos\theta - 1$ de la f gura 21.

29. La cardioide $r = 1 - \cos\theta$ de la f gura 16.

30. $r = \cos^2\theta$

En los problemas 31 y 32, exprese la longitud de la curva como una integral, pero no la evalúe.

31. $r = (2 - \cos\theta)^{-1}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

32. $r = \operatorname{sen}^3 t, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.

En los problemas 33-36, use un programa informático de cálculo simbólico para calcular la longitud total con dos decimales de precisión.

33. SAC La rosa de tres pétalos $r = \cos 3\theta$ de la f gura 20.

34. SAC La curva $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$ de la f gura 23.

35. SAC La curva $r = \theta\operatorname{sen}\theta$ de la f gura 24 para $0 \le \theta \le 4\pi$.

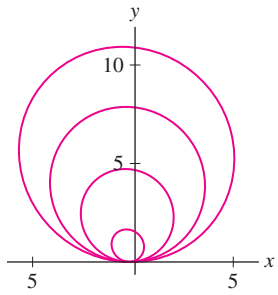


FIGURA 24 $r = \theta\operatorname{sen}\theta$ para $0 \le \theta \le 4\pi$.

36. $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$.

Problemas avanzados

37. Suponga que las coordenadas en el instante t de una partícula en movimiento son $(r(t), \theta(t))$. Demuestre que la celeridad de la partícula es igual a:

$$\sqrt{(dr/dt)^2 + r^2(d\theta/dt)^2}.$$

38. Calcule la celeridad en el instante $t = 1$ de una partícula en movimiento cuyas coordenadas polares en el instante t son $r = t$, $\theta = t$ (aplique el problema 37). ¿A qué sería igual la celeridad si las coordenadas rectangulares de la partícula fueran $x = t$, $y = t$? ¿Por qué la celeridad aumenta en un caso y es constante en el otro?

12.5 Secciones cónicas

Las cónicas fueron estudiadas por primera vez por los matemáticos de la Antigua Grecia, empezando probablemente con Menecmo (380-320 AC) e incluyendo a Arquímedes (287-212 AC) y Apolonio (262-190 AC).

Hay tres conocidas familias de curvas (elipses, hipérbolas y parábolas) de relevancia en las matemáticas y en diferentes aplicaciones. Son las **secciones cónicas**: se llaman así porque se obtienen por la intersección de un cono con un plano apropiado (f gura 1). El objetivo de esta sección es deducir ecuaciones para las secciones cónicas a partir de sus def niciones geométricas en el plano.

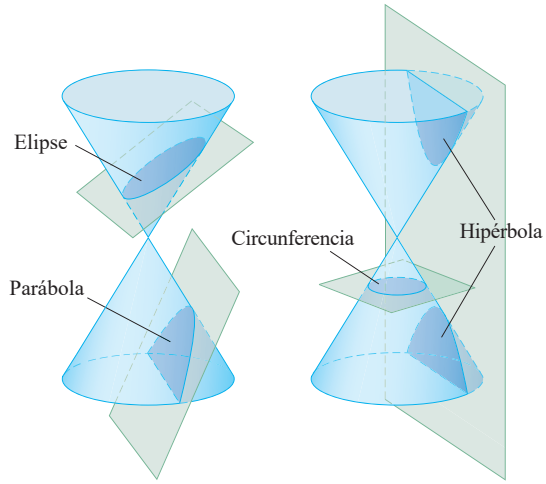


FIGURA 1 Las secciones cónicas se obtienen por la intersección de un plano y un cono.

Una **elipse** es una curva con forma ovalada [f gura 2(A)] formada por todos los puntos P tales que la suma de las distancias a dos puntos f jos F_1 y F_2 es una constante $K > 0$:

$$PF_1 + PF_2 = K \qquad \boxed{1}$$

Los puntos F_1 y F_2 son los **focos** de la elipse. Observe que si los focos coinciden, entonces la ec. (1) se reduce a $2PF_1 = K$ y se obtiene una circunferencia de centro F_1 y radio $\frac{1}{2}K$.

Se usará la siguiente terminología:

- el punto medio de $\overline{F_1F_2}$ es el **centro** de la elipse
- la recta que pasa por los focos es el **eje focal**
- la recta que pasa por el centro y que es perpendicular al eje focal es el **eje conjugado**

Se supone siempre que K es mayor que la distancia F_1F_2 entre los focos, porque la elipse consiste en el segmento rectilíneo $\overline{F_1F_2}$ si $K = F_1F_2$ y no contiene ningún punto cuando $K < F_1F_2$.

Se dice que una elipse está en **posición estándar** si el eje focal y el conjugado son el eje x y el y, tal y como se muestra en la f gura 2(B). En tal caso, las coordenadas de los focos son $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ para algún $c > 0$. A continuación se va a demostrar que la ecuación de esta elipse es especialmente simple e igual a

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \boxed{2}$$

donde $a = K/2$ y $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

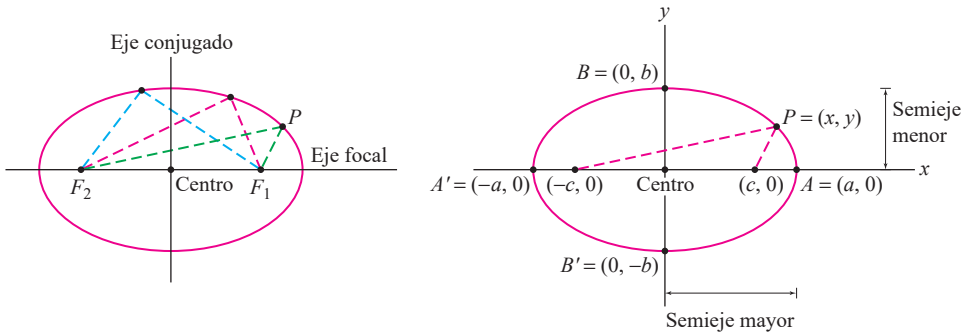
Según la fórmula de la distancia, $P = (x, y)$ se encuentra sobre la elipse de la f gura 2(B) siempre que:

$$PF_1 + PF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \qquad \boxed{3}$$

Pase el segundo término de la izquierda a la derecha, y eleve al cuadrado a ambos lados de la igualdad:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x - c)^2 - (x + c)^2 = 4a^2 - 4cx$$



(A) La elipse está formada por todos los puntos P tales que $PF_1 + PF_2 = K$.

(B) Elipse en posición estándar: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

FIGURA 2

Estrictamente hablando, es necesario probar que si $P = (x, y)$ cumple la ec. (4), entonces también cumple la ec. (3). Si empieza a trabajar con la ec. (4) e invierte los pasos algebraicos realizados, el proceso de considerar la raíz cuadrada da lugar a la relación:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Sin embargo, esta ecuación no tiene sentido, salvo que ambos signos sean positivos, pues $a > c$.

Ahora, divida por 4, eleve al cuadrado y simplif que:

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \qquad \boxed{4}$$

Se trata de la ec. (2) con $b^2 = a^2 - c^2$, tal y como se quería demostrar.

La elipse corta los ejes en cuatro puntos A, A', B y B', llamados **vértices**. Los vértices A y A', que se encuentran sobre el eje focal, son los **vértices focales**. Los números a y b son conocidos como el **semieje mayor** y el **semieje menor** (aunque en realidad son números y no ejes).

TEOREMA 1 Elipse en posición estándar Sean $a > b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La ecuación de la elipse $PF_1 + PF_2 = 2a$ de focos $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \boxed{5}$$

Además, la elipse tiene

- semieje mayor a, semieje menor b.
- vértices focales $(\pm a, 0)$, vértices menores $(0, \pm b)$.

Si $b > a > 0$, entonces ec. (5) def ne una elipse de focos $(0, \pm c)$, donde $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

EJEMPLO 1 Halle la ecuación de la elipse de focos $(\pm\sqrt{11}, 0)$ y semieje mayor $a = 6$. A continuación, halle el semieje menor y dibuje su gráf ca.

Solución Los focos son $(\pm c, 0)$, siendo $c = \sqrt{11}$, y el semieje mayor es $a = 6$, por lo que se puede utilizar la relación $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ para hallar b:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - (\sqrt{11})^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

Así, el semieje menor es $b = 5$ y la ecuación de la elipse es $\left(\frac{x}{6}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$. Para dibujar la elipse, represente los vértices $(\pm 6, 0)$ y $(0, \pm 5)$ y únalos, como en la f gura 3. ■

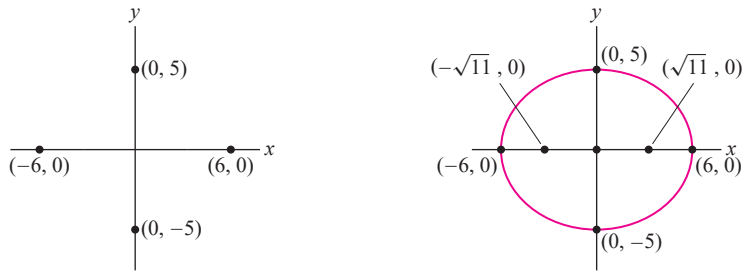


FIGURA 3

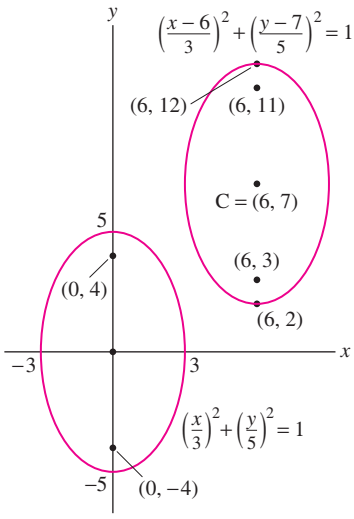


FIGURA 4 Una elipse con eje mayor vertical, y su traslación de centro $C = (6, 7)$.

Para obtener la ecuación de una elipse cuyos ejes sean paralelos al eje x y al eje y y su centro se encuentre en el punto $C = (h, k)$, sustituya x por $x - h$ e y por $y - k$ en la ecuación (f gura 4):

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=1$$

EJEMPLO 2 Traslación de una elipse Halle una ecuación de la elipse de centro $C = (6, 7)$, eje focal vertical, semieje mayor 5 y semieje menor 3. ¿Dónde se encuentran los focos?

Como el eje focal es vertical, se tiene que $a = 3$ y $b = 5$ y $a < b$ (f gura 4). La ecuación de la elipse centrada en el origen hubiera sido $\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2=1$. Cuando se traslada el centro a $(h, k) = (6, 7)$, la ecuación resulta:

$$\left(\frac{x-6}{3}\right)^2+\left(\frac{y-7}{5}\right)^2=1$$

Además, $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, por lo que los focos se encuentran a ±4 unidades verticales del centro, es decir $F_1 = (6, 11)$ y $F_2 = (6, 3)$. ■

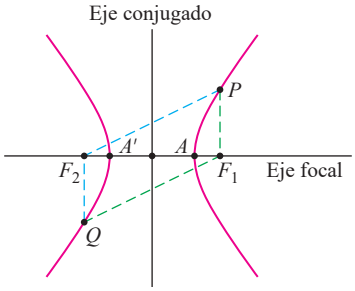


FIGURA 5 Una hipérbola de centro $(0, 0)$.

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos P tales que la diferencia de las distancias de P a dos focos F_1 y F_2 es $\pm K$:

$$PF_1 - PF_2 = \pm K \qquad \boxed{6}$$

Se supondrá que K es menor que la distancia F_1F_2 entre los focos (la hipérbola no tiene puntos si $K > F_1F_2$). Observe que la hipérbola consiste en dos ramas correspondientes a las elecciones de signo ± (f gura 5).

Como en el caso de la elipse, el punto medio de $\overline{F_1F_2}$ es el **centro** de la hipérbola, la recta que pasa por F_1 y F_2 se denomina el **eje focal** y la recta que pasa por el centro y que es perpendicular al eje focal se denomina el **eje conjugado**. Los **vértices** son los puntos en que el eje focal corta la hipérbola; se han etiquetado como A y A' en la f gura 5. Se dice que la hipérbola está en la posición estándar cuando el eje focal y el conjugado son el eje x y el y, como en la f gura 6. El siguiente teorema se puede demostrar, más o menos, de la misma manera en la que se procedió en el teorema 1.

TEOREMA 2 Hipérbola en posición estándar Sean $a > 0$, $b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. La ecuación de la hipérbola $PF_1 - PF_2 = \pm 2a$ de focos $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1 \qquad \boxed{7}$$

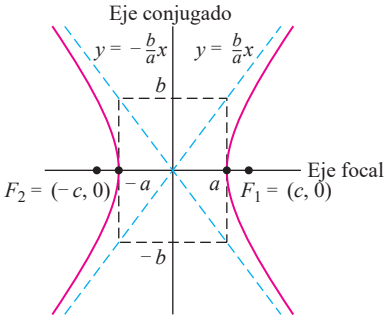


FIGURA 6 Hipérbola en posición estándar.

Una hipérbola tiene dos **asíntotas** $y = \pm\frac{b}{a}x$ que son las diagonales del rectángulo cuyos lados pasan por $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$, como en la figura 6. Para demostrar esta afirmación, considere un punto (x, y) sobre la hipérbola en el primer cuadrante. Según la ec. (7),

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

El siguiente límite pone de manifiesto que un punto (x, y) sobre la hipérbola tiende a la recta $y = \frac{b}{a}x$ cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y - \frac{b}{a}x\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right) = 0$$

El comportamiento asintótico en el resto de los cuadrantes es similar.

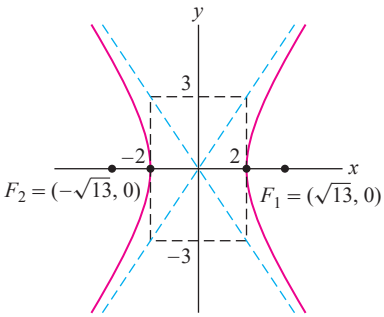


FIGURA 7 La hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$.

EJEMPLO 3 Halle los focos de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$. Dibuje su gráfica y sus asíntotas.

Solución En primer lugar, divida por 36 para obtener la ecuación en forma estándar:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{o} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Por tanto $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. Los focos son:

$$F_1 = (\sqrt{13}, 0) \qquad F_2 = (-\sqrt{13}, 0)$$

Para dibujar la gráfica, represente el rectángulo por los puntos $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 3)$, como en la figura 7. Las diagonales del rectángulo son las asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$. La hipérbola pasa por los vértices $(\pm 2, 0)$ y tiende a las asíntotas. ■

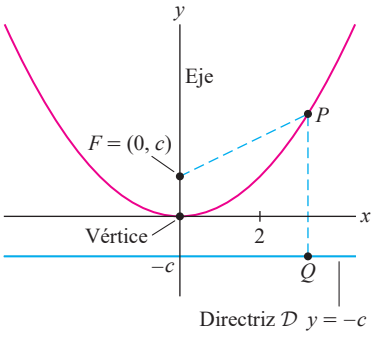


FIGURA 8 Parábola con foco $(0, c)$ y directriz $y = -c$.

La elipse y la hipérbola están definidas en base a dos focos; sin embargo, la **parábola** es el conjunto de todos los puntos P equidistantes a un foco F y a una recta $\mathcal{D}$ llamada **directriz**:

$$PF = P\mathcal{D} \qquad \boxed{8}$$

Aquí, al referirnos a la *distancia* de un punto P a una recta $\mathcal{D}$, se trata de la distancia de P al punto Q sobre $\mathcal{D}$ que esté más cercano a P y que se obtiene trazando la perpendicular a $\mathcal{D}$ desde P (figura 8). Esta distancia se denota como $P\mathcal{D}$.

La recta que pasa por el foco F y que es perpendicular a $\mathcal{D}$ es el **eje** de la parábola. El **vértice** es el punto en el que la parábola corta su eje. Se dice que la parábola está en posición estándar si, para algún c, el foco es $F = (0, c)$ y la directriz es $y = -c$, tal y como se muestra en la figura 8. En el problema 73 se comprueba que, entonces, el vértice está en el origen y que la ecuación de la parábola es $y = x^2/4c$. Si $c < 0$, las ramas de la parábola van hacia abajo.

TEOREMA 3 Parábola en posición estándar Sea $c \neq 0$. La ecuación de la parábola de foco $F = (0, c)$ y directriz $y = -c$ es:

$$y = \frac{1}{4c}x^2 \qquad (9)$$

El vértice se encuentra en el origen. Las ramas de la parábola van hacia arriba, si $c > 0$, y hacia abajo, si $c < 0$.

EJEMPLO 4 Se aplica una traslación a la parábola estándar de directriz $y = -2$, de tal manera que ahora el vértice está situado en $(2, 8)$. Halle su ecuación, directriz y foco.

Solución Según la ec. (9) con $c = 2$, la ecuación de la parábola estándar de directriz $y = -2$ es $y = \frac{1}{8}x^2$ (figura 9). El foco de esta parábola estándar es $(0, c) = (0, 2)$, que se encuentra dos unidades por encima de $(0, 0)$.

Para obtener la ecuación cuando la parábola se traslada y su vértice pasa a ser $(2, 8)$, sustituya x por $x - 2$, e y por $y - 8$:

$$y - 8 = \frac{1}{8}(x-2)^2 \qquad \text{o} \qquad y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

El vértice se ha desplazado hacia arriba en 8 unidades, por lo que la directriz también se desplaza hacia arriba en 8 unidades, pasando a ser ahora $y = 6$. El nuevo foco está dos unidades por encima del nuevo vértice $(2, 8)$: el nuevo foco es $(2, 10)$.

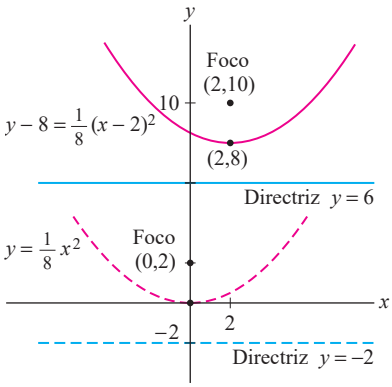


FIGURA 9 Una parábola y su traslación.

Excentricidad

Algunas elipses son más planas que otras, de igual manera que algunas hipérbolas tienen más inclinación que otras. La "forma" de una sección cónica la mide un parámetro e denominado **excentricidad**. Para una elipse o una hipérbola:

$$e = \frac{\text{distancia entre focos}}{\text{distancia entre vértices sobre el eje focal}}$$

Se def ne la excentricidad de la parábola como $e = 1$.

TEOREMA 4 Para elipses e hipérbolas en posición estándar:

$$e = \frac{c}{a}$$

1. La excentricidad de una elipse cumple $0 \leq e < 1$.
2. La excentricidad de una hipérbola cumple $e > 1$.

Demostración Los focos se encuentran en $(\pm c, 0)$ y los vértices se encuentran en el eje focal en $(\pm a, 0)$. Por tanto:

$$e = \frac{\text{distancia entre focos}}{\text{distancia entre vértices sobre el eje focal}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

En el caso de una elipse, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y, por tanto, $e = c/a < 1$. Para una hipérbola, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ con lo que $e = c/a > 1$.

RECORDATORIO

Elipse estándar:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Hipérbola estándar:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

¿De qué manera determina la excentricidad la forma de una cónica [f gura 10(A)]? Considere el cociente b/a entre los semiejes menor y mayor de una elipse. La elipse es prácticamente circular si b/a está cercano a 1, mientras que es alargada y plana si b/a es pequeño. Pero:

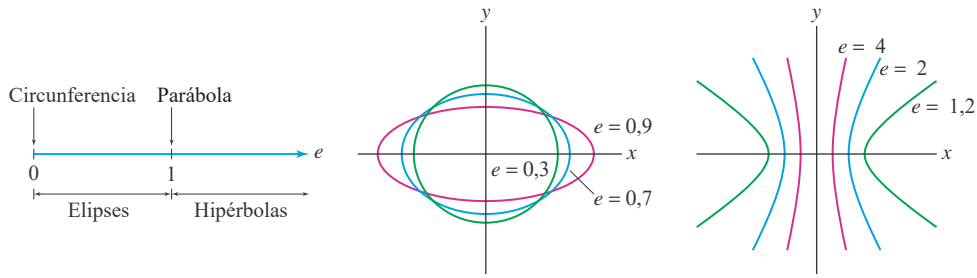
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - e^2}$$

Así, b/a es menor (y la elipse es más plana) cuando $e \to 1$ [f gura 10(B)]. La elipse más "redonda" posible es la circunferencia, para la que $e = 0$.

De manera análoga, para una hipérbola:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 + e^2}$$

Los cocientes $\pm b/a$ son las pendientes de las asíntotas, por lo que las asíntotas tienen cada vez mayor inclinación cuando $e \to +\infty$ [f gura 10(C)].



(A) Excentricidad e

(B) La elipse es cada vez más plana, cuando $e \to 1$.

(C) Las asíntotas de la hipérbola tienen cada vez mayor inclinación, cuando $e \to +\infty$

FIGURA 10

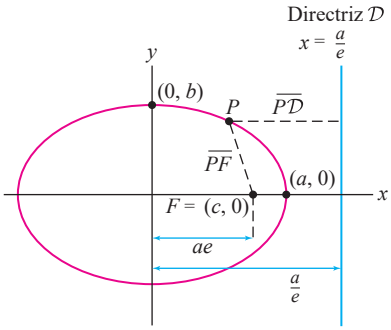


FIGURA 11 La elipse está formada por todos los puntos P tales que $PF = eP\mathcal{D}$.

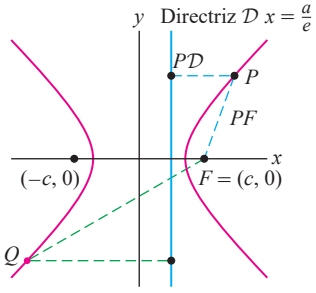


FIGURA 12 La hipérbola está formada por todos los puntos P tales que $PF = eP\mathcal{D}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Hay una manera más precisa de explicar cómo el valor de la excentricidad determina la forma de una cónica. Se puede demostrar que si dos cónicas, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, tienen la misma excentricidad e, entonces existe un cambio de escala para el que $\mathcal{C}_1$ es *congruente* con $\mathcal{C}_2$. Un cambio de escala signif ca cambiar las unidades en el eje x e y en un factor positivo común.Una curva escalada en un factor de 10 tiene la misma forma pero es diez veces mayor. Esto se corresponde con, por ejemplo, un cambio de unidades de centímetros a milímetros (unidades menores dan lugar a una f gura mayor). Con el término "congruente" se indica que después del escalado, es posible transformar la curva $\mathcal{C}_1$ por un movimiento rígido (que involucre rotación y traslación pero no alargar o encoger la curva) de tal manera que quede justo encima de $\mathcal{C}_2$.

Todas las circunferencias ($e = 0$) tienen la misma forma porque escalar por un factor $r > 0$ transforma una circunferencia de radio R en una circunferencia de radio rR. De manera similar, dos parábolas cualesquiera ($e = 1$) resultan congruentes tras un escalado apropiado. Sin embargo, una elipse de excentricidad $e = 0{,}5$ no se puede conseguir que sea congruente a una elipse de excentricidad $e = 0{,}8$ por escalado (vea el problema 74).

La excentricidad se puede utilizar para proporcionar una def nición unif cada foco-directriz para las secciones cónicas. Dado un punto F (el foco), una recta $\mathcal{D}$ (la directriz) y un número $e > 0$, considere el conjunto de todos los puntos P tales que:

$$PF = eP\mathcal{D} \qquad \textbf{10}$$

Si $e = 1$, se trata de nuestra def nición de la parábola. Según el siguiente teorema, la ec. (10) def ne una sección cónica de excentricidad e para todo $e > 0$ (f guras 11 y 12). Sin embargo, observe que no hay una def nición foco-directriz para circunferencias ($e = 0$).

TEOREMA 5 Definición foco-directriz Para todo $e > 0$, el conjunto de puntos que cumplen la ec. (10) es una sección cónica de excentricidad e. Además:

- **Elipse:** sean $a > b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

cumple la ec. (10) con $F = (c, 0)$, $e = \dfrac{c}{a}$ y directriz vertical $x = \dfrac{a}{e}$.

- **Hipérbola:** sean $a, b > 0$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. La hipérbola

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

cumple la ec. (10) con $F = (c, 0)$, $e = \dfrac{c}{a}$ y directriz vertical $x = \dfrac{a}{e}$.

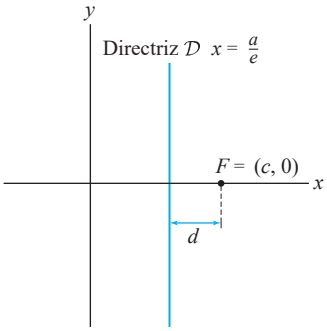


FIGURA 13

Demostración Suponga que $e > 1$ (el caso $e < 1$ es similar, vea el problema 66). Se puede escoger un sistema de ejes de manera que el foco F se encuentre sobre el eje x y la directriz sea vertical, quedando a la izquierda de F, como en la f gura 13. Anticipándonos al resultado f nal, sea d la distancia desde el foco F a la directriz $\mathcal{D}$ y sea:

$$c = \frac{d}{1 - e^{-2}} \qquad a = \frac{c}{e} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Puesto que se tiene la libertad de desplazar el eje y a conveniencia, elija un eje y tal que las coordenadas del foco sean $F = (c, 0)$. Entonces la directriz es la recta:

$$x = c - d = c - c(1 - e^{-2}) =$$

$$= c\,e^{-2} = \frac{a}{e}$$

Ahora, se puede escribir la ecuación $PF = ePD$ para un punto $P = (x, y)$ como:

$$\underbrace{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}_{PF} = \underbrace{e\sqrt{(x - (a/e))^2}}_{PD}$$

Por manipulación algebraica se llega a:

$$\begin{aligned}
(x - c)^2 + y^2 &= e^2(x - (a/e))^2 && \text{(eleve al cuadrado)}\\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= e^2x^2 - 2aex + a^2 &&\\
x^2 - \cancel{2aex} + a^2e^2 + y^2 &= e^2x^2 - \cancel{2aex} + a^2 && \text{(use que } c = ae\text{)}\\
(e^2 - 1)x^2 - y^2 &= a^2(e^2 - 1) && \text{(agrupe)}\\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} &= 1 && \text{(divida)}
\end{aligned}$$

Se trata de la ecuación del enunciado, pues $a^2(e^2 - 1) = c^2 - a^2 = b^2$. ■

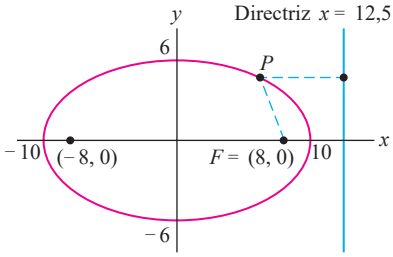


FIGURA 14 Elipse de excentricidad $e = 0{,}8$ y foco en $(8, 0)$.

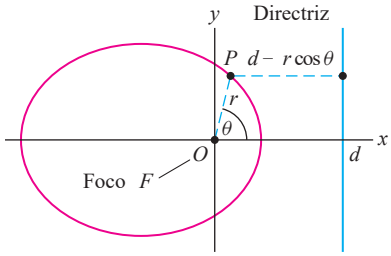


FIGURA 15 Definición foco-directriz de la elipse en coordenadas polares.

■ **EJEMPLO 5** Halle la ecuación, focos y directriz de la elipse estándar de excentricidad $e = 0{,}8$ y vértices focales $(\pm 10, 0)$.

Solución Los vértices son $(\pm a, 0)$ con $a = 10$ (figura 14). Según el teorema 5:

$$c = ae = 10 \cdot 0{,}8 = 8 \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

Por tanto, la ecuación de la elipse del enunciado es:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

Los focos son $(\pm c, 0) = (\pm 8, 0)$ y la directriz es $x = \frac{a}{e} = \frac{10}{0{,}8} = 12{,}5$. ■

En la sección 14.6, se examinó la famosa ley de Johannes Kepler que establece que la órbita de un planeta alrededor del Sol es una elipse con un foco en el sol. Ahora, tendremos que escribir la ecuación de una elipse en coordenadas polares. Para obtener las ecuaciones polares de las secciones cónicas, es conveniente utilizar la definición foco-directriz con foco F en el origen O y recta vertical $x = d$ como directriz $\mathcal{D}$ (figura 15). De la figura, observe que si $P = (r, \theta)$, entonces:

$$PF = r \qquad P\mathcal{D} = d - r\cos\theta$$

Por tanto, la definición foco-directriz de la elipse $PF = ePD$ resulta ser $r = e(d - r\cos\theta)$, o $r(1 + e\cos\theta) = ed$. Se ha demostrado así el siguiente resultado, que también es cierto para la hipérbola y la parábola (vea el problema 67).

TEOREMA 6 Ecuación polar de una sección cónica La ecuación polar de la sección cónica de excentricidad $e > 0$, con foco en el origen y directriz $x = d$ es:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta} \qquad \textbf{11}$$

■ **EJEMPLO 6** Halle la excentricidad, directriz y foco de la sección cónica:

$$r = \frac{24}{4 + 3\cos\theta}$$

Solución En primer lugar, escriba la ecuación en la forma estándar:

$$r = \frac{24}{4 + 3\cos\theta} = \frac{6}{1 + \frac{3}{4}\cos\theta}$$

Comparando con la ec. (11), se tiene que $e = \frac{3}{4}$ y $ed = 6$. Así, $d = 8$. Como $e < 1$, la cónica es una elipse. Según el teorema 6, la directriz es la recta $x = 8$ y el foco es el origen. ■

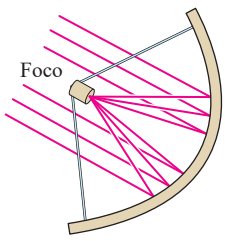


FIGURA 16 La forma parabólica de este radio-telescopio dirige la señal entrante al foco.

Propiedades de reflexión de las secciones cónicas

Las secciones cónicas cumplen numerosas propiedades geométricas. Son especialmente importantes las *propiedades reflexivas*, que se utilizan en óptica y en las comunicaciones (por ejemplo, en el diseño de antenas y de telescopios; figura 16). A continuación se describen estas propiedades de forma breve y sin demostración (pero puede consultar demostraciones para las propiedades de reflexión de las elipses en los problemas 68-70 y el problema 71).

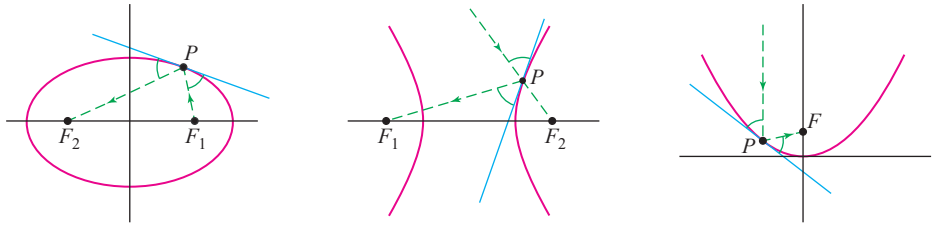


FIGURA 17

- **Elipse:** Los segmentos F_1P y F_2P forman ángulos iguales con la recta tangente a un punto P cualquiera sobre la elipse. Por tanto, un rayo de luz que se origine en un foco F_1 se ref eja en la elipse hacia el segundo foco F_2 [f gura 17(A)]. Vea también la f gura 18.
- **Hipérbola:** La recta tangente en un punto P cualquiera de la hipérbola parte el ángulo formado por los segmentos F_1P y F_2P en dos ángulos iguales. Por tanto, un rayo de luz que se dirija a F_2 se ref eja en la hipérbola hacia el segundo foco F_1 [f gura 17(B)].
- **Parábola:** El segmento FP y la recta que pasa por P paralela al eje forman el mismo ángulo con la recta tangente a un punto P cualquiera de la parábola [f gura 17(C)]. Por tanto, un rayo de luz que se dirija a P desde arriba en la dirección axial se ref eja en la parábola hacia la dirección del foco F.

FIGURA 18 La cúpula elipsoidal de la Sala de las Estatuas en el edif cio del Capitolio de Washington crea una "cámara de susurro." La leyenda dice que John Quincy Adams se situaba en un foco para poder escuchar las conversaciones que tenían lugar en el otro foco.

Ecuaciones generales de grado 2

Las ecuaciones de las secciones cónicas estándar son casos particulares de la ecuación general de grado 2 en x e y:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (12)$$

Aquí a, b, e, d, e, f son constantes tales que a, b, c no son simultáneamente cero. De esta manera, se observa que esta ecuación general de grado 2 no da lugar a nuevos tipos de curvas. Aparte de ciertos "casos degenerados," la ec. (12) def ne una sección cónica que no necesariamente se encuentra en una posición estándar: no tiene por qué estar centrada en el origen y sus ejes focal y conjugado pueden haber sido rotados respecto a los ejes de coordenadas. Por ejemplo, la ecuación:

$$6x^2 - 8xy + 8y^2 - 12x - 24y + 38 = 0$$

def ne una elipse de centro $(3, 3)$ cuyos ejes están rotados (f gura 19).

Se dice que la ec. (12) es **degenerada** si el conjunto de soluciones es un par de rectas que se cortan, un par de rectas paralelas, una única recta, un punto o el conjunto vacío. Por ejemplo:

- $x^2 - y^2 = 0$ def ne un par de rectas que se cruzan, $y = x$ e $y = -x$.
- $x^2 - x = 0$ def ne un par de rectas paralelas, $x = 0$ y $x = 1$.
- $x^2 = 0$ def ne una única recta(el eje y).
- $x^2 + y^2 = 0$ tiene sólo una solución $(0, 0)$.
- $x^2 + y^2 = -1$ no tiene soluciones.

Suponga ahora que la ec. (12) es no degenerada. El término bxy se denomina *término cruzado*. Cuando el término cruzado es cero (es decir, cuando $b = 0$), se pueden "completar cuadrados" para probar que la ec. (12) def ne una traslación de la cónica en posición estándar. Dicho de otro modo, los ejes de la cónica son paralelos a los ejes de coordenadas. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

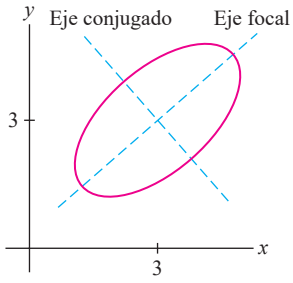


FIGURA 19 La elipse de ecuación $6x^2 - 8xy + 8y^2 - 12x - 24y + 38 = 0$.

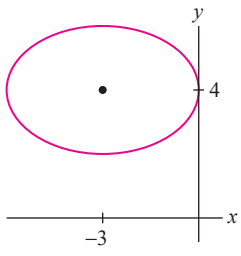


FIGURA 20 La elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 + 24x - 72y + 144 = 0$.

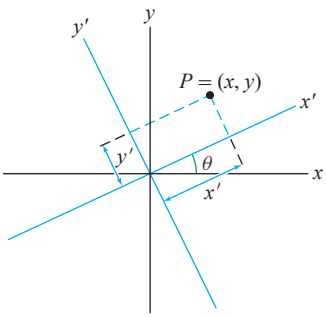


FIGURA 21

EJEMPLO 7 Completando cuadrados Pruebe que:

$$4x^2 + 9y^2 + 24x - 72y + 144 = 0$$

def ne una traslación de una sección cónica en posición estándar (f gura 20).

Solución Como no hay término cruzado, se pueden completar los cuadrados de los términos que involucran a x y a y separadamente:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 + 24x - 72y + 144 &= 0 \\ 4(x^2 + 6x + 9 - 9) + 9(y^2 - 8y + 16 - 16) + 144 &= 0 \\ 4(x+3)^2 - 4(9) + 9(y-4)^2 - 9(16) + 144 &= 0 \\ 4(x+3)^2 + 9(y-4)^2 &= 36 \end{aligned}$$

Por tanto, esta ecuación cuadrática se puede reescribir como:

$$\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{2}\right)^2 = 1$$

Cuando el término cruzado bxy es diferente de cero, la ec. (12) def ne una cónica cuyos ejes son una rotación de los ejes coordenados. La nota al margen explica cómo se puede verif car esta af rmación en general. Se ilustra en base al siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Pruebe que $2xy = 1$ def ne una sección cónica cuyos ejes focal y conjugado son una rotación de los ejes coordenados.

Solución La f gura 22(A) muestra unos ejes etiquetados como x' e y' que son una rotación de 45° de los ejes coordenados. Un punto P de coordenadas (x, y) se puede describir también mediante coordenadas (x', y') respecto a estos ejes rotados. Aplicando las ecs. (13) y (14) con $\theta = \frac{\pi}{4}$, se obtiene que (x, y) y (x', y') se encuentran relacionadas mediante las fórmulas:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, si $P = (x, y)$ se encuentra en la hipérbola, es decir si $2xy = 1$, entonces:

$$2xy = 2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) = x'^2 - y'^2 = 1$$

Así, las coordenadas (x', y') cumplen la ecuación de la hipérbola estándar $x'^2 - y'^2 = 1$ cuyos ejes focal y conjugado son los ejes x' e y' respectivamente.

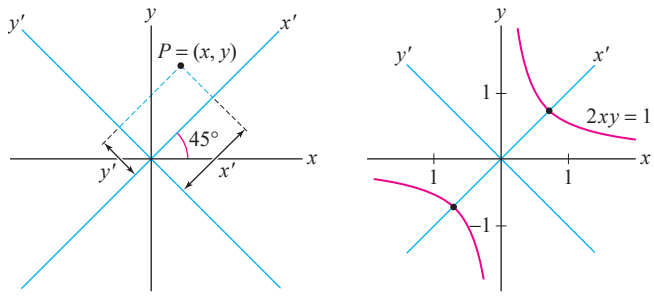
Si (x', y') son las coordenadas respecto a los ejes rotados en un ángulo θ, como en la figura 21, entonces:

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \quad \boxed{13}$$

$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \quad \boxed{14}$$

Vea el problema 75. En el problema 76, se prueba que el término cruzado desaparece cuando la ec. (12) se reescribe en términos de x' e y' para el ángulo:

$$\theta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\frac{a-c}{b} \quad \boxed{15}$$



(A) El punto $P=(x,y)$ puede también ser descrito por medio de las coordenadas (x', y') respecto a los ejes rotados.

(B) La forma de la hipérbola $2xy = 1$ respecto a los ejes x' e y' es $x^2 - y^2 = 1$.

FIGURA 22 Los ejes x' e y' son una rotación de 45° de los ejes x e y.

Este estudio de las cónicas f naliza enunciando el criterio del discriminante. Suponga que la ecuación:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

es no degenerada y que, por tanto, def ne una sección cónica. Según el criterio del discriminante, el tipo de cónica queda determinado por el **discriminante** D:

$$D = b^2 - 4ac$$

Se tienen los siguientes casos:

- $D < 0$: Elipse o circunferencia
- $D > 0$: Hipérbola
- $D = 0$: Parábola

Por ejemplo, el discriminante de la ecuación $2xy = 1$ es:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 0 = 4 > 0$$

Según el criterio del discriminante, $2xy = 1$ def ne una hipérbola. Esta af rmación está en consonancia con la conclusión en el ejemplo 8.

12.5 RESUMEN

- Una *elipse* de focos F_1 y F_2 es el conjunto de puntos P tales que $PF_1 + PF_2 = K$, donde K es una constante tal que $K > F_1F_2$. La ecuación en posición estándar es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Los vértices de la elipse son $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$.

	Ejes focales	Focos	Vértices focales
$a > b$	eje x	$(\pm c, 0)$ siendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$(\pm a, 0)$
$a < b$	eje y	$(0, \pm c)$ siendo $c = \sqrt{b^2 - a^2}$	$(0, \pm b)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(0 \le e < 1)$. Directriz: $x = \frac{a}{e}$ (si $a > b$).

- Una *hipérbola* de focos F_1 y F_2 es el conjunto de puntos P tales que:

$$PF_1 - PF_2 = \pm K$$

donde K es una constante tal que $0 < K < F_1F_2$. La ecuación en posición estándar es:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Ejes focales	Focos	Vértices focales	Asíntotas
eje x	$(\pm c, 0)$ siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$(\pm a, 0)$	$y = \pm\frac{b}{a}x$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$. Directriz: $x = \frac{a}{e}$.

- Una *parábola* de foco F y directriz $\mathcal{D}$ es el conjunto de puntos P tales que $PF = P\mathcal{D}$. La ecuación en posición estándar es:

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

Foco $F = (0, c)$, directriz $y = -c$, y vértice en el origen $(0, 0)$.

- *Definición foco-directriz* de una cónica de foco F y directriz $\mathcal{D}$: $PF = ePD$.
- Para trasladar una sección cónica h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, sustituya x por $x - h$ e y por $y - k$ en la ecuación.
- Ecuación polar de una cónica de excentricidad $e > 0$, foco en el origen, directriz $x = d$:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

12.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones def ne una elipse? ¿Cuál de ellas no def ne una sección cónica?

(a) $4x^2 - 9y^2 = 12$ **(b)** $-4x + 9y^2 = 0$

(c) $4y^2 + 9x^2 = 12$ **(d)** $4x^3 + 9y^3 = 12$

2. ¿Para qué secciones cónicas los vértices se encuentran entre los focos?

3. ¿Cuáles son los focos de

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{si } a < b?$$

4. ¿Cuál es la interpretación geométrica de b/a en la ecuación de la hipérbola en posición estándar?

Problemas

En los problemas 1-6, halle los vértices y focos de la sección cónica.

1. $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$

2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{9}\right)^2 = 1$

4. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 36$

5. $\left(\frac{x-3}{7}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{4}\right)^2 = 1$

6. $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{7}\right)^2 = 1$

En los problemas 7-10, halle la ecuación de la elipse obtenida por la traslación indicada de la elipse

$$\left(\frac{x-8}{6}\right)^2 + \left(\frac{y+4}{3}\right)^2 = 1.$$

7. Trasladada con centro en el origen.

8. Trasladada con centro en $(-2, -12)$.

9. Trasladada a la derecha en seis unidades.

10. Trasladada hacia abajo en cuatro unidades.

En los problemas 11-14, halle la ecuación de la elipse.

11. Vértices $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 7)$.

12. Focos $(\pm 6, 0)$ y vértices focales $(\pm 10, 0)$.

13. Focos $(0, \pm 10)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$.

14. Vértices $(4, 0)$, $(28, 0)$ y excentricidad $e = \frac{2}{5}$.

En los problemas 15-20, halle la ecuación de la hipérbola.

15. Vértices $(\pm 3, 0)$ y focos $(\pm 5, 0)$.

16. Vértices $(\pm 3, 0)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$.

17. Focos $(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = 2$.

18. Vértices $(0, \pm 6)$ y excentricidad $e = 3$.

19. Vértices $(-3, 0)$, $(7, 0)$ y excentricidad $e = 3$.

20. Vértices $(0, -6)$, $(0, 4)$ y focos $(0, -9)$, $(0, 7)$.

En los problemas 21-28, halle la ecuación de la parábola con las propiedades que se indican.

21. Vértice $(0, 0)$, foco $(\frac{1}{12}, 0)$.

22. Vértice $(0, 0)$, foco $(0, 2)$.

23. Vértice $(0, 0)$, directriz $y = -5$.

24. Vértice $(3, 4)$, directriz $y = -2$.

25. Foco $(0, 4)$, directriz $y = -4$.

26. Foco $(0, -4)$, directriz $y = 4$.

27. Foco $(2, 0)$, directriz $x = -2$.

28. Foco $(-2, 0)$, vértice $(2, 0)$.

En los problemas 29-38, halle los vértices, focos, centro (si se tratara de una elipse o una hipérbola) y las asíntotas (en el caso de la hipérbola).

29. $x^2 + 4y^2 = 16$

30. $4x^2 + y^2 = 16$

31. $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - \left(\frac{y+5}{7}\right)^2 = 1$

32. $3x^2 - 27y^2 = 12$

33. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 30y = 215$

34. $y = 4x^2$

35. $y = 4(x-4)^2$

36. $8y^2 + 6x^2 - 36x - 64y + 134 = 0$

37. $4x^2 + 25y^2 - 8x - 10y = 20$

38. $16x^2 + 25y^2 - 64x - 200y + 64 = 0$

En los problemas 39-42, use el criterio del discriminante para determinar el tipo de sección cónica (en cada caso, la ecuación es no degenerada). Represente gráf camente la curva, si dispone de un programa informático de cálculo simbólico.

39. $4x^2 + 5xy + 7y^2 = 24$

40. $x^2 - 2xy + y^2 + 24x - 8 = 0$

41. $2x^2 - 8xy + 3y^2 - 4 = 0$

42. $2x^2 - 3xy + 5y^2 - 4 = 0$

43. Pruebe que la "cónica" $x^2 + 3y^2 - 6x + 12 + 23 = 0$ no tiene ningún punto.

44. ¿Para qué valores de a tiene la cónica $3x^2 + 2y^2 - 16y + 12x = a$ al menos un punto?

45. Pruebe que $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$ para una elipse estándar de excentricidad e.

46. Pruebe que la excentricidad de una hipérbola en posición estándar es $e = \sqrt{1 + m^2}$, donde $\pm m$ son las pendientes de las asíntotas.

47. Explique porqué los puntos de la f gura 23 se encuentran en una parábola. ¿Dónde se encuentran el foco y la directriz?

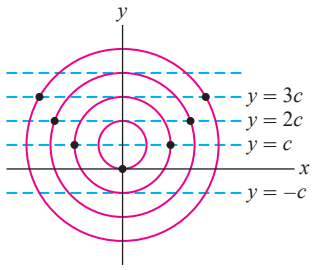


FIGURA 23

48. Halle la ecuación de la elipse formada por los puntos P tales que $PF_1 + PF_2 = 12$, donde $F_1 = (4, 0)$ y $F_2 = (-2, 0)$.

49. Un **latus rectum** de una sección cónica es una cuerda por el foco paralela a la directriz. Halle el área limitada por la parábola $y = x^2/(4c)$ y su latus rectum (haga referencia a la f gura 8).

50. Pruebe que la recta tangente a un punto $P = (x_0, y_0)$ sobre la hipérbola $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ tiene ecuación:

$$Ax - By = 1$$

donde $A = \frac{x_0}{a^2}$ y $B = \frac{y_0}{b^2}$.

En los problemas 51-54, halle la ecuación polar de la cónica con la excentricidad y directriz dadas y foco en el origen.

51. $e = \frac{1}{2}, \quad x = 3$

52. $e = \frac{1}{2}, \quad x = -3$

53. $e = 1, \quad x = 4$

54. $e = \frac{3}{2}, \quad x = -4$

En los problemas 55-58, identif que el tipo de cónica, la excentricidad y la ecuación de la directriz.

55. $r = \dfrac{8}{1 + 4\cos\theta}$

56. $r = \dfrac{8}{4 + \cos\theta}$

57. $r = \dfrac{8}{4 + 3\cos\theta}$

58. $r = \dfrac{12}{4 + 3\cos\theta}$

59. Halle una ecuación polar de la hipérbola con foco en el origen, directriz $x = -2$ y excentricidad $e = 1{,}2$.

60. Sea C la elipse $r = de/(1 + e\cos\theta)$, siendo $e < 1$. Pruebe que las coordenadas x de los puntos de la f gura 24 son las siguientes:

Punto	A	C	F_2	A'
coordenada x	$\dfrac{de}{e+1}$	$-\dfrac{de^2}{1-e^2}$	$-\dfrac{2de^2}{1-e^2}$	$-\dfrac{de}{1-e}$

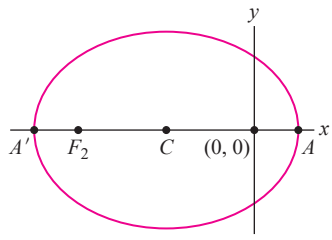


FIGURA 24

61. Halle una ecuación en coordenadas rectangulares de la cónica:

$$r = \frac{16}{5 + 3\cos\theta}$$

Indicación: Use los resultados del problema 60.

62. Sea $e > 1$. Pruebe que las coordenadas x de los vértices de la hipérbola $r = \dfrac{de}{1 + e\cos\theta}$ son $\dfrac{ed}{e+1}$ y $\dfrac{ed}{e-1}$.

63. La primera ley de Kepler af rma que las órbitas de los planetas son elipses para las que el Sol está en uno de los focos. La excentricidad de la órbita de Plutón es $e \approx 0{,}25$. Su **perihelio** (la menor distancia al Sol) es, aproximadamente, 2.7 billones de millas. Halle el **afelio** (la mayor distancia al Sol).

64. La tercera ley de Kepler af rma que el cociente $T/a^{3/2}$ es igual a una constante C para todas las órbitas planetarias alrededor del Sol, donde T es el periodo (tiempo necesario para completar una órbita) y a es el semieje mayor.

(a) Calcule C en unidades de días y de kilómetros, sabiendo que la órbita de la Tierra es de 150×10^6 km.

(b) Calcule el periodo de la órbita de Saturno, sabiendo que su semieje mayor es, aproximadamente, $1{,}43 \times 10^9$ km.

(c) La excentricidad de la órbita de Saturno es $e = 0{,}056$. Halle el perihelio y el afelio de Saturno (vea el problema 63).

Problemas avanzados

65. Compruebe el teorema 2.

66. Compruebe el teorema 5 en el caso $0 < e < 1$. *Indicación:* repita la demostración del teorema 5, pero considere $c = d/(e^{-2} - 1)$.

67. Compruebe que si $e > 1$, entonces la ec. (11) def ne una hipérbola de excentricidad e, con foco en el origen y directriz en $x = d$.

Propiedad ref exiva de la elipse *En los problemas 68-70, se demuestra que los radios focales en un punto cualquiera de una elipse forman ángulos iguales con la recta tangente $\mathcal{R}$ a la elipse en ese punto. Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto sobre la elipse de la f gura 25, de focos $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ y excentricidad $e = c/a$.*

68. Pruebe que la ecuación de la recta tangente en P es $Ax + By = 1$, donde $A = \dfrac{x_0}{a^2}$ y $B = \dfrac{y_0}{b^2}$.

69. Los puntos R_1 y R_2 de la f gura 25 están def nidos de manera que $\overline{F_1R_1}$ y $\overline{F_2R_2}$ son perpendiculares a la recta tangente.

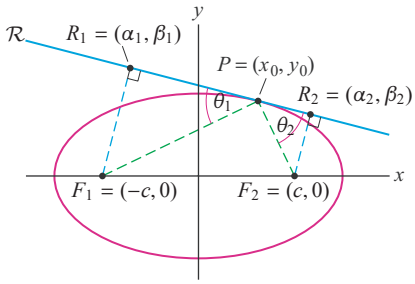


FIGURA 25 La elipse $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$.

(a) Pruebe que, si A y B son los valores dados por el problema 68, entonces:

$$\frac{\alpha_1 + c}{\beta_1} = \frac{\alpha_2 - c}{\beta_2} = \frac{A}{B}$$

(b) Use (a) y la fórmula de la distancia para demostrar que:

$$\frac{F_1R_1}{F_2R_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$$

(c) Use (a) y la ecuación de la recta tangente del ejercicio 68 para probar que:

$$\beta_1 = \frac{B(1 + Ac)}{A^2 + B^2} \qquad \beta_2 = \frac{B(1 - Ac)}{A^2 + B^2}$$

70. (a) Demuestre que $PF_1 = a + x_0e$ y $PF_2 = a - x_0e$. *Indicación:* Pruebe que ${PF_1}^2 - {PF_2}^2 = 4x_0c$. A continuación, utilice la propiedad def nitoria $PF_1 + PF_2 = 2a$ y la relación $e = c/a$.

(b) Compruebe que $\dfrac{F_1R_1}{PF_1} = \dfrac{F_2R_2}{PF_2}$.

(c) Pruebe que $\operatorname{sen}\theta_1 = \operatorname{sen}\theta_2$. Concluya que $\theta_1 = \theta_2$.

71. He aquí otra demostración de la propiedad de ref exión.

(a) La f gura 25 muestra que $\mathcal{R}$ es la única recta que corta la elipse en un solo punto P. Suponiendo este enunciado cierto, demuestre que $QF_1 + QF_2 > PF_1 + PF_2$ para todos los puntos Q sobre la recta tangente que no sean el propio punto P.

(b) Use el principio de mínima distancia (ejemplo 6 de la sección 4.6) para demostrar que $\theta_1 = \theta_2$.

72. Pruebe que la longitud de QR en la f gura 26 es independiente del punto P.

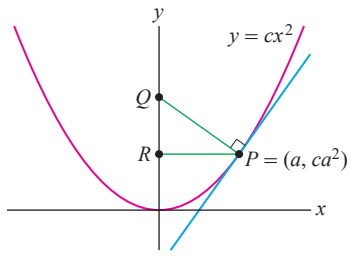


FIGURA 26

73. Pruebe que $y = x^2/4c$ es la ecuación de una parábola de directriz $y = -c$, foco $(0, c)$ y vértice en el origen, tal y como se enunció en el teorema 3.

74. Considere dos elipses en posición estándar:

$$E_1: \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1$$

$$E_2: \quad \left(\frac{x}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_2}\right)^2 = 1$$

Se dice que E_1 es similar a E_2 por cambio de escala si existe $r > 0$ tal que, para todo (x, y) en E_1, el punto (rx, ry) se encuentra en E_2. Pruebe que E_1 y E_2 son similares por cambio de escala si y sólo si tienen la misma excentricidad. Pruebe que dos circunferencias cualesquiera son similares por cambio de escala.

75. Deduzca las ecuaciones (13) y (14) del capítulo tal y como se explica a continuación. Escriba las coordenadas de P respecto a los ejes rotados de la f gura 21 en la forma polar $x' = r\cos\alpha$, $y' = r\operatorname{sen}\alpha$. Explique por qué las coordenadas polares de P respecto a los ejes x e y estándar son $(r, \alpha + \theta)$ y deduzca (13) y (14) utilizando las fórmulas de la adición para el coseno y el seno.

76. Si se reescribe la ecuación de grado 2 (ec. 12) en términos de las variables x' e y' que se encuentran relacionadas con x e y mediante las ecs. (13) y (14), se obtiene una nueva ecuación de grado 2 en x' e y' con la misma forma pero con coef cientes diferentes:

$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$$

(a) Pruebe que $b' = b\cos 2\theta + (c - a)\operatorname{sen} 2\theta$.

(b) Pruebe que si $b \neq 0$, entonces $b' = 0$ para:

$$\theta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\frac{a - c}{b}$$

De esta manera se demuestra que siempre es posible eliminar el término cruzado bxy por rotación, para un ángulo adecuado, de los ejes.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. ¿Cuál de las siguientes curvas pasa por el punto $(1, 4)$?

(a) $c(t) = (t^2, t + 3)$ **(b)** $c(t) = (t^2, t - 3)$

(c) $c(t) = (t^2, 3 - t)$ **(d)** $c(t) = (t - 3, t^2)$

2. Halle ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $P = (2, 5)$ y que es perpendicular a la recta $y = 4x - 3$.

3. Halle ecuaciones paramétricas para la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 2. Use las ecuaciones para hallar los puntos de intersección de la circunferencia con los ejes x e y.

4. Halle una parametrización $c(t)$ de la recta $y = 5 - 2x$ tal que $c(0) = (2, 1)$.

5. Halle una parametrización $c(\theta)$ de la circunferencia unitaria tal que $c(0) = (-1, 0)$.

6. Halle un camino $c(t)$ que describa el arco parabólico $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$ para $0 \le t \le 1$.

7. Halle un camino $c(t)$ que describa la recta $y = 2x + 1$ desde $(1, 3)$ a $(3, 7)$ para $0 \le t \le 1$.

8. Dibuje la gráfica de $c(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} 2t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ incluyendo flechas para indicar la dirección del movimiento.

En los problemas 9-12, exprese la curva paramétrica de la forma $y = f(x)$.

9. $c(t) = (4t - 3, 10 - t)$ **10.** $c(t) = (t^3 + 1, t^2 - 4)$

11. $c(t) = \left(3 - \dfrac{2}{t}, t^3 + \dfrac{1}{t}\right)$ **12.** $x = \tan t, \quad y = \sec t$

En los problemas 13-16, calcule dy/dx en el punto que se indica.

13. $c(t) = (t^3 + t, t^2 - 1), \quad t = 3$

14. $c(\theta) = (\tan^2 \theta, \cos \theta), \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

15. $c(t) = (e^t - 1, \operatorname{sen} t), \quad t = 20$

16. $c(t) = (\ln t, 3t^2 - t), \quad P = (0, 2)$

17. SAC Halle el punto de la cicloide $c(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ en que la pendiente de la recta tangente es igual a $\frac{1}{2}$.

18. Halle los puntos de $(t + \operatorname{sen} t, t - 2 \operatorname{sen} t)$ en que la recta tangente es vertical u horizontal.

19. Halle la ecuación de la curva de Bézier de puntos de control:

$$P_0 = (-1, -1) \quad P_1 = (-1, 1) \quad P_2 = (1, 1) \quad P_3(1, -1)$$

20. Halle la celeridad en $t = \frac{\pi}{4}$ de una partícula cuya posición en t segundos es $c(t) = (\operatorname{sen} 4t, \cos 3t)$.

21. Halle la celeridad (como una función de t) de una partícula cuya posición en t segundos es $c(t) = (\operatorname{sen} t + t, \cos t + t)$. ¿Cuál es la celeridad máxima de la partícula?

22. Halle la longitud de $(3e^t - 3, 4e^t + 7)$ para $0 \le t \le 1$.

En los problemas 23 y 24, sea $c(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t)$.

23. Pruebe que $c(t)$ para $0 \le t < +\infty$, tiene longitud finita y calcule su valor.

24. Halle el primer valor positivo t_0 tal que la recta tangente a $c(t_0)$ sea vertical y calcule la celeridad en $t = t_0$.

25. SAC Represente gráficamente $c(t) = (\operatorname{sen} 2t, 2 \cos t)$ para $0 \le t \le \pi$. Exprese la longitud de la curva como una integral definida y aproxime su valor utilizando un programa informático de cálculo simbólico.

26. Convierta los puntos $(x, y) = (1, -3), (3, -1)$ de coordenadas rectangulares a polares.

27. Convierta los puntos $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{6}), (3, \frac{5\pi}{4})$ de coordenadas polares a rectangulares.

28. Exprese $(x + y)^2 = xy + 6$ como una ecuación en coordenadas polares.

29. Exprese $r = \dfrac{2 \cos \theta}{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}$ como una ecuación en coordenadas rectangulares.

30. Pruebe que $r = \dfrac{4}{7 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}$ es la ecuación polar de una recta.

31. GU Convierta la ecuación:

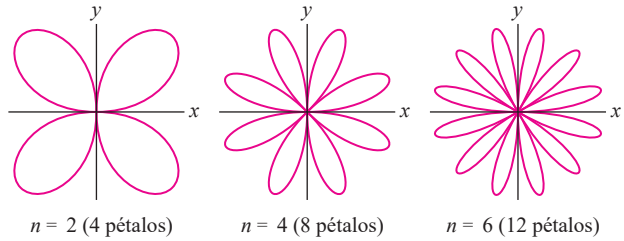
$$9(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2y)^2$$

a coordenadas polares y represéntela con un programa informático adecuado.

32. Calcule el área limitada por la circunferencia $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y las semirrectas $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

33. Calcule el área de un pétalo de $r = \operatorname{sen} 4\theta$ (vea la figura 1).

34. La ecuación $r = \operatorname{sen}(n\theta)$, donde $n \ge 2$ es par, es una "rosa" de $2n$ pétalos (figura 1). Calcule el área total de la flor y muestre que no depende de n.



$n = 2$ (4 pétalos) $n = 4$ (8 pétalos) $n = 6$ (12 pétalos)

FIGURA 1 Representación gráfica de $r = \operatorname{sen}(n\theta)$.

35. Calcule el área total limitada por la curva $r^2 = \cos \theta e^{\operatorname{sen} \theta}$ (figura 2).

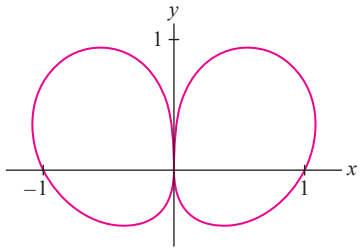


FIGURA 2 Gráfica de $r^2 = \cos\theta e^{\operatorname{sen}\theta}$.

36. Halle el área sombreada de la figura 3.

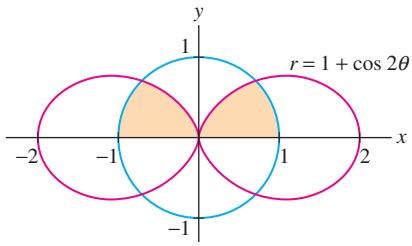


FIGURA 3

37. Halle el área limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, siendo $a > 0$.

38. Calcule la longitud de la curva de ecuación polar $r = \theta$ de la figura 4.

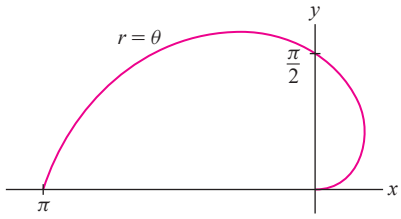


FIGURA 4

39. SAC La figura 5 muestra la gráfica de $r = e^{0,5\theta}\operatorname{sen}\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$. Use un programa informático de cálculo simbólico para aproximar la diferencia entre las longitudes de los bucles externo e interno.

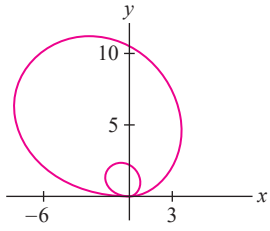


FIGURA 5

40. Pruebe que $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ definen las mismas curvas en coordenadas polares si $f_1(\theta) = -f_2(\theta + \pi)$. Use este resultado para probar que las siguientes ecuaciones definen la misma sección cónica:

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta} \qquad r = \frac{-de}{1 + e\cos\theta}$$

En los problemas 41-44, identifique la sección cónica. Halle los vértices y los focos.

41. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$

42. $x^2 - 2y^2 = 4$

43. $(2x + \frac{1}{2}y)^2 = 4 - (x - y)^2$

44. $(y - 3)^2 = 2x^2 - 1$

En los problemas 45-50, halle la ecuación de la sección cónica que se indica.

45. Elipse de vértices $(\pm 8, 0)$ y focos $(\pm\sqrt{3}, 0)$.

46. Elipse de focos $(\pm 8, 0)$, excentricidad $\frac{1}{8}$.

47. Hipérbola de vértices $(\pm 8, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$.

48. Hipérbola de focos $(2, 0)$ y $(10, 0)$, excentricidad $e = 4$.

49. Parábola de foco $(8, 0)$, directriz $x = -8$.

50. Parábola de vértice $(4, -1)$, directriz $x = 15$.

51. Halle las asíntotas de la hipérbola $3x^2 + 6x - y^2 - 10y = 1$.

52. Pruebe que la "sección cónica" de ecuación $x^2 - 4x + y^2 + 5 = 0$ no tiene ningún punto.

53. Pruebe que la relación $\frac{dy}{dx} = (e^2 - 1)\frac{x}{y}$ define una elipse o una hipérbola estándar de excentricidad e.

54. La órbita de Júpiter es una elipse con el Sol en un foco. Halle la excentricidad de esta órbita si el perihelio (la menor distancia al Sol) es igual a 740×10^6 km y el afelio (la mayor distancia al Sol) es igual a 816×10^6 km.

55. Este problema hace referencia a la figura 25 de la sección 12.5. Demuestre que el producto de las distancias perpendiculares F_1R_1 y F_2R_2 desde los focos a la recta tangente de una elipse es igual al cuadrado b^2 del semieje menor.

El puente sobre el río Baling, en la provincia de Guizhouin (China) (2,25 km de largo y elevándose a 400 m por encima del río Baling) es de reciente construcción. La tensión en los cables y las fuerzas de sus torres se describen mediante vectores.

13 GEOMETRÍA VECTORIAL

Los vectores desempeñan un papel destacado en casi todas las áreas de las matemáticas y sus aplicaciones. En el campo de la física se utilizan para representar cantidades en las que sea de interés la magnitud y la dirección, como por ejemplo, la velocidad o la fuerza. También aparecen en campos tan diversos como gráf cos por ordenador, la economía y la estadística. En este capítulo se desarrolla la geometría y el álgebra básica y se examinan las propiedades de los vectores. Aunque no se requiere cálculo, los conceptos desarrollados se utilizarán en el resto del texto.

13.1 Vectores en el plano

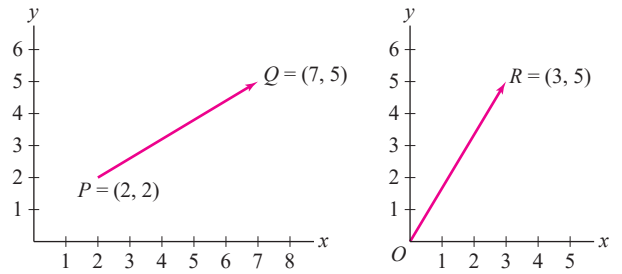
Un **vector** $\mathbf{v}$ en dos dimensiones queda determinado por dos puntos en el plano: un punto inicial P (también llamado la "cola" o punto base) y un punto terminal Q (también denominado la "cabeza"). Se denota:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

y se representa $\mathbf{v}$ como una f echa que apunta de P a Q. Se dice que este vector tiene como base P. La f gura 1(A) muestra el vector de punto inicial $P = (2, 2)$ y punto terminal $Q = (7, 5)$. La **norma** o **longitud** de $\mathbf{v}$, que se denota $\|\mathbf{v}\|$, es la distancia de P a Q.

NOTACIÓN *En este libro, los vectores se representan con letras minúsculas en negrita, como por ejemplo* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, *etc.*

El vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$ que apunta desde el origen de coordenadas a un punto R se denomina **vector de posición** de R. La f gura 1(B) muestra el vector de posición del punto $R = (3, 5)$.

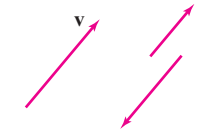


(A) El vector $\overrightarrow{PQ}$ (B) El vector de posición $\overrightarrow{OR}$

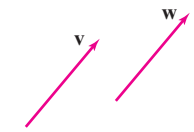
FIGURA 1

A continuación se va a introducir alguna terminología vectorial.

- Se dice que dos vectores de norma no nula $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son **paralelos** si las rectas que pasan por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelas. Dos vectores paralelos o bien apuntan en el mismo sentido o bien apuntan en sentidos opuestos [f gura 2(A)].
- Se dice que a un vector $\mathbf{v}$ se le aplica una **traslación** cuando se desplaza de forma paralela a él mismo, sin cambiar su norma o sentido. El vector resultante $\mathbf{w}$ se denomina una traslación de $\mathbf{v}$ [f gura 2(B)]. Las traslaciones de un vector tienen la misma norma y dirección pero diferentes puntos base.



(A) Vectores paralelos a $\mathbf{v}$



(B) $\mathbf{w}$ es una traslación de $\mathbf{v}$

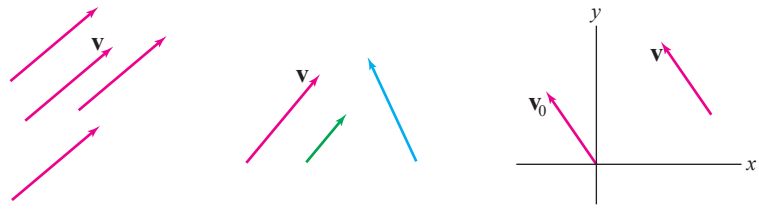
FIGURA 2

En muchas situaciones conviene tratar a vectores con la misma norma y dirección como equivalentes incluso si tienen diferentes puntos base. Con esta idea en mente, se dice que:

- $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son **equivalentes** si $\mathbf{w}$ es una traslación de $\mathbf{v}$ [f gura 3(A)].

A todo vector se le puede aplicar una traslación, de tal manera que su punto base sea el origen [f gura 3(C)]. Así:

Cualquier vector $\mathbf{v}$ *es equivalente a un único vector* $\mathbf{v}_0$ *con base en el origen.*



(A) Vectores equivalentes a $\mathbf{v}$ (traslaciones de $\mathbf{v}$) (B) Vectores no equivalentes (C) $\mathbf{v}_0$ es el único vector con base en el origen y equivalente a $\mathbf{v}$

FIGURA 3

Para trabajar a nivel algebraico, se def nen las componentes de un vector (f gura 4).

DEFINICIÓN Componentes de un vector Las componentes de $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, donde $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$, son:

$$a = a_2 - a_1 \quad \text{(componente } x\text{)}, \qquad b = b_2 - b_1 \quad \text{(componente } y\text{)}$$

El par de componentes se denota $\langle a, b \rangle$.

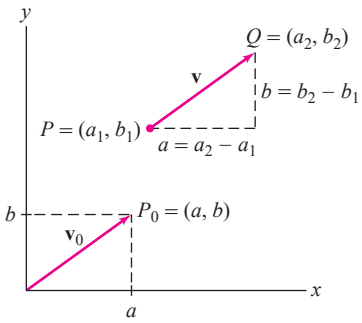


FIGURA 4 Las componentes de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_0$ son $\langle a, b \rangle$.

- *En este libro, se utilizan "paréntesis angulares" para distinguir entre el vector* $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ *y el punto* $P = (a, b)$. *Algunos libros denotan* $\mathbf{v}$ *y* P *como* (a, b).
- *Al referirnos a vectores, se utiliza el término "norma" y "longitud" de forma indistinta. El término "magnitud" también se suele utilizar.*

- La norma de un vector, expresada en términos de sus componentes (por la fórmula de la distancia, vea la f gura 4) es:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- El **vector cero** (cuya cabeza y cola son la misma) es el vector $\mathbf{O} = \langle 0, 0 \rangle$ de norma cero.

Las componentes $\langle a, b \rangle$ determinan la norma, dirección y sentido de $\mathbf{v}$, pero no su punto base. Así, *dos vectores tienen las mismas componentes si y sólo si son equivalentes*. Sin embargo, se suele describir un vector por sus componentes y escribir:

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$$

Aunque esta notación es ambigua (pues no especif ca el punto base), no suele provocar confusión en la práctica. Para evitar más confusión, se utilizará el siguiente convenio para el resto del texto:

Se supondrá que todos los vectores tienen como punto base el origen de coordenadas, salvo que se indique lo contrario.

EJEMPLO 1 Determine si $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{P_1Q_1}$ y $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{P_2Q_2}$ son equivalentes, donde:

$$P_1 = (3, 7), \quad Q_1 = (6, 5) \qquad \text{y} \qquad P_2 = (-1, 4), \quad Q_2 = (2, 1)$$

¿Cuál es la longitud de $\mathbf{v}_1$?

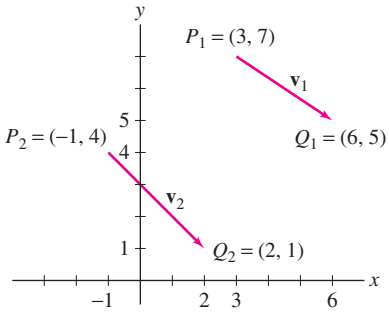


FIGURA 5

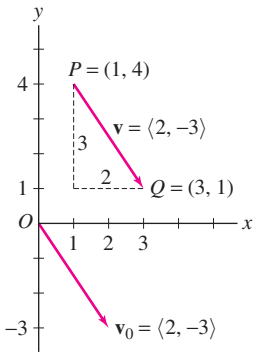


FIGURA 6 Los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_0$ tienen las mismas componentes pero diferentes puntos base.

Solución Se puede comprobar la equivalencia calculando las componentes (f gura 5):

$$\mathbf{v}_1 = \langle 6 - 3, 5 - 7 \rangle = \langle 3, -2 \rangle, \qquad \mathbf{v}_2 = \langle 2 - (-1), 1 - 4 \rangle = \langle 3, -3 \rangle$$

Las componentes de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son las mismas, por lo que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son equivalentes. Como $\mathbf{v}_1 = \langle 3, -2 \rangle$, su norma es:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

■

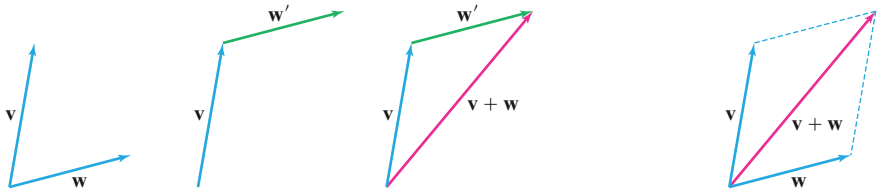
■ **EJEMPLO 2** Represente el vector $\mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$ con base en $P = (1, 4)$ y el vector $\mathbf{v}_0$ equivalente a $\mathbf{v}$ con base en el origen de coordenadas.

Solución El punto terminal del vector $\mathbf{v} = \langle 2, -3 \rangle$ basado en $P = (1, 4)$ es $Q = = (1 + 2, 4 - 3) = (3, 1)$, que se encuentra dos unidades a la derecha y tres unidades por debajo de P, tal y como se muestra en la f gura 6. El vector $\mathbf{v}_0$ equivalente a $\mathbf{v}$ basado en el origen O tiene punto terminal $(2, -3)$. ■

Álgebra vectorial

A continuación se def nen dos operaciones básicas de vectores: la suma de vectores y la multiplicación por un escalar.

La suma de vectores $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ se puede def nir cuando $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tienen el mismo punto base: traslade $\mathbf{w}$ hasta el vector equivalente $\mathbf{w}'$ cuya cola coincida com la cabeza de $\mathbf{v}$. La suma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es el vector que apunta de la cola de $\mathbf{v}$ a la cabeza de $\mathbf{w}'$ [f gura 7(A)]. De forma alternativa, se puede utilizar la **ley del paralelogramo**: $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es el vector que apunta de la base al vértice opuesto del paralelogramo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ [f gura 7(B)].



(A) El vector suma $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (B) Suma utilizando la ley del paralelogramo

FIGURA 7

Para sumar diferentes vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, traslade los vectores a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2', \ldots, \mathbf{v}_n'$ de tal manera que cada cabeza de un vector conecte con la cola del siguiente, tal y como se muestra en la f gura 8. El vector suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$ es el vector cuyo punto terminal es el punto terminal de $\mathbf{v}_n'$.

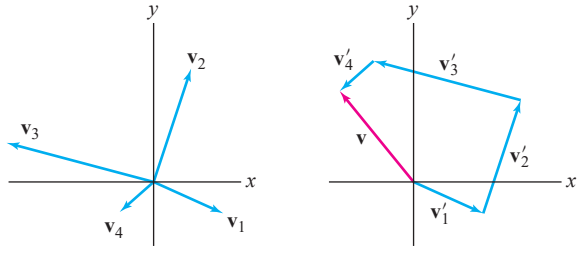


FIGURA 8 La suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$.

ATENCIÓN *Recuerde que el vector* $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ *apunta en la dirección* de la cabeza de $\mathbf{w}$ a la cabeza de $\mathbf{v}$ *(y no de la cabeza de* $\mathbf{v}$ *a la cabeza de* $\mathbf{w}$*).*

La resta de vectores $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ se realiza sumando $-\mathbf{w}$ a $\mathbf{v}$, como en la f gura 9(A). O, de manera más sencilla, dibuje un vector que apunte de $\mathbf{w}$ a $\mathbf{v}$, como en la f gura 9(B), y trasládelo al punto base para obtener $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

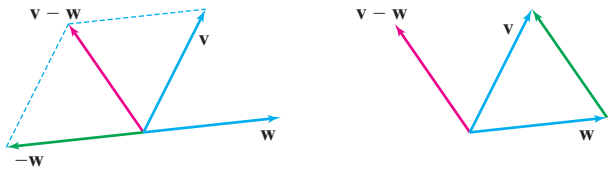


FIGURA 9 Resta de vectores.

(A) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es igual a $\mathbf{v}$ más $(-\mathbf{w})$

(B) De manera más simple, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es la traslación del vector que va de la cabeza de $\mathbf{w}$ a la cabeza de $\mathbf{v}$.

El término **escalar** es otra palabra para "número real", y a menudo se habla de magnitudes o cantidades escalares versus cantidades vectoriales. Así, el número 8 es un escalar, mientras que $\langle 8, 2\rangle$ es un vector. Si λ es un escalar y $\mathbf{v}$ es un vector diferente de cero, el **múltiplo escalar** $\lambda\mathbf{v}$ se define de la siguiente manera (figura 10):

- la norma de $\lambda\mathbf{v}$ es $|\lambda|\ \|\mathbf{v}\|$.
- tiene el mismo sentido que $\mathbf{v}$ si $\lambda > 0$.
- tiene sentido opuesto si $\lambda < 0$.

NOTACIÓN *λ (que se pronuncia "lambda") es la onceava letra del alfabeto griego. Se utiliza el símbolo λ a menudo (aunque no de forma exclusiva) para denotar un escalar.*

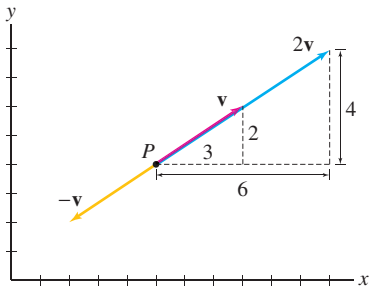


FIGURA 10 Los vectores $\mathbf{v}$ y $2\mathbf{v}$ tienen en mismo punto base P pero $2\mathbf{v}$ es dos veces más largo. Los vectores $\mathbf{v}$ y $-\mathbf{v}$ tienen la misma norma pero sentido opuesto.

Observe que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v}$, y además:

$$\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$$

En particular, la norma de $-\mathbf{v}$ es igual a la de $\mathbf{v}$ pero tiene sentido opuesto. Un vector $\mathbf{w}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ si y sólo si $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar λ diferente de cero.

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar se realizan de forma sencilla mediante componentes. Para sumar o restar dos vectores, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, se suman o restan sus componentes. Esto se deduce de la ley del paralelogramo, tal y como se muestra en la figura 11(A).

De forma análoga, para multiplicar $\mathbf{v}$ por un escalar λ, se multiplican las componentes de $\mathbf{v}$ por λ [figuras 11(B) y (C)]. De hecho, si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ es no nulo, la norma de $\langle \lambda a, \lambda b\rangle$ es $|\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$. Tiene el mismo sentido que $\langle a, b\rangle$ si $\lambda > 0$ y sentido opuesto si $\lambda < 0$.

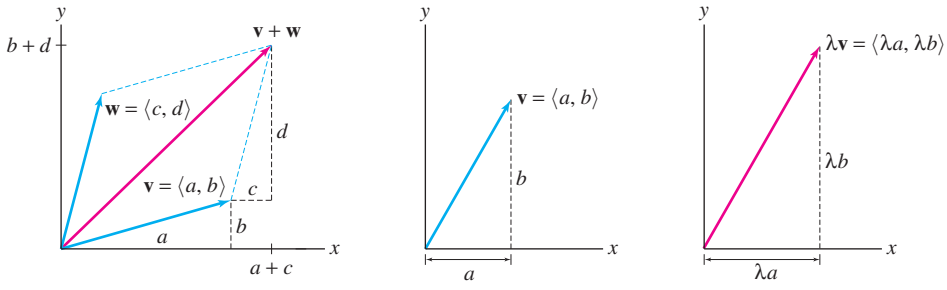


FIGURA 11 Operaciones de vectores usando componentes.

Operaciones de vectores usando componentes Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle c, d\rangle$, entonces:

(i) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle a + c, b + d\rangle$
(ii) $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle a - c, b - d\rangle$
(iii) $\lambda\mathbf{v} = \langle \lambda a, \lambda b\rangle$
(iv) $\mathbf{v} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Observe también que si $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$, entonces las componentes del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ se pueden calcular como la diferencia:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \langle a_2, b_2\rangle - \langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2 - a_1, b_2 - b_1\rangle$$

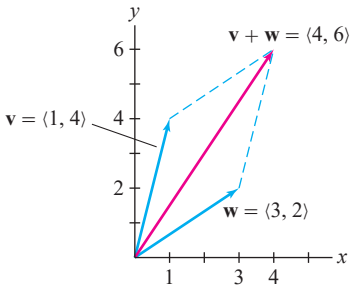


FIGURA 12

EJEMPLO 3 Para $\mathbf{v} = \langle 1, 4\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 3, 2\rangle$, calcule:

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ **(b)** $5\mathbf{v}$

Solución

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 1, 4\rangle + \langle 3, 2\rangle = \langle 1 + 3, 4 + 2\rangle = \langle 4, 6\rangle$$

$$5\mathbf{v} = 5\langle 1, 4\rangle = \langle 5, 20\rangle$$

El vector suma se muestra en la f gura 12. ■

Las operaciones de vectores cumplen las propiedades habituales de álgebra.

TEOREMA 1 Propiedades básicas de las operaciones de vectores Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores y λ un escalar cualesquiera. Entonces:

Conmutativa:	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
Asociativa:	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
Distributiva respecto al producto por un escalar:	$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$

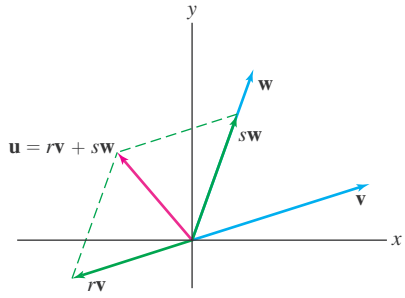
Estas propiedades se pueden comprobar de manera fácil usando componentes. Por ejemplo, se puede comprobar que la suma de vectores es conmutativa:

$$\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \underbrace{\langle a + c, b + d\rangle = \langle c + a, d + b\rangle}_{\text{Conmutatividad de la suma ordinaria}} = \langle c, d\rangle + \langle a, b\rangle$$

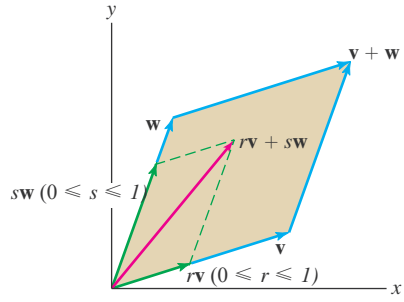
Una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es un vector:

$$r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$$

donde r y s son escalares. Si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no son paralelos, entonces cualquier vector $\mathbf{u}$ en el plano se puede expresar como una combinación lineal $\mathbf{u} = r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ [f gura 13(A)]. El paralelogramo $\mathcal{P}$, cuyos vértices son el origen y los puntos terminales de $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, se denomina el **paralelogramo generado** por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ [f gura 13(B)]. Está formado por todas las combinaciones lineales $r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ con $0 \le r \le 1$ y $0 \le s \le 1$.



(A) El vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como una combinación lineal $\mathbf{u} = r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$. En esta figura, $r < 0$.



(B) El paralelogramo $\mathcal{P}$ generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ está formado por todas las combinaciones lineales $r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ con $0 \le r, s \le 1$.

FIGURA 13

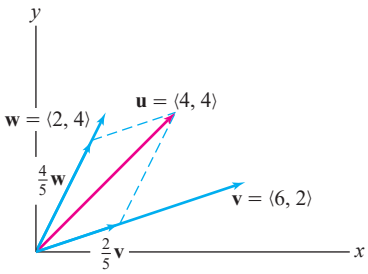


FIGURA 14

EJEMPLO 4 Combinaciones lineales Exprese el vector $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle$ de la figura 14 como una combinación lineal de $\mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 2, 4\rangle$.

Solución Se debe determinar r y s tales que $r\mathbf{v} + s\mathbf{w} = \langle 4, 4\rangle$, o

$$r\langle 6, 2\rangle + s\langle 2, 4\rangle = \langle 6r + 2s, 2r + 4s\rangle = \langle 4, 4\rangle$$

Las componentes deben ser iguales, lo que da lugar al sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$6r + 2s = 4$$
$$2r + 4s = 4$$

Restando la segunda ecuación a la primera se obtiene $4r - 2s = 0$, o $s = 2r$. Sustituyendo $s = 2r$ en la primera ecuación, se obtiene $6r + 4r = 4$ o $r = \frac{2}{5}$ y entonces $s = 2r = \frac{4}{5}$. Así,

$$\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle = \frac{2}{5}\langle 6, 2\rangle + \frac{4}{5}\langle 2, 4\rangle$$

UN APUNTE CONCEPTUAL En general, para expresar un vector $\mathbf{u} = \langle e, f\rangle$ como una combinación lineal de otros dos vectores $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle c, d\rangle$, se tiene que resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, r y s:

$$r\mathbf{v} + s\mathbf{w} = \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad r\langle a, b\rangle + s\langle c, d\rangle = \langle e, f\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ar + cs = e \\ br + ds = f \end{cases}$$

Por otra parte, los vectores proporcionan una manera de visualizar el sistema de ecuaciones geométricamente. La solución se representa por medio de un paralelogramo, como en la figura 14. Esta relación entre vectores y sistemas de ecuaciones se extiende a cualquier número de variables y es el punto de inicio del álgebra lineal.

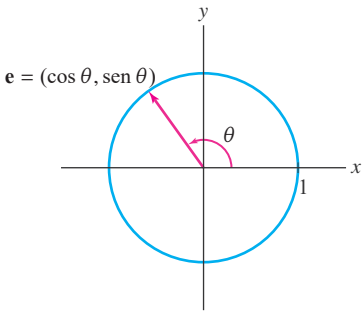


FIGURA 15 La cabeza de un vector unitario se encuentra en la circunferencia unitaria.

Un vector de norma 1 se denomina un **vector unitario**. Los vectores unitarios se suelen utilizar para indicar una dirección, en aquellas situaciones en las que no es necesario especificar una norma. La cabeza de un vector unitario $\mathbf{e}$ con base en el origen se encuentra en la circunferencia unitaria y sus componentes son:

$$\mathbf{e} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{e}$ y el eje positivo x (figura 15).

Siempre se puede reescalar un vector no nulo $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ para obtener un vector unitario que apunte en la misma dirección (figura 16):

$$\mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

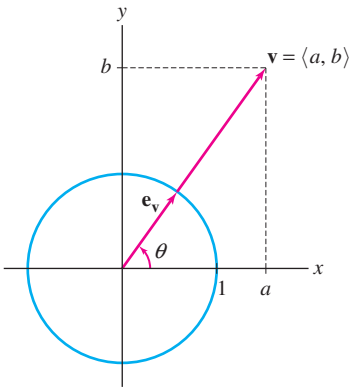


FIGURA 16 Vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

De hecho, se puede comprobar que $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ es un vector unitario de la siguiente manera:

$$\|\mathbf{e}_\mathbf{v}\| = \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

Si el ángulo entre $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y el eje de las x positivas es θ, entonces:

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = \|\mathbf{v}\|\mathbf{e}_\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle \qquad 1$$

EJEMPLO 5 Halle el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle 3, 5\rangle$.

Solución $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$, y, por tanto, $\mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{34}}\mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right\rangle$.

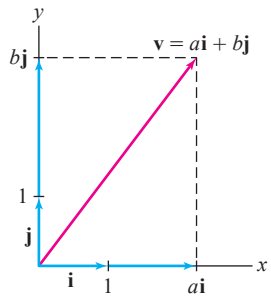


FIGURA 17

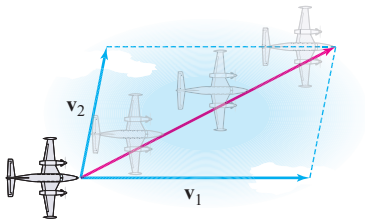


FIGURA 18 Cuando un avión que viaja a velocidad $\mathbf{v}_1$ se encuentra viento de velocidad $\mathbf{v}_2$, su velocidad resultante es la suma de vectores $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

θ	cos θ	sen θ
125°	−0,573	0,819
30°	0,866	0,5

Se suele utilizar una notación especial para los vectores unitarios en la dirección del eje de las x positivas y del eje de las y positivas (f gura 17):

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Los vectores **i** y **j** son los **vectores de la base canónica**. Cualquier vector del plano se expresa como una combinación lineal de **i** y **j** (f gura 17):

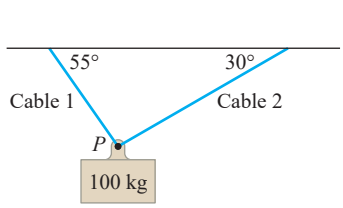
$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Por ejemplo, $\langle 4, -2 \rangle = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. La suma de vectores se realiza sumando los coef cientes de **i** y de **j** . Por ejemplo:

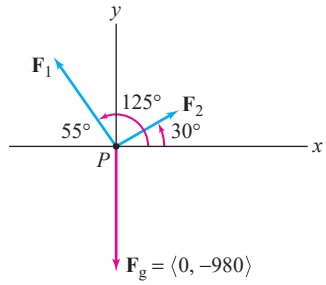
$$(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + (5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) = (4 + 5)\mathbf{i} + (-2 + 7)\mathbf{j} = 9\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Se suele decir que magnitudes como la fuerza o la velocidad son vectoriales porque poseen tanto longitud como dirección, pero hay bastante más en esta af rmación de lo que pueda parecer a primera vista. Una magnitud vectorial debe respetar la suma de vectores (f gura 18) por lo que, si se dice que la fuerza es un vector, se está af rmando que la suma de fuerzas sigue la ley del paralelogramo. Dicho de otro modo, si dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre un objeto, entonces la fuerza resultante es la **suma de vectores** $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Se trata de un resultado físico que se puede comprobar experimentalmente. Fue conocido por los científ cos y los ingenieros mucho antes de que el concepto de vector se introdujera formalmente en la década del 1800.

EJEMPLO 6 Halle las fuerzas sobre los cables 1 y 2 de la f gura 19(A).



(A)



(B) Diagrama de fuerzas

FIGURA 19

Solución Sobre el punto P de la f gura 19(A) actúan tres fuerzas: la fuerza $\mathbf{F}_g$, debida a la gravedad, de 100 kg = 980 newtons ($g = 9{,}8$ m/s^2) que actúa verticalmente hacia abajo y dos fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan a través de los cables 1 y 2, como se indica en la f gura 19(B).

Sean $f_1 = \|\mathbf{F}_1\|$ y $f_2 = \|\mathbf{F}_2\|$. Como $\mathbf{F}_1$ forma un ángulo de 125° (el ángulo suplementario de 55°) con el eje de las x positivas y $\mathbf{F}_2$ forma un ángulo de 30°, se puede utilizar la ecuación ec. (1) y la tabla que se encuentra en la nota al margen para expresar estos tres vectores en términos de sus componentes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= f_1 \langle \cos 125°, \operatorname{sen} 125° \rangle \approx f_1 \langle -0{,}573, 0{,}819 \rangle \\
\mathbf{F}_2 &= f_2 \langle \cos 30°, \operatorname{sen} 30° \rangle \approx f_2 \langle 0{,}866, 0{,}5 \rangle \\
\mathbf{F}_g &= \langle 0, -980 \rangle
\end{aligned}$$

Ahora, observe que el punto P no está en movimiento, por lo que la fuerza total sobre P es cero:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_g = \mathbf{0}$$

$$f_1\langle -0{,}573, 0{,}819\rangle + f_2\langle 0{,}866, 0{,}5\rangle + \langle 0, -980\rangle = \langle 0, 0\rangle$$

De aquí se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$-0{,}573f_1 + 0{,}866f_2 = 0 \qquad 0{,}819f_1 + 0{,}5f_2 - 980 = 0$$

Según la primera ecuación, $f_2 = (\frac{0{,}573}{0{,}866})f_1$. Sustituyendo en la segunda ecuación, se obtiene:

$$0{,}819f_1 + 0{,}5\left(\frac{0{,}573}{0{,}866}\right)f_1 - 980 \approx 1{,}15f_1 - 980 = 0$$

Por tanto, las fuerzas, en newtons, son:

$$f_1 \approx \frac{980}{1{,}15} \approx 852 \text{ N} \qquad \text{y} \qquad f_2 \approx \left(\frac{0{,}573}{0{,}866}\right)852 \approx 564 \text{ N}$$

■

Se finaliza esta sección con la desigualdad triangular. La figura 20 muestra la suma de vectores $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ para tres vectores diferentes $\mathbf{w}$ de la misma norma. Observe que la norma $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ varía, dependiendo del ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Por tanto, en general $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ no es igual a la suma $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$. Lo que sí se puede afirmar es que $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ es *a lo sumo* igual a la suma $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$. Esto se corresponde con que la norma de un lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las normas de los otros dos lados. Se puede obtener una demostración formal utilizando el producto escalar (vea el problema 88 de la sección 13.3).

TEOREMA 2 Desigualdad triangular Dados dos vectores cualesquiera $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Se asume la igualdad si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ o si $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$, siendo $\lambda \geq 0$.

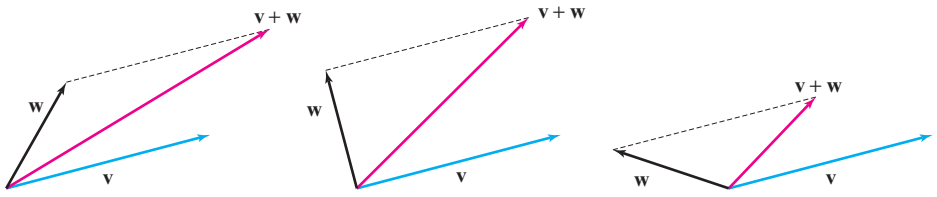


FIGURA 20 La norma de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ depende del ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

13.1 RESUMEN

- Un *vector* $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ queda determinado por su punto base P (la "cola") y un punto terminal Q (la "cabeza").
- Componentes de $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ donde $P = (a_1, b_1)$ y $Q = (a_2, b_2)$:

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$

donde $a = a_2 - a_1$, $b = b_2 - b_1$.

- Norma o longitud: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- La *norma* $\|\mathbf{v}\|$ es la distancia de P a Q.
- El *vector de posición* de $P_0 = (a, b)$ es el vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ que apunta desde el origen O a P_0.

- Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *equivalentes* si uno es la traslación del otro: poseen la misma longitud, dirección y sentido pero posiblemente distintos puntos base. Dos vectores son equivalentes si y sólo si tienen las mismas componentes.
- Salvo que se indique lo contrario, se supondrá que todos los vectores están basados en el origen.
- El *vector cero* es el vector $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$ de norma 0.
- La *suma de vectores* se def ne de forma geométrica mediante la *ley del paralelogramo*. En componentes:

$$\langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle$$

- La *multiplicación por un escalar*: $\lambda\mathbf{v}$ es el vector de norma $|\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$ en el mismo sentido que $\mathbf{v}$, si $\lambda > 0$ y en el sentido opuesto si $\lambda < 0$. En componentes:

$$\lambda\,\langle a, b\rangle = \langle \lambda a, \lambda b\rangle$$

- Dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son *paralelos* si $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar λ.
- Vector unitario que forma un ángulo θ con el eje de las x positivas: $\mathbf{e} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$
- Vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$: $\mathbf{e}_\mathbf{v} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$
- Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ forma un ángulo θ con el eje de las x positivas, entonces:

$$a = \|\mathbf{v}\|\cos\theta, \qquad b = \|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta, \qquad \mathbf{e}_\mathbf{v} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$$

- *Vectores de la base canónica*: $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$
- Todo vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ es una combinación lineal $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.
- *Desigualdad triangular*: $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

13.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Responda verdadero o falso. Todo vector no nulo es:
(a) Equivalente a un vector con base en el origen.
(b) Equivalente a un vector unitario con base en el origen.
(c) Paralelo a un vector con base en el origen.
(d) Paralelo a un vector unitario con base en el origen.

2. ¿Cuál es la norma de $-3\mathbf{a}$ si $\|\mathbf{a}\| = 5$?

3. Suponga que las componentes de $\mathbf{v}$ son $\langle 3, 1\rangle$. ¿De qué manera, si lo hacen, cambian las componentes al aplicar una traslación horizontal a $\mathbf{v}$ de dos unidades a la izquierda?

4. ¿Cuáles son las componentes del vector cero con base en $P = (3, 5)$?

5. ¿Verdadero o falso?
(a) Los vectores $\mathbf{v}$ y $-2\mathbf{v}$ son paralelos.
(b) Los vectores $\mathbf{v}$ y $-2\mathbf{v}$ tienen el mismo sentido.

6. Explique la propiedad conmutativa de la suma de vectores en términos de la ley del paralelogramo.

Problemas

1. Represente los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ de cola P y cabeza Q, y calcule sus normas. ¿Son equivalentes algunos de estos vectores?

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
P	$(2, 4)$	$(-1, 3)$	$(-1, 3)$	$(4, 1)$
Q	$(4, 4)$	$(1, 3)$	$(2, 4)$	$(6, 3)$

2. Represente el vector $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$ con base en $P = (-2, -1)$.

3. ¿Cuál es el punto terminal del vector $\mathbf{a} = \langle 1, 3\rangle$ con base en $P = (2, 2)$? Represente $\mathbf{a}$ y el vector $\mathbf{a}_0$ con base en el origen y equivalente a $\mathbf{a}$.

4. Sea $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, donde $P = (1, 1)$ y $Q = (2, 2)$. ¿Cuál es la cabeza del vector $\mathbf{v}'$ equivalente a $\mathbf{v}$ y con base en $(2, 4)$? ¿Cuál es la cabeza del vector $\mathbf{v}_0$ equivalente a $\mathbf{v}$ y con base en el origen? Represente $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v}'$.

En los problemas 5-8, halle las componentes de $\overrightarrow{PQ}$.

5. $P = (3, 2)$, $Q = (2, 7)$

6. $P = (1, -4)$, $Q = (3, 5)$

7. $P = (3, 5)$, $Q = (1, -4)$

8. $P = (0, 2)$, $Q = (5, 0)$

En los problemas 9-14, realice el cálculo que se indica.

9. $\langle 2, 1\rangle + \langle 3, 4\rangle$

10. $\langle -4, 6\rangle - \langle 3, -2\rangle$

11. $5\,\langle 6, 2\rangle$

12. $4(\langle 1, 1\rangle + \langle 3, 2\rangle)$

13. $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right\rangle + \left\langle 3, \frac{10}{3}\right\rangle$

14. $\langle \ln 2, e\rangle + \langle \ln 3, \pi\rangle$

15. ¿Cuál de los vectores (A)-(C) de la figura 21 es equivalente a $\mathbf{v}-\mathbf{w}$?

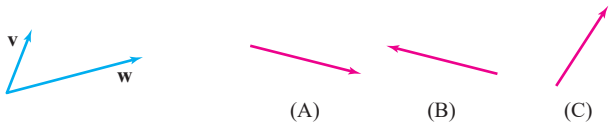


FIGURA 21

16. Represente $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ para los vectores de la figura 22.

FIGURA 22

17. Represente $2\mathbf{v}$, $-\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, y $2\mathbf{v}-\mathbf{w}$ para los vectores de la figura 23.

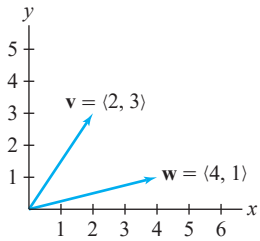


FIGURA 23

18. Represente $\mathbf{v}=\langle 1,3\rangle$, $\mathbf{w}=\langle 2,-2\rangle$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}-\mathbf{w}$.

19. Represente $\mathbf{v}=\langle 0,2\rangle$, $\mathbf{w}=\langle -2,4\rangle$, $3\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $2\mathbf{v}-2\mathbf{w}$.

20. Represente $\mathbf{v}=\langle -2,1\rangle$, $\mathbf{w}=\langle 2,2\rangle$, $\mathbf{v}+2\mathbf{w}$, $\mathbf{v}-2\mathbf{w}$.

21. Represente el vector $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}+\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{0}$ para $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de la figura 24(A).

22. Represente el vector suma $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4$ de la figura 24(B).

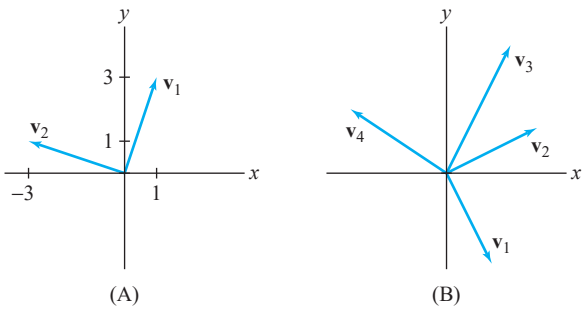


FIGURA 24

23. Sea $\mathbf{v}=\overrightarrow{PQ}$, donde $P=(-2,5)$, $Q=(1,-2)$. ¿Cuáles de los siguientes vectores, con las cabezas y colas dadas, son equivalentes a $\mathbf{v}$?

(a) $(-3,3)$, $(0,4)$ **(b)** $(0,0)$, $(3,-7)$

(c) $(-1,2)$, $(2,-5)$ **(d)** $(4,-5)$, $(1,4)$

24. ¿Cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\mathbf{v}=\langle 6,9\rangle$ y cuáles tienen el mismo sentido?

(a) $\langle 12,18\rangle$ **(b)** $\langle 3,2\rangle$ **(c)** $\langle 2,3\rangle$

(d) $\langle -6,-9\rangle$ **(e)** $\langle -24,-27\rangle$ **(f)** $\langle -24,-36\rangle$

En los problemas 25-28, represente los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ y determine si son equivalentes.

25. $A=(1,1)$, $B=(3,7)$, $P=(4,-1)$, $Q=(6,5)$

26. $A=(1,4)$, $B=(-6,3)$, $P=(1,4)$, $Q=(6,3)$

27. $A=(-3,2)$, $B=(0,0)$, $P=(0,0)$, $Q=(3,-2)$

28. $A=(5,8)$, $B=(1,8)$, $P=(1,8)$, $Q=(-3,8)$

En los problemas 29-32, ¿son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ paralelos? En caso afirmativo, ¿tienen el mismo sentido?

29. $A=(1,1)$, $B=(3,4)$, $P=(1,1)$, $Q=(7,10)$

30. $A=(-3,2)$, $B=(0,0)$, $P=(0,0)$, $Q=(3,2)$

31. $A=(2,2)$, $B=(-6,3)$, $P=(9,5)$, $Q=(17,4)$

32. $A=(5,8)$, $B=(2,2)$, $P=(2,2)$, $Q=(-3,8)$

En los problemas 33-36, sea $R=(-2,7)$. Calcule aquello que se indica en cada problema.

33. La norma de $\overrightarrow{OR}$.

34. Las componentes de $\mathbf{u}=\overrightarrow{PR}$, donde $P=(1,2)$.

35. El punto P tal que las componentes de $\overrightarrow{PR}$ sean $\langle -2,7\rangle$.

36. El punto Q tal que las componentes de $\overrightarrow{RQ}$ sean $\langle 8,-3\rangle$.

En los problemas 37-42, halle el vector que se indica.

37. Vector unitario $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ donde $\mathbf{v}=\langle 3,4\rangle$.

38. Vector unitario $\mathbf{e}_\mathbf{w}$ donde $\mathbf{w}=\langle 24,7\rangle$.

39. Vector de norma 4 en la dirección de $\mathbf{u}=\langle -1,-1\rangle$.

40. Vector unitario en la dirección opuesta a $\mathbf{v}=\langle -2,4\rangle$.

41. Vector unitario $\mathbf{e}$ formando un ángulo $\frac{4\pi}{7}$ con el eje x.

42. Vector $\mathbf{v}$ de norma 2 que forma un ángulo de $30°$ con el eje x.

43. Halle todos los escalares λ tales que la norma de $\lambda\langle 2,3\rangle$ sea 1.

44. Halle un vector $\mathbf{v}$ que cumpla $3\mathbf{v}+\langle 5,20\rangle=\langle 11,17\rangle$.

45. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P en el paralelogramo de la figura 25(A)?

46. Cuáles son las coordenadas a y b en el paralelogramo de la figura 25(B)?

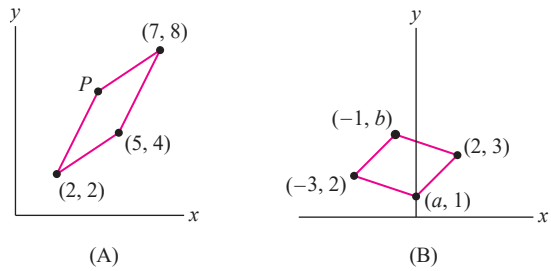


FIGURA 25

47. Sea $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{w}=\overrightarrow{AC}$, donde A, B, C son tres puntos distintos del plano. Relacione (a)-(d) con (i)-(iv). (*Indicación:* Realice un gráfico.)

(a) $-\mathbf{w}$ **(b)** $-\mathbf{v}$ **(c)** $\mathbf{w}-\mathbf{v}$ **(d)** $\mathbf{v}-\mathbf{w}$

(i) $\overrightarrow{CB}$ **(ii)** $\overrightarrow{CA}$ **(iii)** $\overrightarrow{BC}$ **(iv)** $\overrightarrow{BA}$

48. Halle las componentes y la norma de los siguientes vectores:

(a) $4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ **(b)** $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ **(c)** $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ **(d)** $\mathbf{i}-3\mathbf{j}$

En los problemas 49-52, calcule la combinación lineal.

49. $3\mathbf{j}+(9\mathbf{i}+4\mathbf{j})$

50. $-\frac{3}{2}\mathbf{i}+5(\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{2}\mathbf{i})$

51. $(3\mathbf{i}+\mathbf{j})-6\mathbf{j}+2(\mathbf{j}-4\mathbf{i})$

52. $3(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})+5(\mathbf{i}+4\mathbf{j})$

53. Para cada vector de posición $\mathbf{u}$ de puntos terminales A, B y C en la f gura 26, indique con un diagrama los múltiplos $r\mathbf{v}$ y $s\mathbf{w}$ tales que $\mathbf{u}=r\mathbf{v}+s\mathbf{w}$. Como ejemplo se proporciona la solución para $\mathbf{u}=\overrightarrow{OQ}$.

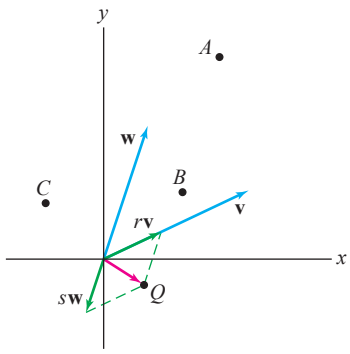


FIGURA 26

54. Represente el paralelogramo generado por $\mathbf{v}=\langle 1,4\rangle$ y $\mathbf{w}=\langle 5,2\rangle$. Añada el vector $\mathbf{u}=\langle 2,3\rangle$ a la representación y exprese $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

En los problemas 55 y 56, exprese $\mathbf{u}$ *como una combinación lineal* $\mathbf{u}=r\mathbf{v}+s\mathbf{w}$. *A continuación represente* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *y el paralelogramo formado por* $r\mathbf{v}$ *y* $s\mathbf{w}$.

55. $\mathbf{u}=\langle 3,-1\rangle$; $\mathbf{v}=\langle 2,1\rangle$, $\mathbf{w}=\langle 1,3\rangle$

56. $\mathbf{u}=\langle 6,-2\rangle$; $\mathbf{v}=\langle 1,1\rangle$, $\mathbf{w}=\langle 1,-1\rangle$

57. Calcule la norma de la fuerza sobre los cables 1 y 2 de la f gura 27.

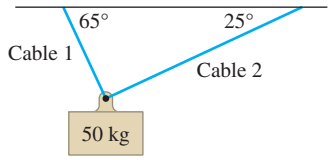


FIGURA 27

58. Determine la norma de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de la f gura 28, suponiendo que no hay fuerza neta sobre el objeto.

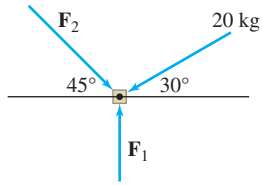


FIGURA 28

59. Un avión que vuela hacia el este a velocidad de 200 km/h se encuentra con un viento en la dirección noreste de 40 km/h . La velocidad resultante del avión es la suma de vectores $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ es la velocidad vectorial del avión y $\mathbf{v}_2$ es la velocidad vectorial del viento (f gura 29). El ángulo entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es $\frac{\pi}{4}$. Determine la *celeridad* del avión (la norma del vector $\mathbf{v}$).

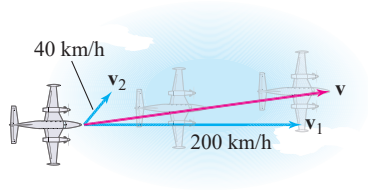


FIGURA 29

Problemas avanzados

Los problemas 60-62, hacen referencia a la f gura 30, que muestra un brazo robótico consistente en dos segmentos de normas L_1 *y* L_2 *respectivamente.*

60. Halle las componentes del vector $\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}$ en términos de θ_1 y de θ_2.

61. Sea $L_1=5$ y $L_2=3$. Halle $\mathbf{r}$ para $\theta_1=\frac{\pi}{3}$, $\theta_2=\frac{\pi}{4}$.

62. Sea $L_1=5$ y $L_2=3$. Pruebe que el conjunto de puntos a los que puede llegar en brazo robótico cuando $\theta_1=\theta_2$ es una elipse.

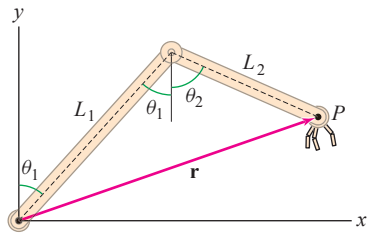


FIGURA 30

63. Use vectores para demostrar que las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de un paralelogramo se bisecan entre sí (f gura 31). *Indicación:* Observe que el punto medio de $\overline{BD}$ es el punto terminal de $\mathbf{w}+\frac{1}{2}(\mathbf{v}-\mathbf{w})$.

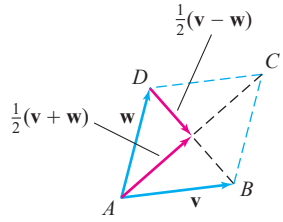


FIGURA 31

64. Use vectores para demostrar que los vectores que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan entre sí (f gura 32). *Indicación:* Pruebe que los puntos medios de estos segmentos son los puntos terminales de

$$\frac{1}{4}(2\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{z}) \quad \text{y de} \quad \frac{1}{4}(2\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{u})$$

65. Demuestre que dos vectores $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle c, d\rangle$ son perpendiculares si y sólo si $ac + bd = 0$.

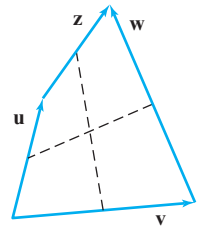
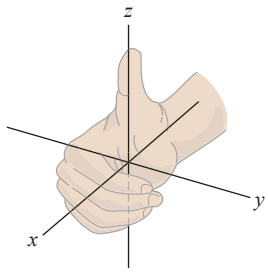


FIGURA 32

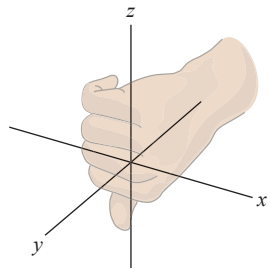
13.2 Vectores en tres dimensiones

En esta sección se amplían los conceptos sobre vectores introducidos en la sección anterior para un espacio tridimensional. En primer lugar, se realizan algunas observaciones preliminares sobre un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

Por convenio, se va a etiquetar los ejes como en la f gura 1(A), donde los lados positivos de los ejes se han etiquetado como x, y y z. Este etiquetado cumple la **regla de la mano derecha**, que signif ca que, cuando sitúe sus dedos rodeando el eje de las x positivas hacia las y positivas, el pulgar debe apuntar en la dirección de las z positivas. Los ejes en la f gura 1(B) no cumplen la regla de la mano derecha.



(A) Sistema de coordenadas estándar (cumple la regla de la mano derecha)



(B) Este sistema de coordenadas no cumple la regla de la mano derecha porque el pulgar apunta en la dirección de las z negativas.

FIGURA 1 Los dedos de la mano derecha rodean el eje de las x positivas hacia las y positivas.

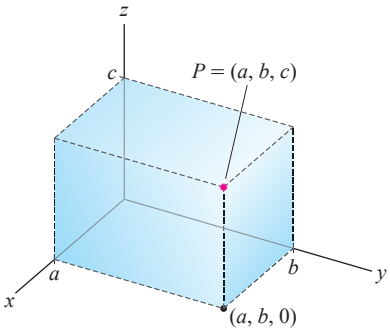


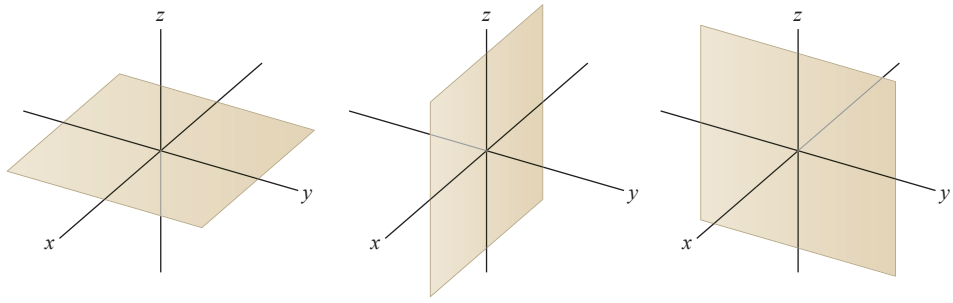
FIGURA 2

Cada punto del espacio tiene unas coordenadas únicas (a, b, c) respecto a los ejes (f gura 2). El conjunto de todas las ternas (a, b, c) se denota como $\mathbf{R}^3$. Los **planos coordenados** en $\mathbf{R}^3$ se def nen considerando una de las coordenadas igual a cero (f gura 3). El plano xy está formado por los puntos $(a, b, 0)$ y queda def nido por la ecuación $z = 0$. De manera análoga, $x = 0$ def ne el plano yz formado por los puntos $(0, b, c)$ e $y = 0$ def ne el plano xz formado por los puntos $(a, 0, c)$. Los planos coordenados dividen $\mathbf{R}^3$ en ocho **octantes** (análogos a los cuatro cuadrantes del plano). Cada octante corresponde a las posibles combinaciones de signos de las coordenadas. El conjunto de puntos (a, b, c) con $a, b, c > 0$ se denomina el **primer octante**.

Como en dos dimensiones, se obtiene la fórmula de la distancia entre dos puntos en $\mathbf{R}^3$ del teorema de Pitágoras.

TEOREMA 1 Fórmula de la distancia en $\mathbf{R}^3$ La distancia $|P - Q|$ entre los puntos $P = (a_1, b_1, c_1)$ y $Q = (a_2, b_2, c_2)$ es:

$$|P-Q| = \sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2} \qquad \boxed{1}$$



$z = 0$ define el plano xy | $y = 0$ define el plano xz | $x = 0$ define el plano yz

FIGURA 3

Demostración En primer lugar, aplique la fórmula de la distancia en el plano a los puntos P y R (f gura 4):

$$|P - R|^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2$$

Ahora observe que $\triangle PRQ$ es un triángulo rectángulo [f gura 4(B)] y utilice el teorema de Pitágoras:

$$|P - Q|^2 = |P - R|^2 + |R - Q|^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2$$ ■

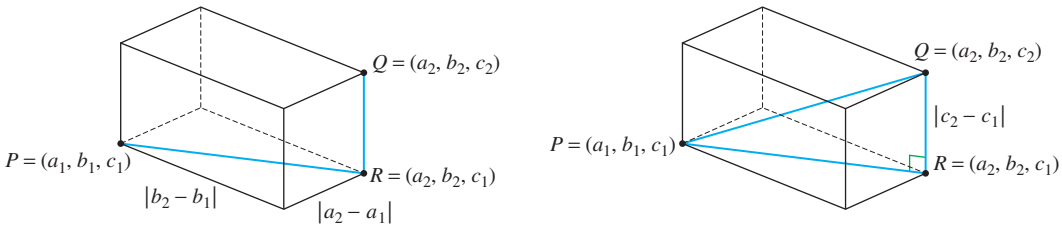


FIGURA 4 Cálculo de $|P - Q|$ usando el triángulo rectángulo $\triangle PRQ$.

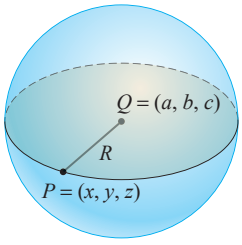


FIGURA 5 Esfera de centro (a, b, c) y radio R.

La esfera de radio R y centro $Q = (a, b, c)$ está formada por todos los puntos $P = (x, y, z)$ que se encuentran a una distancia R de Q (f gura 5). Por la fórmula de la distancia, las coordenadas de $P = (x, y, z)$ deben cumplir:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = R$$

Elevando al cuadrado en ambos lados, se obtiene la ecuación estándar de una esfera [ec. (3) más abajo].

Considere ahora la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad \boxed{2}$$

En el plano xy, la ec. (2) def ne la circunferencia de centro (a, b) y radio R. Sin embargo, como una ecuación en $\mathbf{R}^3$, def ne un cilindro circular recto de radio R cuyo eje central es la recta vertical que pasa por $(a, b, 0)$ (f gura 6). De hecho, un punto (x, y, z) cumple la ec. (2) para cualquier valor de z si (x, y) se encuentra sobre la circunferencia. Suele ser claro, a partir del contexto, si nos estamos ref riendo a la circunferencia o al cilindro:

$$\text{Circunferencia} = \{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}$$
$$\text{Cilindro circular recto} = \{(x, y, z) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}$$

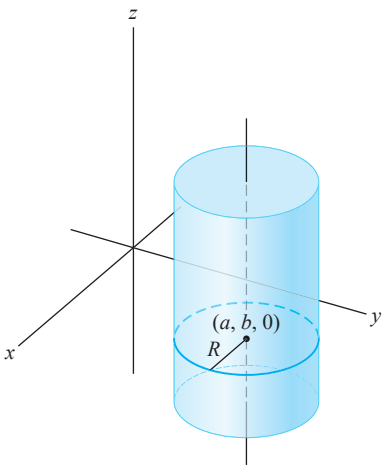


FIGURA 6 Cilindro circular de radio R centrado en $(a, b, 0)$.

Ecuaciones de la esfera y del cilindro Una ecuación de la esfera en $\mathbf{R}^3$ de centro $Q = (a, b, c)$ y radio R es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \qquad \boxed{3}$$

Una ecuación del cilindro en $\mathbf{R}^3$ de radio R cuyo eje central es la recta vertical que pasa por $(a, b, 0)$ es:

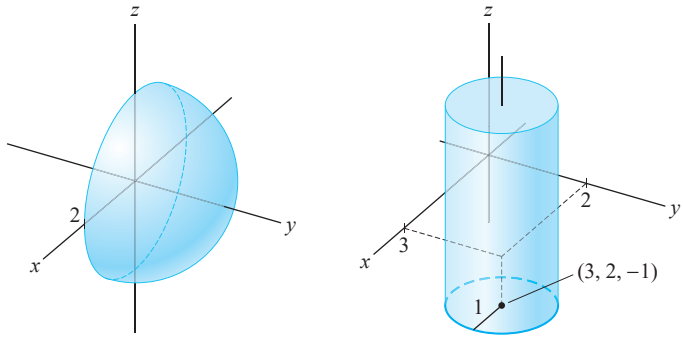
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad \boxed{4}$$

EJEMPLO 1 Describa los conjuntos de los puntos determinados por las siguientes condiciones:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad y \geq 0$ **(b)** $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1, \quad z \geq -1$

Solución

(a) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ def ne una esfera centrada en el origen y de radio 2. La desigualdad $y \geq 0$ es cierta para los puntos que se encuentran en la parte positiva del plano xz. Se obtiene la semiesfera de radio 2 que se ilustra en la f gura 7(A).



(A) (B)

FIGURA 7 Semiesfera y parte superior del cilindro.

(b) La ecuación $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ def ne un cilindro de radio 1 cuyo eje central es la recta vertical que pasa por $(3, 2, 0)$. La parte del cilindro para la que $z \geq -1$ se ilustra en la f gura 7(B). ■

Conceptos vectoriales

Tal y como ocurre en el plano, un vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ en $\mathbf{R}^3$ queda determinado por un punto inicial P y un punto terminal Q (f gura 8). Si $P = (a_1, b_1, c_1)$ y $Q = (a_2, b_2, c_2)$, entonces la **norma** o **longitud** de $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, que se denota como $\|\mathbf{v}\|$, es la distancia de P a Q:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

La terminología y propiedades básicas que se trataron en la sección previa también son válidas en $\mathbf{R}^3$ con pequeños cambios.

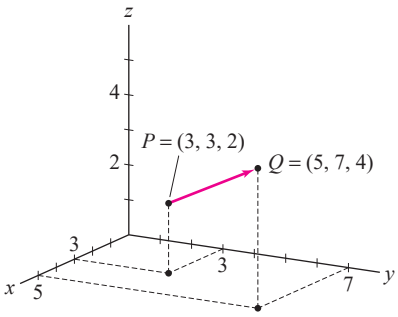


FIGURA 8 Un vector $\overrightarrow{PQ}$ en el espacio 3-dimensional.

- Se dice que a un vector $\mathbf{v}$ se le ha aplicado una **traslación** si ha sido desplazado pero sin cambiar ni su dirección, ni su norma, ni su sentido.
- Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son **equivalentes** si $\mathbf{w}$ es una traslación de $\mathbf{v}$; es decir, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tienen la misma norma, dirección y sentido.

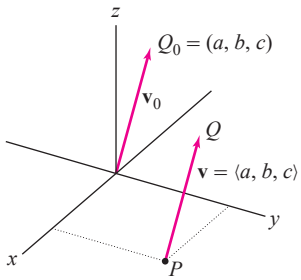


FIGURA 9 Un vector $\mathbf{v}$ y su trasladado con base en el origen.

El convenio sobre los puntos base continúa siendo válido: se supone que los vectores están basados en el origen, salvo que se indique lo contrario.

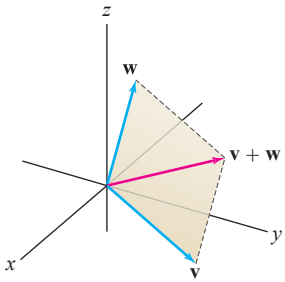


FIGURA 10 La suma de vectores se def ne por medio de la ley del paralelogramo.

- Dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son **paralelos** si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ para algún escalar λ.
- El **vector de posición** de un punto Q_0 es el vector $\mathbf{v}_0 = \overrightarrow{OQ_0}$ con base en el origen (f gura 9).
- Un vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ de componentes $\langle a, b, c \rangle$ es equivalente al vector $\mathbf{v}_0 = \overrightarrow{OQ_0}$ basado en el origen siendo $Q_0 = (a, b, c)$ (f gura 9).
- Las **componentes** de $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, donde $P = (a_1, b_1, c_1)$ y $Q = (a_2, b_2, c_2)$, son las diferencias $a = a_2 - a_1$, $b = b_2 - b_1$, $c = c_2 - c_1$; es decir:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle - \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$$

Por ejemplo, si $P = (3, -4, -4)$ y $Q = (2, 5, -1)$, entonces:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, -1 \rangle - \langle 3, -4, -4 \rangle = \langle -1, 9, 3 \rangle$$

- Dos vectores son equivalentes si y sólo si tienen las mismas componentes.
- La suma de vectores y la multiplicación por un escalar se def nen como en el caso bidimensional. La suma de vectores se def ne mediante la ley del paralelogramo (f gura 10).
- En términos de componentes, si $\mathbf{v} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{v} &= \lambda\langle a_1, b_1, c_1 \rangle = \langle \lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1 \rangle \\ \mathbf{v} + \mathbf{w} &= \langle a_1, b_1, c_1 \rangle + \langle a_2, b_2, c_2 \rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 \rangle \end{aligned}$$

- La suma de vectores es conmutativa, es asociativa y cumple la propiedad distributiva respecto a la multiplicación por un escalar (teorema 1 en la sección 13.1).

EJEMPLO 2 Cálculos con vectores Calcule $\|\mathbf{v}\|$ y $6\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v} = \langle 3, -1, 2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, 6, -8 \rangle$.

Solución

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14} \\ 6\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w} &= 6\langle 3, -1, 2 \rangle - \frac{1}{2}\langle 4, 6, -8 \rangle = \\ &= \langle 18, -6, 12 \rangle - \langle 2, 3, -4 \rangle = \\ &= \langle 16, -9, 16 \rangle \end{aligned}$$

Los **vectores de la base canónica** en $\mathbf{R}^3$ son:

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Todo vector es una **combinación lineal** de los vectores de la base canónica (f gura 11):

$$\langle a, b, c \rangle = a\langle 1, 0, 0 \rangle + b\langle 0, 1, 0 \rangle + c\langle 0, 0, 1 \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Por ejemplo, $\langle -9, -4, 17 \rangle = -9\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$.

EJEMPLO 3 Halle un vector unitario $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ en la dirección de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Solución Como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$, se tiene:

$$\mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{29}}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = \left\langle \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

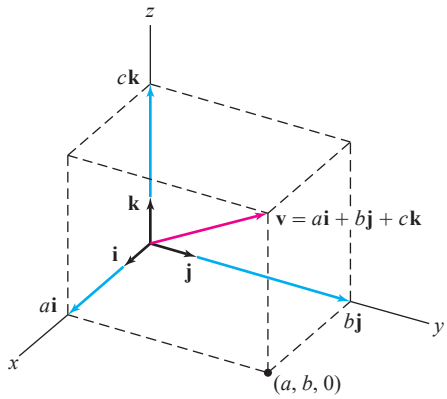


FIGURA 11 Expresión de $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ como la suma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Ecuaciones paramétricas de una recta

Aunque los conceptos básicos de vectores en dos y en tres dimensiones son esencialmente los mismos, hay una diferencia esencial en la forma en que se describen las rectas. Una recta en $\mathbf{R}^2$ se def ne mediante una única ecuación lineal como $y = mx + b$. En $\mathbf{R}^3$, una única ecuación lineal describe un plano y no una recta. A continuación se van a describir las rectas en $\mathbf{R}^3$ en su forma paramétrica.

Observe en primer lugar, que una recta $\mathcal{L}_0$ por el origen está formada por los puntos terminales de los múltiplos de un vector no nulo $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, como se muestra en la f gura 12(A). De forma más precisa, sea:

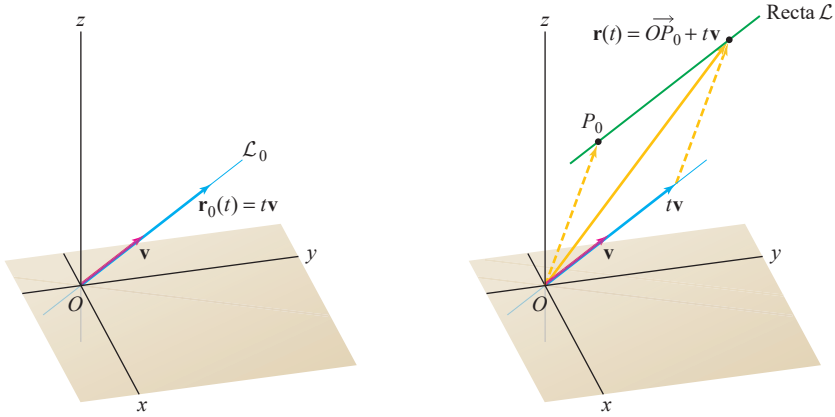
$$\mathbf{r}_0 = t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc \rangle \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

Entonces la recta $\mathcal{L}_0$ consiste en los puntos terminales (ta, tb, tc) de los vectores $\mathbf{r}_0$ cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$. Las coordenadas (x, y, z) de los puntos en la recta vienen dadas por las ecuaciones paramétricas:

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct$$

Suponga, de forma más general, que se quisiera parametrizar la recta $\mathcal{L}$ paralela a $\mathbf{v}$ que pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ como en la f gura 12(B). Se debe trasladar la recta $\mathcal{L}_0$ de tal manera que pase por P_0. Para hacerlo, se suma el vector de posición $\overrightarrow{OP_0}$ a los múltiplos $t\mathbf{v}$:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle$$



(A) Recta por el origen (múltiplos de $\mathbf{v}$). (B) Recta por P_0 en la dirección de $\mathbf{v}$.

FIGURA 12

El punto terminal de $\mathbf{r}(t)$ describe $\mathcal{L}$ cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$. El vector $\mathbf{v}$ se denomina un **vector director** de $\mathcal{L}$ y las coordenadas (x, y, z) de los puntos de la recta $\mathcal{L}$ vienen dadas por las ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

Ecuación de una recta (Forma punto-dirección) La recta $\mathcal{L}$ que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la dirección dada por $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ queda descrita mediante:

Parametrización vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v} = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle \qquad \boxed{5}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct \qquad \boxed{6}$$

El parámetro t varía en $-\infty < t < +\infty$.

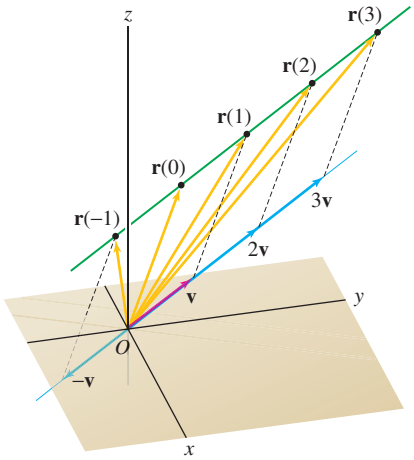


FIGURA 13 El punto terminal de $\mathbf{r}(t)$ describe una recta cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Las ecuaciones paramétricas especif can las coordenadas x, y y z de un punto de la recta como función del parámetro t. Esta situación ya se había examinado al tratar las curvas paramétricas en la sección 12.1. Lo que es ahora nuevo es la noción de parametrización vectorial, la idea que $\mathbf{r}(t)$ representa un vector cuyo punto terminal describe una recta cuando t toma valores de $-\infty$ a $+\infty$ (f gura 13).

EJEMPLO 4 Halle una parametrización vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $P_0 = (3, -1, 4)$ con vector director $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 7 \rangle$.

Solución Según la ec. (5), una parametrización vectorial vendría dada por:

$$\mathbf{r}(t) = \underbrace{\langle 3, -1, 4 \rangle}_{\text{Coordenadas de } P_0} + \underbrace{t\langle 2, 1, 7 \rangle}_{\text{Vector director}} = \langle 3 + 2t, -1 + t, 4 + 7t \rangle$$

Las correspondientes ecuaciones paramétricas son $x = 3 + 2t, y = -1 + t, z = 4 + 7t$. ■

La parametrización de una recta $\mathcal{L}$ no es única. Se puede escoger cualquier punto P_0 es $\mathcal{L}$ y reemplazar el vector director $\mathbf{v}$ por cualquier múltiplo $\lambda\mathbf{v}$ siendo $\lambda \neq 0$. Sin embargo, dos rectas en $\mathbf{R}^3$ coinciden si son paralelas y pasan por un punto común, de tal manera que siempre se puede comprobar si dos parametrizaciones describen a la misma recta.

EJEMPLO 5 Diferentes parametrizaciones de la misma recta Pruebe que:

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle -2, 1, 3 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = \langle -3, 3, 6 \rangle + t\langle 4, -2, -6 \rangle$$

parametrizan la misma recta.

Solución El vector director de la recta $\mathbf{r}_1$ es $\mathbf{v} = \langle -2, 1, 3 \rangle$, mientras que el vector director de $\mathbf{r}_2$ es $\mathbf{w} = \langle 4, -2, -6 \rangle$. Estos dos vectores son paralelos porque $\mathbf{w} = -2\mathbf{v}$. Por tanto, las rectas descritas por $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son paralelas. Se debe comprobar que tienen un punto en común. Elija un punto cualquiera en $\mathbf{r}_1$, por ejemplo $P = (1, 1, 0)$ [que corresponde a $t = 0$]. Este punto se encuentra en $\mathbf{r}_2$ si existe un valor de t tal que:

$$\langle 1, 1, 0 \rangle = \langle -3, 3, 6 \rangle + t\langle 4, -2, -6 \rangle \qquad \boxed{7}$$

De aquí se obtienen las tres ecuaciones:

$$1 = -3 + 4t, \qquad 1 = 3 - 2t, \qquad 0 = 6 - 6t$$

Estas tres ecuaciones se cumplen para $t = 1$. Por tanto, P también pertenece a $\mathbf{r}_2$. En consecuencia $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ parametrizan la misma recta. Si la ec. (7) no tuviera solución, la conclusión sería que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son paralelas pero que no coinciden. ■

■ **EJEMPLO 6** **Intersección de dos rectas** Determine si las siguientes dos rectas intersecan:

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 1, 0, 1\rangle + t\langle 3, 3, 5\rangle$$
$$\mathbf{r}_2(t) = \langle 3, 6, 1\rangle + t\langle 4, -2, 7\rangle$$

Solución Las dos rectas intersecan si existen valores de los parámetros t_1 y t_2 tales que $\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_2(t_2)$, es decir, si:

$$\langle 1, 0, 1\rangle + t_1\langle 3, 3, 5\rangle = \langle 3, 6, 1\rangle + t_2\langle 4, -2, 7\rangle \qquad \boxed{8}$$

Esto es equivalente a tres ecuaciones para las componentes:

$$x = 1 + 3t_1 = 3 + 4t_2, \qquad y = 3t_1 = 6 - 2t_2, \qquad z = 1 + 5t_1 = 1 + 7t_2 \qquad \boxed{9}$$

Resuelva las dos primeras ecuaciones en t_1 y t_2. Restando la segunda ecuación de la primera, se obtiene que $1 = 6t_2 - 3$ o $t_2 = \frac{2}{3}$. Usando este valor en la segunda ecuación, se obtiene $t_1 = 2 - \frac{2}{3}t_2 = \frac{14}{9}$. Los valores de $t_1 = \frac{14}{9}$ y de $t_2 = \frac{2}{3}$ cumplen las dos primeras ecuaciones y, por tanto, $\mathbf{r}_1(t_1)$ y $\mathbf{r}_2(t_2)$ tienen las mismas coordenadas x e y (f gura 14). Sin embargo, no tienen la misma coordenada z porque t_1 y t_2 no cumplen la tercera ecuación en (9):

$$1 + 5\left(\frac{14}{9}\right) \neq 1 + 7\left(\frac{2}{3}\right)$$

Así, la ec. (8) no tiene solución y las rectas no se intersecan. ■

ATENCIÓN *En la ec. (8) no se puede suponer que los dos valores de los parámetros t_1 y t_2 son el mismo. El punto de intersección puede corresponder a diferentes valores de los parámetros en las dos rectas.*

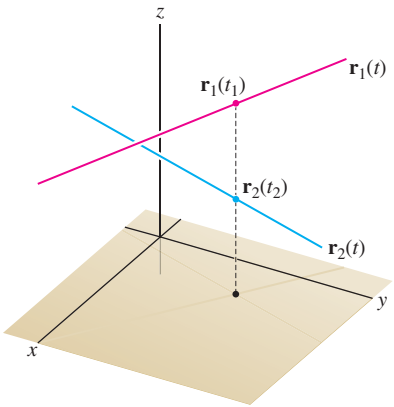


FIGURA 14 Las rectas $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ no se intersecan, pero los puntos $\mathbf{r}_1(t_1)$ y $\mathbf{r}_2(t_2)$ tienen las mismas coordenadas x e y.

Se puede describir la recta $\mathcal{L}$ que pasa por dos puntos $P = (a_1, b_1, c_1)$ y $Q = (a_2, b_2, c_2)$ mediante la parametrización vectorial (f gura 15):

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ}$$

¿Por qué pasa $\mathbf{r}$ por P y Q? La razón es que $\mathbf{r}(0) = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{r}(1) = \overrightarrow{OQ}$. Por tanto, $\mathbf{r}(t)$ describe el segmento $\overline{PQ}$ que une a P y Q cuando t va de 0 a 1. De forma explícita:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle a_1, b_1, c_1\rangle + t\langle a_2, b_2, c_2\rangle$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = a_1 + (a_2 - a_1)t, \qquad y = b_1 + (b_2 - b_1)t, \qquad z = c_1 + (c_2 - c_1)t$$

El **punto medio** de $\overline{PQ}$ corresponde a $t = \frac{1}{2}$:

$$\text{Punto medio de } \overline{PQ} = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}, \frac{c_1 + c_2}{2}\right)$$

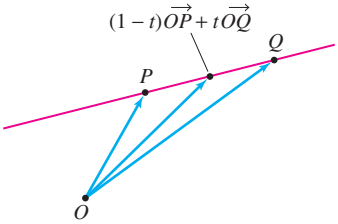


FIGURA 15 Recta por dos puntos P y Q.

Recta que pasa por dos puntos La recta que pasa por $P = (a_1, b_1, c_1)$ y $Q = (a_2, b_2, c_2)$ queda descrita por:

Parametrización vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} = (1-t)\langle a_1, b_1, c_1\rangle + t\langle a_2, b_2, c_2\rangle \qquad \textbf{10}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$x = a_1 + (a_2 - a_1)t, \quad y = b_1 + (b_2 - b_1)t, \quad z = c_1 + (c_2 - c_1)t \qquad \textbf{11}$$

para $-\infty < t < +\infty$. Esta parametrización describe el segmento $\overline{PQ}$ de P a Q cuando t va de 0 a 1.

EJEMPLO 7 Parametrice el segmento $\overline{PQ}$ donde $P = (1, 0, 4)$ y $Q = (3, 2, 1)$. Halle el punto medio del segmento.

Solución La recta que pasa por $P = (1, 0, 4)$ y $Q = (3, 2, 1)$ admite la parametrización:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\langle 1, 0, 4\rangle + t\langle 3, 2, 1\rangle = \langle 1 + 2t, 2t, 4 - 3t\rangle$$

El segmento $\overline{PQ}$ se describe cuando $0 \le t \le 1$. El punto medio de $\overline{PQ}$ es el punto terminal de:

$$\mathbf{r}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\langle 1, 0, 4\rangle + \frac{1}{2}\langle 3, 2, 1\rangle = \left\langle 2, 1, \frac{5}{2}\right\rangle$$

Dicho de otro modo, el punto medio es $(2, 1, \frac{5}{2})$.

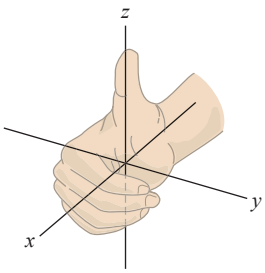


FIGURA 16

13.2 RESUMEN

- Los ejes en $\mathbf{R}^3$ se etiquetan de manera que cumplan la *regla de la mano derecha*: cuando los dedos de su mano derecha rodean el eje de las x positivas hacia las y positivas, el pulgar apunta hacia la dirección de las z positivas (figura 16).

Esfera de centro (a, b, c) y radio R	$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$
Cilindro de radio R y eje vertical que pasa por $(a, b, 0)$	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

- La notación y terminología para vectores en el plano también es válida para vectores en $\mathbf{R}^3$.
- La norma (o longitud) de $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, donde $P = (a_1, b_1, c_1)$ y $Q = (a_2, b_2, c_2)$, es:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

- Ecuaciones de la recta que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene vector director $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$:

$$\textit{Parametrización vectorial:} \quad \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t\mathbf{v} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle$$
$$\textit{Ecuaciones paramétricas:} \quad x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

- Ecuación de la recta que pasa por $P = (a_1, b_1, c_1)$ y $Q = (a_2, b_2, c_2)$:

$$\textit{Parametrización vectorial:} \quad \mathbf{r}(t) = (1-t)\langle a_1, b_1, c_1\rangle + t\langle a_2, b_2, c_2\rangle$$
$$\textit{Ecuaciones paramétricas:} \quad x = a_1 + (a_2 - a_1)t, \quad y = b_1 + (b_2 - b_1)t,$$
$$z = c_1 + (c_2 - c_1)t$$

El segmento $\overline{PQ}$ se parametriza mediante $\mathbf{r}(t)$ para $0 \le t \le 1$. El punto medio de $\overline{PQ}$ es el punto terminal de $\mathbf{r}(\frac{1}{2})$, es decir $(\frac{1}{2}(a_1 + a_2), \frac{1}{2}(b_1 + b_2), \frac{1}{2}(c_1 + c_2))$.

13.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es el punto terminal del vector $\mathbf{v} = \langle 3, 2, 1\rangle$ con base en el punto $P = (1, 1, 1)$?

2. ¿Cuáles son las componentes del vector $\mathbf{v} = \langle 3, 2, 1\rangle$ basado en el punto $P = (1, 1, 1)$?

3. Si $\mathbf{v} = -3\mathbf{w}$, entonces (elija la respuesta correcta):

(a) $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelos.

(b) $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tienen el mismo sentido.

4. ¿Cuál de los siguientes vectores es un vector director para la recta que pasa por $P = (3, 2, 1)$ y $Q = (1, 1, 1)$?

(a) $\langle 3, 2, 1\rangle$ **(b)** $\langle 1, 1, 1\rangle$ **(c)** $\langle 2, 1, 0\rangle$

5. ¿Cuántos vectores directores diferentes puede tener una recta?

6. ¿Verdadero o falso? Si $\mathbf{v}$ es un vector director de una recta $\mathcal{L}$, entonces $-\mathbf{v}$ también es un vector director de $\mathcal{L}$.

Problemas

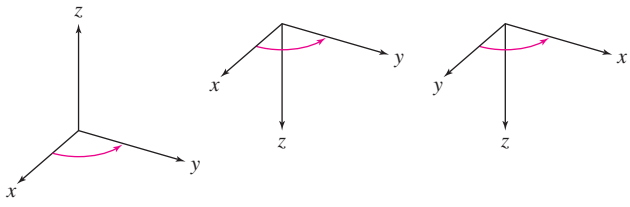
1. Represente el vector $\mathbf{v} = \langle 1, 3, 2\rangle$ y calcule su norma.

2. Sea $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0Q_0}$, donde $P_0 = (1, -2, 5)$ y $Q_0 = (0, 1, -4)$. ¿Cuáles de los siguientes vectores (de cola P y cabeza Q) son equivalentes a $\mathbf{v}$?

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
P	$(1, 2, 4)$	$(1, 5, 4)$	$(0, 0, 0)$	$(2, 4, 5)$
Q	$(0, 5, -5)$	$(0, -8, 13)$	$(-1, 3, -9)$	$(1, 7, 4)$

3. Represente el vector $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 0\rangle$ con base en $P = (0, 1, 1)$. Describa este vector de la forma $\overrightarrow{PQ}$ para algún punto Q y represente el vector $\mathbf{v}_0$ con base en el origen y equivalente a $\mathbf{v}$.

4. Determine si los sistemas de coordenadas (A)-(C) de la figura 17 cumplen la regla de la mano derecha.



(A) (B) (C)

FIGURA 17

En los problemas 5-8, halle las componentes del vector $\overrightarrow{PQ}$.

5. $P = (1, 0, 1)$, $Q = (2, 1, 0)$

6. $P = (-3, -4, 2)$, $Q = (1, -4, 3)$

7. $P = (4, 6, 0)$, $Q = (-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 1)$

8. $P = (-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 1)$, $Q = (4, 6, 0)$

En los problemas 9-12, sea $R = (1, 4, 3)$.

9. Calcule la norma de $\overrightarrow{OR}$.

10. Halle el punto Q tal que las componentes de $\mathbf{v} = \overrightarrow{RQ}$ sean $\langle 4, 1, 1\rangle$ y represente $\mathbf{v}$.

11. Halle el punto P tal que las componentes de $\mathbf{w} = \overrightarrow{PR}$ sean $\langle 3, -2, 3\rangle$, y represente $\mathbf{w}$.

12. Halle las componentes de $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR}$, donde $P = (1, 2, 2)$.

13. Sea $\mathbf{v} = \langle 4, 8, 12\rangle$. ¿Cuál de los siguientes vectores es paralelo a $\mathbf{v}$? ¿Cuál tiene el mismo sentido?

(a) $\langle 2, 4, 6\rangle$ **(b)** $\langle -1, -2, 3\rangle$

(c) $\langle -7, -14, -21\rangle$ **(d)** $\langle 6, 10, 14\rangle$

En los problemas 14-17, determine si $\overrightarrow{AB}$ es equivalente a $\overrightarrow{PQ}$.

14. $A = (1, 1, 1)$ $B = (3, 3, 3)$
$P = (1, 4, 5)$ $Q = (3, 6, 7)$

15. $A = (1, 4, 1)$ $B = (-2, 2, 0)$
$P = (2, 5, 7)$ $Q = (-3, 2, 1)$

16. $A = (0, 0, 0)$ $B = (-4, 2, 3)$
$P = (4, -2, -3)$ $Q = (0, 0, 0)$

17. $A = (1, 1, 0)$ $B = (3, 3, 5)$
$P = (2, -9, 7)$ $Q = (4, -7, 13)$

En los problemas 18-23, calcule las combinaciones lineales.

18. $5\langle 2, 2, -3\rangle + 3\langle 1, 7, 2\rangle$

19. $-2\langle 8, 11, 3\rangle + 4\langle 2, 1, 1\rangle$

20. $6(4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) - 3(2\mathbf{i} + 7\mathbf{k})$

21. $\frac{1}{2}\langle 4, -2, 8\rangle - \frac{1}{3}\langle 12, 3, 3\rangle$

22. $5(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - 3(2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + 7(2\mathbf{k} - \mathbf{i})$

23. $4\langle 6, -1, 1\rangle - 2\langle 1, 0, -1\rangle + 3\langle -2, 1, 1\rangle$

En los problemas 24-27, halle el vector que se indica.

24. $\mathbf{e}_\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 2\rangle$.

25. $\mathbf{e}_{\mathbf{w}}$, donde $\mathbf{w} = \langle 4, -2, -1 \rangle$.

26. Vector unitario en la dirección de $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 7 \rangle$.

27. Vector unitario de dirección opuesta a $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 2 \rangle$.

28. Represente los siguientes vectores y halle sus componentes y normas.

(a) $4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ **(b)** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(c) $4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ **(d)** $12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los problemas 29-36, halle una parametrización vectorial de la recta que se indica.

29. Pasa por $P = (1, 2, -8)$, vector director $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 3 \rangle$.

30. Pasa por $P = (4, 0, 8)$, vector director $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 1 \rangle$.

31. Pasa por $P = (4, 0, 8)$, vector director $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

32. Pasa por O, vector director $\mathbf{v} = \langle 3, -1, -4 \rangle$.

33. Pasa por $(1, 1, 1)$ y $(3, -5, 2)$.

34. Pasa por $(-2, 0, -2)$ y $(4, 3, 7)$.

35. Pasa por O y $(4, 1, 1)$.

36. Pasa por $(1, 1, 1)$ y es paralela a la recta que pasa por $(2, 0, -1)$ y $(4, 1, 3)$.

En los problemas 37-40, halle ecuaciones paramétricas para la recta que se indica.

37. Perpendicular al plano xy, pasa por el origen.

38. Perpendicular al plano yz, pasa por $(0, 0, 2)$.

39. Paralela a la recta que pasa por $(1, 1, 0)$ y por $(0, -1, -2)$, pasa por $(0, 0, 4)$.

40. Pasa por $(1, -1, 0)$ y $(0, -1, 2)$.

41. ¿Cuál de las siguientes constituye una parametrización de la recta que pasa por $P = (4, 9, 8)$ y que es perpendicular al plano xz (figura 18)?

(a) $\mathbf{r}(t) = \langle 4, 9, 8 \rangle + t \langle 1, 0, 1 \rangle$ **(b)** $\mathbf{r}(t) = \langle 4, 9, 8 \rangle + t \langle 0, 0, 1 \rangle$

(c) $\mathbf{r}(t) = \langle 4, 9, 8 \rangle + t \langle 0, 1, 0 \rangle$ **(d)** $\mathbf{r}(t) = \langle 4, 9, 8 \rangle + t \langle 1, 1, 0 \rangle$

42. Halle una parametrización de la recta que pasa por $P = (4, 9, 8)$ y es perpendicular al plano yz.

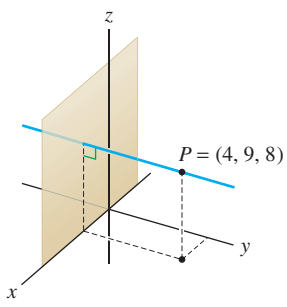


FIGURA 18

En los problemas 43-46, sean $P = (2, 1, -1)$ y $Q = (4, 7, 7)$. Halle las coordenadas que se piden.

43. El punto medio de $\overline{PQ}$.

44. El punto de $\overline{PQ}$ que se encuentra, desde P, a dos terceras partes de la distancia de P a Q.

45. El punto R tal que Q es el punto medio de $\overline{PR}$.

46. Los dos puntos en la recta que pasa por $\overline{PQ}$ cuya distancia desde P es dos veces su distancia desde Q.

47. Pruebe que $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ definen la misma recta, donde:

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 3, -1, 4 \rangle + t \langle 8, 12, -6 \rangle$$
$$\mathbf{r}_2(t) = \langle 11, 11, -2 \rangle + t \langle 4, 6, -3 \rangle$$

Indicación: Pruebe que $\mathbf{r}_2$ pasa por $(3, -1, 4)$ y que los vectores directores de $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son paralelos.

48. Pruebe que $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ definen la misma recta, donde:

$$\mathbf{r}_1(t) = t \langle 2, 1, 3 \rangle, \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle -6, -3, -9 \rangle + t \langle 8, 4, 12 \rangle$$

49. Halle dos parametrizaciones vectoriales diferentes de la recta por $P = (5, 5, 2)$ y de vector director $\mathbf{v} = \langle 0, -2, 1 \rangle$.

50. Halle el punto de intersección de las rectas $\mathbf{r}(t) = \langle 1, 0, 0 \rangle + t \langle -3, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{s}(t) = \langle 0, 1, 1 \rangle + t \langle 2, 0, 1 \rangle$.

51. Pruebe que las rectas $\mathbf{r}_1(t) = \langle -1, 2, 2 \rangle + t \langle 4, -2, 1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle 0, 1, 1 \rangle + t \langle 2, 0, 1 \rangle$ no se intersecan.

52. Determine si las rectas $\mathbf{r}_1(t) = \langle 2, 1, 1 \rangle + t \langle -4, 0, 1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(s) = \langle -4, 1, 5 \rangle + s \langle 2, 1, -2 \rangle$ intersecan y, en caso afirmativo, halle el punto de intersección.

53. Determine si las rectas $\mathbf{r}_1(t) = \langle 0, 1, 1 \rangle + t \langle 1, 1, 2 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(s) = \langle 2, 0, 3 \rangle + s \langle 1, 4, 4 \rangle$ intersecan y, en caso afirmativo, halle el punto de intersección.

54. Halle la intersección de las rectas $\mathbf{r}_1(t) = \langle -1, 1 \rangle + t \langle 2, 4 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(s) = \langle 2, 1 \rangle + s \langle -1, 6 \rangle$ en $\mathbf{R}^2$.

55. Halle las componentes del vector $\mathbf{v}$ cuyas cola y cabeza son los puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de la figura 19.

56. Halle las componentes del vector $\mathbf{w}$ cuya cola es C y cuya cabeza es el punto medio de $\overline{AB}$ en la figura 19.

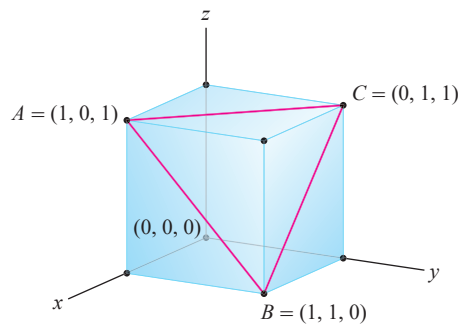


FIGURA 19

Problemas avanzados

En los problemas 57-63, se consideran las ecuaciones de una recta en ***forma simétrica*** *o* ***continua****, con* $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad \boxed{12}$$

57. Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de vector director $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. Pruebe que $\mathcal{L}$ queda def nida por las ecuaciones simétricas (12). *Indicación:* Use la parametrización vectorial para probar que todo punto sobre $\mathcal{L}$ cumple (12).

58. Halle las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $P_0 = = (-2, 3, 3)$ y tiene vector director $\mathbf{v} = \langle 2, 4, 3 \rangle$.

59. Halle las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $P = (1, 1, 2)$ y $Q = (-2, 4, 0)$.

60. Halle las ecuaciones simétricas de la recta:

$$x = 3 + 2t, \quad y = 4 - 9t, \quad z = 12t$$

61. Halle una parametrización vectorial para la recta:

$$\frac{x - 5}{9} = \frac{y + 3}{7} = z - 10$$

62. Halle una parametrización vectorial para la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z}{8}$.

63. Pruebe que la ecuación simétrica de la recta en el plano que pasa por (x_0, y_0) y tiene pendiente m es:

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{m}$$

64. Una mediana de un triángulo es un segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. En referencia a la f gura 20(A), demuestre que las tres medianas de un triángulo ABC se intersecan en el punto terminal P del vector $\frac{1}{3}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$. El punto P es el *baricentro* o *centroide* del triángulo. *Indicación:* Pruebe, parametrizando el segmento $\overline{AA'}$, que P se encuentra a dos terceras partes de la distancia de A a A', desde A. De manera similar se demuestra que P se encuentra sobre las otras dos medianas.

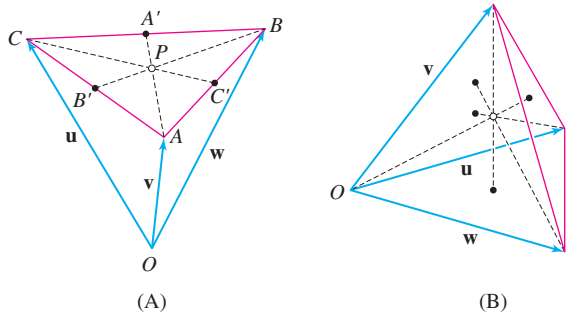


FIGURA 20

65. Una mediana de un tetraedro es un segmento que une un vértice con el centroide de la cara opuesta. El tetraedro de la f gura 20(B) tiene sus vértices en el origen y en los puntos terminales de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$. Pruebe que las medianas se cortan en el punto terminal de $\frac{1}{4}(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$.

13.3 Producto escalar y ángulo entre dos vectores

El producto escalar es una de las operaciones más importantes entre vectores. Desempeña un papel destacado en prácticamente todos los aspectos del cálculo multivariante.

DEFINICIÓN Producto escalar El **producto escalar** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ de dos vectores:

$$\mathbf{v} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \qquad \mathbf{w} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$$

es el escalar def nido por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

Muchos conceptos importantes en matemáticas suelen tener varios nombres o notaciones, bien por razones históricas, bien porque aparecen en varios contextos. El producto escalar *también se denomina "producto interno" y en muchos textos,* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *se denota como* $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *o* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Explicado en palabras, para calcular el producto escalar, *multiplique las correspondientes componentes y sume*. Por ejemplo:

$$\langle 2, 3, 1 \rangle \cdot \langle -4, 2, 5 \rangle = 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = -8 + 6 + 5 = 3$$

El producto escalar de los vectores $\mathbf{v} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle a_2, b_2 \rangle$ en $\mathbf{R}^2$ se def ne de forma análoga:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Vamos a ver que el producto escalar está fuertemente relacionado con el ángulo que forman dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Antes, se enuncian algunas propiedades elementales del producto escalar.

El producto escalar aparece en una amplia variedad de aplicaciones. Para clasificar lo cerca que un documento web se encuentra de una entrada de búsqueda en google:

"se considera el producto escalar de los recuentos ponderados de las coincidencias de la entrada en el documento con el vector de ponderaciones de los tipos de coincidencia para calcular una puntuación IR para el documento."

Extracto de "The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine", de los fundadores de google Sergey Brin y Lawrence Page.

En primer lugar, el producto escalar es *conmutativo*: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$, porque las componentes se pueden multiplicar en cualquier orden. Segundo, el producto escalar de un vector con él mismo es el cuadrado de su longitud: si $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, entonces:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c = a^2 + b^2 + c^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$

El producto escalar también cumple la propiedad distributiva y una propiedad sobre el producto por un escalar, tal y como se resume en el siguiente teorema (vea los problemas 84 y 85).

TEOREMA 1 Propiedades del producto escalar

(i) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$

(ii) **Conmutativa:** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

(iii) **Sacar escalares:** $(\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

(iv) **Distributiva:** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$

(v) **Relación con la norma:** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

EJEMPLO 1 Compruebe la propiedad distributiva $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ para:

$$\mathbf{u} = \langle 4, 3, 3 \rangle \qquad \mathbf{v} = \langle 1, 2, 2 \rangle \qquad \mathbf{w} = \langle 3, -2, 5 \rangle$$

Solución Calcule ambos lados y compruebe que son iguales:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \langle 4, 3, 3 \rangle \cdot (\langle 1, 2, 2 \rangle + \langle 3, -2, 5 \rangle) \\ &= \langle 4, 3, 3 \rangle \cdot \langle 4, 0, 7 \rangle = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 7 = 37 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} &= \langle 4, 3, 3 \rangle \cdot \langle 1, 2, 2 \rangle + \langle 4, 3, 3 \rangle \cdot \langle 3, -2, 5 \rangle = \\ &= (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2) + (4 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 5) = \\ &= 16 + 21 = 37 \end{aligned}$$

■

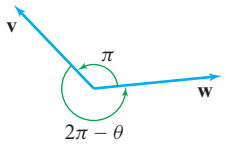


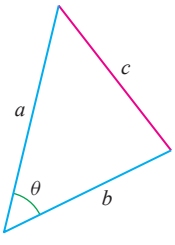
FIGURA 1 Por convenio, el ángulo θ entre dos vectores se escoge de manera que $0 \le \theta \le \pi$.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ está relacionado con el ángulo θ entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Este ángulo θ no está unívocamente definido porque, tal y como se muestra en la figura 1, tanto θ como $2\pi - \theta$ son ángulos formados por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Además, se puede añadir cualquier múltiplo de 2π a θ. Cualquiera de estos ángulos tienen el mismo coseno, por lo que no importa qué ángulo se utilice en el siguiente teorema. Sin embargo, se va a adoptar el siguiente convenio:

El ángulo entre dos vectores se escoge de manera que cumpla $0 \le \theta \le \pi$.

TEOREMA 2 Producto escalar y ángulo Sea θ el ángulo entre dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Entonces:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos\theta \quad \text{o} \quad \cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|} \qquad \boxed{1}$$



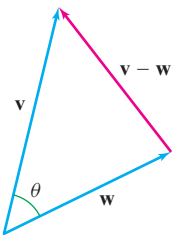


FIGURA 2

Demostración Según el teorema del coseno, los tres lados de un triángulo cumplen (figura 2):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Si los dos lados del triángulo son $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ entonces, el tercer lado es $\mathbf{v} - \mathbf{w}$, como en la figura y según el teorema del coseno:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\cos\theta\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \qquad \boxed{2}$$

Así, por la propiedad (v) del teorema 1 y la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \qquad \boxed{3}\end{aligned}$$

Comparando la ec. (2) y la ec. (3), se obtiene $-2\cos\theta\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| = -2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ y la ec. (1) es cierta. ■

Por definición del arcocoseno, el ángulo $\theta = \cos^{-1} x$ es el ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ que cumple $\cos\theta = x$. Por tanto, para los vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se tiene:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}\right)$$

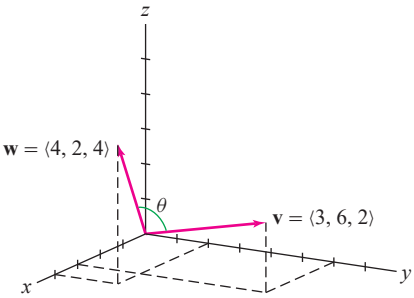


FIGURA 3

■ **EJEMPLO 2** Halle el ángulo θ formado por $\mathbf{v} = \langle 3, 6, 2\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, 2, 4\rangle$.

Solución Calcule $\cos\theta$ usando el producto escalar:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7 \qquad \|\mathbf{w}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{\langle 3, 6, 2\rangle \cdot \langle 4, 2, 4\rangle}{7 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4}{42} = \frac{32}{42} = \frac{16}{21}$$

El ángulo es $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right) \approx 0{,}705$ radianes (figura 3). ■

*Los términos "ortogonal" y "perpendicular" son sinónimos y se usan de forma indistinta, aunque se suele utilizar "*ortogonal*" cuando se consideran vectores.*

Dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se denominan **perpendiculares** u **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. En este caso, se escribe $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Se puede usar el producto escalar para determinar si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales. Como un ángulo entre 0 y π cumple $\cos\theta = 0$ si y sólo si $\theta = \frac{\pi}{2}$, se tiene que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

y por tanto

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$

Los vectores de la base canónica son ortogonales entre ellos y su longitud es igual a 1 (figura 4). En términos de productos escalares, como $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$, y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

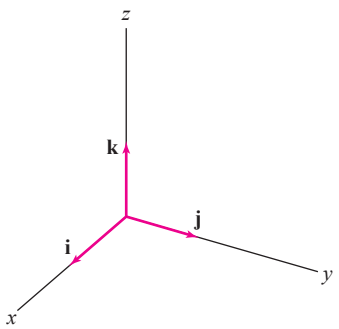


FIGURA 4 Los vectores de la base canónica son ortogonales entre ellos y su longitud es igual a 1.

■ **EJEMPLO 3** **Comprobando la ortogonalidad** Determine si $\mathbf{v} = \langle 2, 6, 1\rangle$ es ortogonal a $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 1\rangle$ o a $\mathbf{w} = \langle -4, 1, 2\rangle$.

Solución Se comprueba la ortogonalidad calculando los productos escalares (figura 5):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \langle 2, 6, 1\rangle \cdot \langle 2, -1, 1\rangle = 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -1 \quad \text{(no ortogonales)}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \langle 2, 6, 1\rangle \cdot \langle -4, 1, 2\rangle = 2 \cdot (-4) + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 \quad \text{(ortogonales)}$$

■

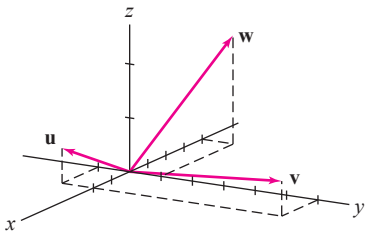


FIGURA 5 Vectores **v**, **w** y **u** del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Examinando ángulos Determine si los ángulos entre el vector $\mathbf{v} = \langle 3, 1, -2\rangle$ y los vectores $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, -3, 0\rangle$ son obtusos.

Solución Por definición, el ángulo θ entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ es obtuso si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ y esto pasa si $\cos\theta < 0$. Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\| \cos\theta$ y las normas $\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{u}\|$ son positivas, se tiene que $\cos\theta$ es negativo si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ es negativo. Por tanto:

El ángulo θ entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ es obtuso si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} < 0$.

Se tiene:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \langle 3, 1, -2\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5 \right\rangle = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 10 = -8 < 0 \quad \text{(ángulo es obtuso)}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \langle 3, 1, -2\rangle \cdot \langle 4, -3, 0\rangle = 12 - 3 + 0 = 9 > 0 \quad \text{(ángulo es agudo)}$$

EJEMPLO 5 Usando la propiedad distributiva Calcule el producto escalar $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución Use la propiedad distributiva y la ortogonalidad de **i**, **j**, y **k**:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \\ &= 4\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 3\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \\ &= 4\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} - 3\mathbf{j} \cdot (2\mathbf{j}) = 4 - 6 = -2\end{aligned}$$

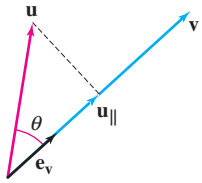


FIGURA 6 La norma de la proyección $\mathbf{u}_{\|}$ de **u** sobre **v** es $\|\mathbf{u}\|\cos\theta$.

Otro uso importante del producto escalar se tiene a la hora de determinar la **proyección** $\mathbf{u}_{\|}$ de un vector **u** sobre un vector no nulo **v**. Por definición, $\mathbf{u}_{\|}$ es el vector que se obtiene trazando una perpendicular de **u** a la recta que pasa por **v**, como en las figuras 6 y 7. En el siguiente teorema, recuerde que $\mathbf{e}_\mathbf{v} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es el vector unitario en la dirección de **v**.

TEOREMA 3 Proyección Suponga que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. La **proyección** de **u** sobre **v** es el vector:

$$\mathbf{u}_{\|} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v})\mathbf{e}_\mathbf{v} \quad \text{o} \quad \mathbf{u}_{\|} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v} \qquad (4)$$

El escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v}$ se denomina la **componente** de **u** sobre **v**.

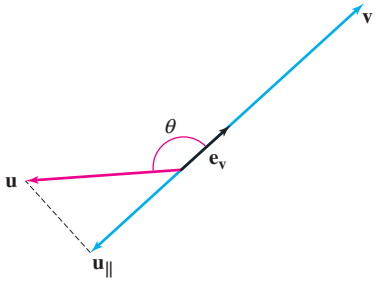


FIGURA 7 Si θ es obtuso, $\mathbf{u}_{\|}$ y $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ apuntan en sentidos opuestos.

Demostración Considere las figuras 6 y 7. Por trigonometría, se tiene que la longitud de $\mathbf{u}_{\|}$ es $\|\mathbf{u}\||\cos\theta|$. Si θ es agudo, entonces $\mathbf{u}_{\|}$ es un múltiplo positivo de $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ y, por tanto, $\mathbf{u}_{\|} = (\|\mathbf{u}\|\cos\theta)\mathbf{e}_\mathbf{v}$ ya que $\cos\theta > 0$. De manera análoga, si θ es obtuso, entonces $\mathbf{u}_{\|}$ es un múltiplo negativo de $\mathbf{e}_\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_{\|} = (\|\mathbf{u}\|\cos\theta)\mathbf{e}_\mathbf{v}$ ya que $\cos\theta < 0$. La primera fórmula para $\mathbf{u}_{\|}$ es cierta porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{e}_\mathbf{v}\|\cos\theta = \|\mathbf{u}\|\cos\theta$.

La segunda igualdad en la ec. (4) también es cierta en base a los siguientes cálculos:

$$\mathbf{u}_{\|} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{v})\mathbf{e}_\mathbf{v} = \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$$

EJEMPLO 6 Halle la proyección de $\mathbf{u} = \langle 5, 1, -3 \rangle$ sobre $\mathbf{v} = \langle 4, 4, 2 \rangle$.

Solución Es conveniente utilizar la segunda fórmula en la ec. (4):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 5, 1, -3 \rangle \cdot \langle 4, 4, 2 \rangle = 20 + 4 - 6 = 18 \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4^2 + 4^2 + 2^2 = 36$$

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} = \left(\frac{18}{36} \right) \langle 4, 4, 2 \rangle = \langle 2, 2, 1 \rangle$$

A continuación se demuestra que si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces todo vector $\mathbf{u}$ se puede expresar como la suma de la proyección $\mathbf{u}_{\parallel}$ y de un vector $\mathbf{u}_{\perp}$ que es ortogonal a $\mathbf{v}$ (vea la f gura 8). Considere:

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$$

Entonces:

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}} \qquad 5$$

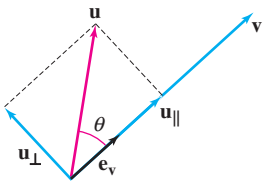


FIGURA 8 Descomposición de $\mathbf{u}$ como la suma $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$ de vectores paralelo y ortogonal a $\mathbf{v}$.

La ec. (5) se denomina la descomposición de $\mathbf{u}$ respecto a $\mathbf{v}$. Sin embargo, se debe verif car que $\mathbf{u}_{\perp}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$: basta comprobar que el producto escalar es cero:

$$\mathbf{u}_{\perp} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}) \cdot \mathbf{v} = \left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) \mathbf{v}\right) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 0$$

EJEMPLO 7 Halle la descomposición de $\mathbf{u} = \langle 5, 1, -3 \rangle$ respecto a $\mathbf{v} = \langle 4, 4, 2 \rangle$.

Solución En el ejemplo 6 se demostró que $\mathbf{u}_{\parallel} = \langle 2, 2, 1 \rangle$. El vector ortogonal es:

$$\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel} = \langle 5, 1, -3 \rangle - \langle 2, 2, 1 \rangle = \langle 3, -1, -4 \rangle$$

La descomposición de $\mathbf{u}$ respecto a $\mathbf{v}$ es:

$$\mathbf{u} = \langle 5, 1, -3 \rangle = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} = \underbrace{\langle 2, 2, 1 \rangle}_{\text{Proyección sobre } \mathbf{v}} + \underbrace{\langle 3, -1, -4 \rangle}_{\text{Ortogonal a } \mathbf{v}}$$

La descomposición en vectores paralelos y ortogonales es útil en muchas aplicaciones.

EJEMPLO 8 ¿Cuál es la mínima fuerza que se debe aplicar para tirar de una vagoneta de 20 kg por una rampa, sin fricción, que está inclinada un ángulo de $\theta = 15°$?

Solución Sea $\mathbf{F}_g$ la fuerza sobre la vagoneta debida a la gravedad. Su magnitud es de $20g$ newtons siendo $g = 9{,}8$. Según la f gura 9, se descompone $\mathbf{F}_g$ como la suma

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$$

donde $\mathbf{F}_{\parallel}$ es la proyección a lo largo de la rampa y $\mathbf{F}_{\perp}$ es la "fuerza normal" ortogonal a la rampa. La fuerza normal $\mathbf{F}_{\perp}$ se cancela debido a la inclinación de la rampa, que tira de la vagoneta en la dirección normal (ya que no hay fricción) y, por tanto, sólo es necesario empujar contra la fuerza $\mathbf{F}_{\parallel}$.

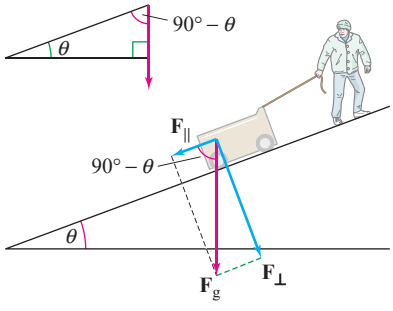


FIGURA 9 El ángulo entre $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_{\parallel}$ es $90° - \theta$.

Observe que el ángulo entre $\mathbf{F}_g$ y la rampa es el ángulo complementario de θ, $90° - \theta$. Como $\mathbf{F}_{\parallel}$ es paralela a la rampa, el ángulo entre $\mathbf{F}_g$ y $\mathbf{F}_{\parallel}$ es también $90° - \theta$ o $75°$, y:

$$\|\mathbf{F}_{\parallel}\| = \|\mathbf{F}_g\| \cos(75°) \approx 20(9{,}8)(0{,}26) \approx 51 \text{ N}$$

Como la gravedad tira de la vagoneta hacia abajo de la rampa con una fuerza de 51 newtons, se necesita una fuerza de, al menos, 51 newtons para empujar la vagoneta por la rampa hacia arriba.

UN APUNTE GRÁFICO Parece que se está usando el término "componente" de dos maneras. Se dice que un vector $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ tiene componentes a y b. Por otra parte, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}$ se denomina la componente de $\mathbf{u}$ respecto al vector unitario $\mathbf{e}$.

En realidad, estas dos nociones de componente no son diferentes. Las componentes a y b son los productos escalares de $\mathbf{u}$ con los vectores de la base canónica:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = \langle a, b \rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle = a$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = \langle a, b \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle = b$$

y se tiene la descomposición [f gura 10(A)]:

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Pero cualesquiera vectores ortogonales y unitarios $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ darían lugar a un sistema de ejes coordenados rotado; se observa en la f gura 10(B) que:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f})\mathbf{f}$$

Dicho de otro modo, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}$ son realmente las componentes cuando se expresa $\mathbf{u}$ respecto al sistema rotado.

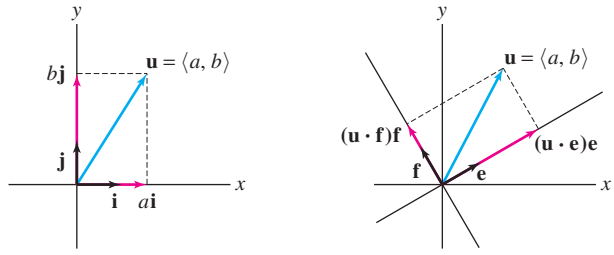


FIGURA 10

13.3 RESUMEN

- El *producto escalar* de $\mathbf{v} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ es:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

- Propiedades básicas:
  - Conmutativa: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$
  - Sacar escalares: $(\lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$
  - Distributiva: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
    $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$
  - $\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2}$
  - $\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \cos \theta}$ donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
- Por convenio, se considera que el ángulo θ cumple $0 \leq \theta \leq \pi$.
- Comprobación de la ortogonalidad: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$

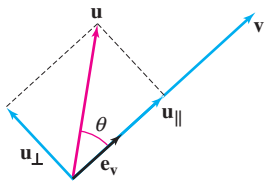


FIGURA 11

- El ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es agudo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} > 0$ y obtuso si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$.
- Suponga que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Todo vector $\mathbf{u}$ se puede descomponer como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$, donde $\mathbf{u}_{\parallel}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_{\perp}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ (vea la figura 11). El vector $\mathbf{u}_{\parallel}$ se denomina la *proyección* de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.
- Sea $\mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. Entonces:

$$\mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{v}})\mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v}, \qquad \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel}$$

- El coeficiente $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{v}}$ se denomina la *componente* de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$:

$$\text{Componente de } \mathbf{u} \text{ sobre } \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \|\mathbf{u}\| \cos\theta$$

13.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿El resultado del producto escalar de dos vectores es un vector o un escalar?

2. ¿Qué puede afirmar sobre el ángulo entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$?

3. ¿Qué propiedad del producto escalar permite concluir que si $\mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u} + \mathbf{w}$?

4. ¿Cuál es la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{v}$: (a) $\mathbf{v}$ o (b) $\mathbf{e}_{\mathbf{v}}$?

5. Sea $\mathbf{u}_{\parallel}$ la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. ¿Cuál de los siguientes vectores es igual la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $2\mathbf{v}$ y cuál es la proyección de $2\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$?

(a) $\frac{1}{2}\mathbf{u}_{\parallel}$ **(b)** $\mathbf{u}_{\parallel}$ **(c)** $2\mathbf{u}_{\parallel}$

6. ¿Cuál de los siguientes productos es igual al $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ **(b)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{v}}$ **(c)** $\mathbf{e}_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{v}}$

Problemas

En los problemas 1-12, calcule el producto escalar.

1. $\langle 1, 2, 1\rangle \cdot \langle 4, 3, 5\rangle$

2. $\langle 3, -2, 2\rangle \cdot \langle 1, 0, 1\rangle$

3. $\langle 0, 1, 0\rangle \cdot \langle 7, 41, -3\rangle$

4. $\langle 1, 1, 1\rangle \cdot \langle 6, 4, 2\rangle$

5. $\langle 3, 1\rangle \cdot \langle 4, -7\rangle$

6. $\langle \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\rangle \cdot \langle 3, \frac{1}{2}\rangle$

7. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}$

8. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$

9. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{k})$

10. $(3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 4\mathbf{k})$

11. $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$

12. $(-\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k})$

En los problemas 13-18, determine si los dos vectores son ortogonales y, en caso negativo, establezca si el ángulo que forman es agudo u obtuso.

13. $\langle 1, 1, 1\rangle$, $\langle 1, -2, -2\rangle$

14. $\langle 0, 2, 4\rangle$, $\langle -5, 0, 0\rangle$

15. $\langle 1, 2, 1\rangle$, $\langle 7, -3, -1\rangle$

16. $\langle 0, 2, 4\rangle$, $\langle 3, 1, 0\rangle$

17. $\langle \frac{12}{5}, -\frac{4}{5}\rangle$, $\langle \frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\rangle$

18. $\langle 12, 6\rangle$, $\langle 2, -4\rangle$

En los problemas 19-22, halle el coseno del ángulo entre los vectores.

19. $\langle 0, 3, 1\rangle$, $\langle 4, 0, 0\rangle$

20. $\langle 1, 1, 1\rangle$, $\langle 2, -1, 2\rangle$

21. $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

22. $3\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los problemas 23-28, halle el ángulo entre los vectores. Use una calculadora si fuera necesario.

23. $\langle 2, \sqrt{2}\rangle$, $\langle 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\rangle$

24. $\langle 5, \sqrt{3}\rangle$, $\langle \sqrt{3}, 2\rangle$

25. $\langle 1, 1, 1\rangle$, $\langle 1, 0, 1\rangle$

26. $\langle 3, 1, 1\rangle$, $\langle 2, -4, 2\rangle$

27. $\langle 0, 1, 1\rangle$, $\langle 1, -1, 0\rangle$

28. $\langle 1, 1, -1\rangle$, $\langle 1, -2, -1\rangle$

29. Halle todos los valores de b para los que los vectores son ortogonales.

(a) $\langle b, 3, 2\rangle$, $\langle 1, b, 1\rangle$ **(b)** $\langle 4, -2, 7\rangle$, $\langle b^2, b, 0\rangle$

30. Halle un vector que sea ortogonal a $\langle -1, 2, 2\rangle$.

31. Halle dos vectores que no sean uno múltiplo del otro y que ambos sean ortogonales a $\langle 2, 0, -3\rangle$.

32. Halle un vector que sea ortogonal a $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 1\rangle$ pero no a $\mathbf{w} = \langle 1, 0, -1\rangle$.

33. Halle $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}$ donde $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\mathbf{e}$ es un vector unitario y el ángulo entre $\mathbf{e}$ y $\mathbf{v}$ es $\frac{2\pi}{3}$.

34. Suponga que $\mathbf{v}$ se encuentra en el plano yz. ¿Cuál de los siguientes productos escalares es igual a cero, para cualquier elección de $\mathbf{v}$?

(a) $\mathbf{v} \cdot \langle 0, 2, 1\rangle$ **(b)** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$

(c) $\mathbf{v} \cdot \langle -3, 0, 0\rangle$ **(d)** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$

En los problemas 35-38, simplif que la expresión.

35. $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

36. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

37. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$ **38.** $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$

En los problemas 39-42, use las propiedades del producto escalar para evaluar la expresión, suponiendo que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2$, $\|\mathbf{u}\| = 1$ *y* $\|\mathbf{v}\| = 3$.

39. $\mathbf{u} \cdot (4\mathbf{v})$ **40.** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

41. $2\mathbf{u} \cdot (3\mathbf{u} - \mathbf{v})$ **42.** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$

43. Halle el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$.

44. Halle el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$.

45. Suponga que $\|\mathbf{v}\| = 3$, $\|\mathbf{w}\| = 5$ y que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(a) Use la relación $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ para probar que $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = 3^2 + 5^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

(b) Calcule $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

46. Suponga que $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\|\mathbf{w}\| = 3$ y que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es de 120°. Determine:

(a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ **(b)** $\|2\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ **(c)** $\|2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}\|$

47. Pruebe que si $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ son vectores unitarios tales que $\|\mathbf{e} + \mathbf{f}\| = \frac{3}{2}$, entonces $\|\mathbf{e} - \mathbf{f}\| = \frac{\sqrt{7}}{2}$. *Indicación:* Pruebe que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{8}$.

48. Halle $\|2\mathbf{e} - 3\mathbf{f}\|$ suponiendo que $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ son vectores unitarios tales que $\|\mathbf{e} + \mathbf{f}\| = \sqrt{3/2}$.

49. Halle el ángulo θ en el triángulo de la f gura 12.

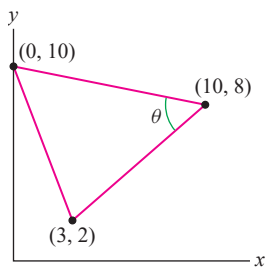


FIGURA 12

50. Halle los tres ángulos del triángulo de la f gura 13.

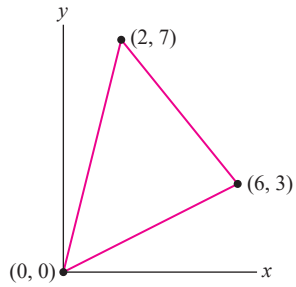


FIGURA 13

En los problemas 51-58, halle la proyección de $\mathbf{u}$ *sobre* $\mathbf{v}$.

51. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$ **52.** $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2\rangle$

53. $\mathbf{u} = \langle -1, 2, 0\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 0, 1\rangle$

54. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 0\rangle$

55. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{k}$ **56.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 29\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$ **58.** $\mathbf{u} = \langle a, a, b\rangle$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

En los problemas 59 y 60, calcule la componente de $\mathbf{u}$ *sobre* $\mathbf{v}$.

59. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 1\rangle$

60. $\mathbf{u} = \langle 3, 0, 9\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 2\rangle$

61. Halle la norma de $\overline{OP}$, para la f gura 14.

62. Halle $\|\mathbf{u}_\perp\|$, para la f gura 14.

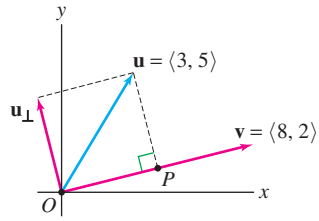


FIGURA 14

En los problemas 63-68, halle la descomposición $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\|} + \boldsymbol{a}_{\perp}$ *respecto a* $\boldsymbol{b}$.

63. $\mathbf{a} = \langle 1, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 1\rangle$

64. $\mathbf{a} = \langle 2, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 0\rangle$

65. $\mathbf{a} = \langle 4, -1, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 1\rangle$

66. $\mathbf{a} = \langle 4, -1, 5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, 1\rangle$

67. $\mathbf{a} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -1\rangle$

68. $\mathbf{a} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 1\rangle$

69. Sea $\mathbf{e}_\theta = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$. Pruebe que $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\psi = \cos(\theta - \psi)$ para cualesquiera ángulos θ y ψ.

70. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en el plano.

(a) Use el teorema 2 para explicar por qué el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ no cambia si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ han sido rotados en el mismo ángulo θ.

(b) Represente los vectores $\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{e}_2 = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ y determine los vectores $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ obtenidos por rotación de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en un ángulo de $\frac{\pi}{4}$. Compruebe que $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2'$.

Los problemas 71-74, hacen referencia a la figura 15.

71. Halle el ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

72. Halle el ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.

73. Calcule la proyección de $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{AD}$.

74. Calcule la proyección de $\overrightarrow{AD}$ sobre $\overrightarrow{AB}$.

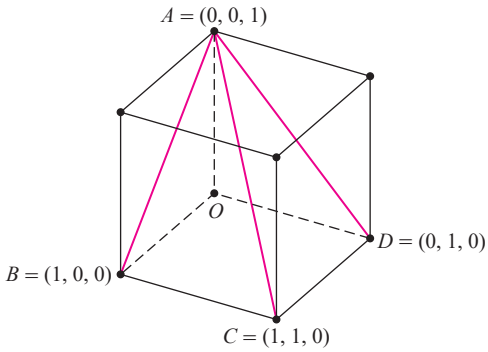


FIGURA 15 Cubo unidad en $\mathbf{R}^3$.

75. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores no nulos y sea $\mathbf{u} = \mathbf{e}_\mathbf{v} + \mathbf{e}_\mathbf{w}$. Use el producto escalar para probar que el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es igual al ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$. Ilustre este resultado gráfcamente.

76. Sean $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{a}$ vectores no nulos tales que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}$. ¿Es cierto que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Demuestre este resultado o proporcione un contraejemplo.

77. Calcule la fuerza (en newtons) necesaria para tirar de una vagoneta de 40 kg sobre una rampa con una inclinación de 10° (figura 16).

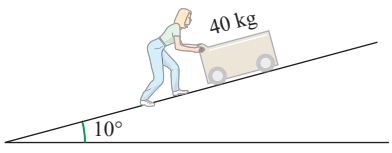


FIGURA 16

78. Se aplica la misma fuerza $\mathbf{F}$ sobre dos cuerdas (de peso despreciable) unidas a los lados opuestos de una vagoneta de 40 kg, formando un ángulo de 35° con la horizontal (figura 17). ¿Cuál es la máxima magnitud de $\mathbf{F}$ (en newtons) que se puede aplicar de manera que la vagoneta no se levante del suelo?

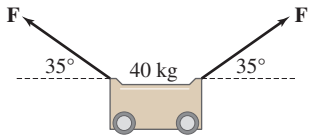


FIGURA 17

79. Un rayo de luz viaja sobre la semirrecta determinada por un vector unitario $\mathbf{L}$, incide sobre una superficie plana en el punto P y se refleja sobre la semirrecta determinada por un vector unitario $\mathbf{R}$, donde $\theta_1 = \theta_2$ (figura 18). Pruebe que si $\mathbf{N}$ es el vector unitario ortogonal a la superficie, entonces:

$$\mathbf{R} = 2(\mathbf{L} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} - \mathbf{L}$$

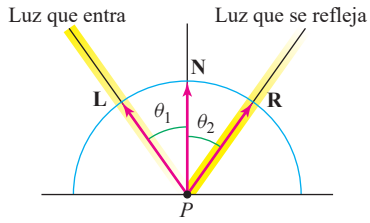


FIGURA 18

80. Sean P y Q dos puntos antipodales (opuestos) en una esfera de radio r centrada en el origen y sea R un tercer punto sobre la esfera (figura 19). Demuestre que $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ son ortogonales.

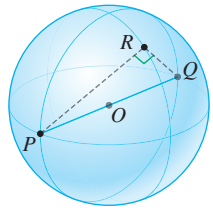


FIGURA 19

81. Demuestre que $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 4\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

82. Use el problema 81 para probar que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales si y sólo si $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

83. Pruebe que las dos diagonales de un paralelogramo son perpendiculares si y sólo si sus lados tienen la misma longitud. *Indicación:* use el problema 82 para probar que $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ son ortogonales si y sólo si $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$.

84. Compruebe la propiedad distributiva:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

85. Compruebe que $(\lambda\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ para cualquier escalar λ.

Problemas avanzados

86. Demuestre el teorema del coseno, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, utilizando la f gura 20. *Indicación:* considere el triángulo rectángulo $\triangle PQR$.

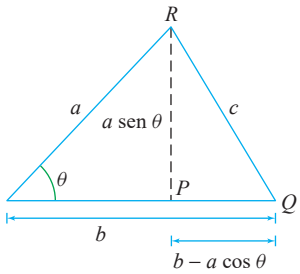


FIGURA 20

87. En este problema se demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz: si **v** y **w** son dos vectores cualquiera, entonces:

$$|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \le \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \qquad \boxed{6}$$

(a) Sea $f(x) = \|x\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2$ siendo x un escalar. Pruebe que $f(x) = ax^2 + +bx + c$, donde $a = \|\mathbf{v}\|^2$, $b = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ y $c = \|\mathbf{w}\|^2$.

(b) Deduzca que $b^2 - 4ac \le 0$. *Indicación:* observe que $f(x) \ge 0$ para todo x.

88. Use (6) para demostrar la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \le \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Indicación: en primer lugar, utilice la desigualdad triangular para números y demuestre que:

$$|(\mathbf{v} + \mathbf{w})\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{w})| \le |(\mathbf{v} + \mathbf{w})\cdot\mathbf{v}| + |(\mathbf{v} + \mathbf{w})\cdot\mathbf{w}|$$

89. Este problema proporciona otra demostración de la relación entre el producto escalar y el ángulo θ entre dos vectores $\mathbf{v} = \langle a_1, b_1\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle a_2, b_2\rangle$ en el plano. Observe que $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\langle\cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1\rangle$ y $\mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|\langle\cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2\rangle$, siendo θ_1 y θ_2 como en la f gura 21. A continuación, use la fórmula de la adición para el coseno y demuestre que:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\theta$$

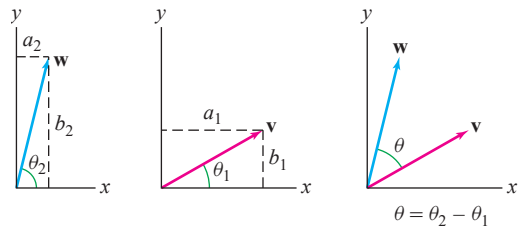


FIGURA 21

90. Sea $\mathbf{v} = \langle x, y\rangle$ y $\mathbf{v}_\theta = \langle x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta, -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta\rangle$. Demuestre que el ángulo entre **v** y $\mathbf{v}_\theta$ es θ.

91. Sea **v** un vector no nulo. Los ángulos α, β, γ entre **v** y los vectores unitarios **i**, **j**, **k** se denominan los ángulos directores de **v** (f gura 22). Los cosenos de estos ángulos son los **cosenos directores** de **v**. Demuestre que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

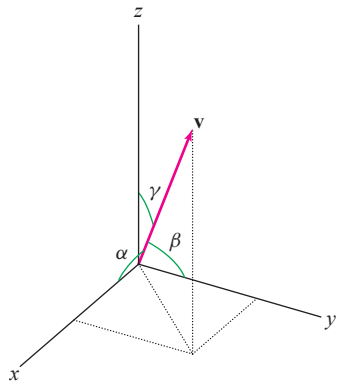


FIGURA 22 Ángulos directores de **v**.

92. Halle los cosenos directores de $\mathbf{v} = \langle 3, 6, -2\rangle$.

93. El conjunto de todos los puntos $X = (x, y, z)$ equidistantes de dos puntos P, Q en $\mathbf{R}^3$ es un plano (f gura 23). Pruebe que X se encuentra en este plano si:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{OQ}\|^2 - \|\overrightarrow{OP}\|^2\right) \qquad \boxed{7}$$

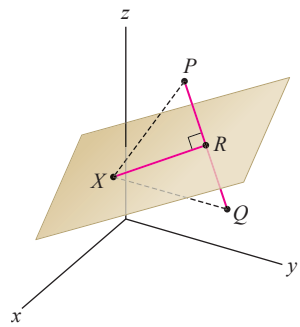


FIGURA 23

Indicación: si R es el punto medio de $\overline{PQ}$, entonces X es equidistante de P y Q si y sólo si se cumple que $\overrightarrow{XR}$ es ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$.

94. Dibuje el plano correspondiente a todos los puntos $X = (x, y, z)$ equidistantes de los puntos $P = (0, 1, 0)$ y $Q = (0, 0, 1)$. Use la ec. (7) para probar que X se encuentra en este plano si y sólo si $y = z$.

95. Use la ec. (7) para hallar la ecuación del plano formado por todos los puntos $X = (x, y, z)$ equidistantes de $P = (2, 1, 1)$ y de $Q = (1, 0, 2)$.

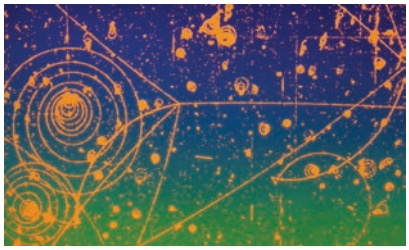


FIGURA 1 Las trayectorias circulares de partículas cargadas en una cámara de burbujas bajo la presencia de un campo magnético se describen mediante productos vectoriales.

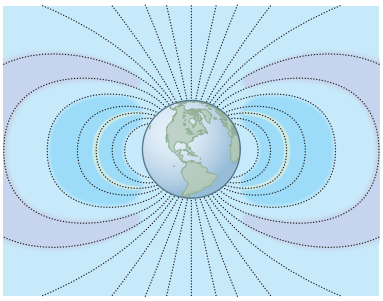


FIGURA 2 Los cinturones de Van Allen, situados a miles de kilómetros sobre la superf cie de la Tierra, están formados por corrientes de protones y electrones que oscilan hacia atrás y adelante en trayectorias helicoidales situadas entre dos "espejos magnéticos", creados por el campo magnético de la Tierra. Este movimiento helicoidal se explica por la naturaleza producto-vectorial de las fuerzas magnéticas.

La teoría de matrices y determinantes forma parte del álgebra lineal, *una materia de gran importancia en las matemáticas. En esta sección se abordarán sólamente unas cuantas definiciones y resultados básicos necesarios para abordar nuestro cálculo en varias variables.*

13.4 El producto vectorial

En esta sección se introduce el **producto vectorial** $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ de dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. El producto vectorial (en ocasiones también llamado **producto externo**) se usa en física e ingeniería para describir cantidades que involucran rotaciones, como la torsión y el momento angular. En electromagnetismo, las fuerzas magnéticas se describen mediante productos vectoriales (f guras 1 y 2).

El producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es nuevamente un vector y no un número, como ocurre con el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$. Se def ne mediante determinantes, que se introducen a continuación en los casos 2×2 y 3×3. Un determinante 2×2 es un número formado a partir de una colección de números dispuestos en dos f las y dos columnas (llamada una **matriz**) según la fórmula:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \boxed{1}$$

Observe que el determinante es la diferencia de los productos de las diagonales. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} \\ \frac{1}{2} & \cancel{4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & \cancel{2} \\ \cancel{\frac{1}{2}} & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 11$$

El determinante de una matriz 3×3 se def ne mediante la fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{menor } (1,1)} - b_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{menor } (1,2)} + c_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{\text{menor } (1,3)} \qquad \boxed{2}$$

Esta fórmula expresa el determinante 3×3 en términos de determinantes 2×2 llamados **menores**. Los menores se han formado quitando la primera f la y una de las tres columnas de la matriz 3×3. Por ejemplo, el menor que se ha etiquetado como $(1, 2)$ se obtiene según:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} & \cancel{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Elimine la f la 1 y la columna 2

para obtener el menor $(1, 2)$ $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ menor (1,2)

EJEMPLO 1 Un determinante 3×3 Calcule $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{3} \\ 0 & 1 & -7 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \textcircled{2} \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - \textcircled{4} \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \textcircled{3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(38) - 4(-7) + 3(1) = 107$$

Al f nal de esta sección se mostrará la relación entre los determinantes y el área y volumen. Antes, se introduce el producto vectorial, def nido como un determinante "simbólico" cuya primera f la esta formada por la base canónica $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

ATENCIÓN *Observe, en la ec. (3), que el término del medio tiene el signo menos.*

DEFINICIÓN El producto vectorial El producto vectorial de los vectores $\mathbf{v} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ es el vector:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \qquad \boxed{3}$$

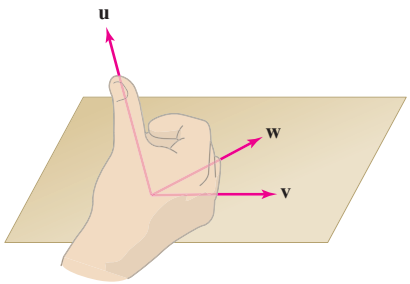


FIGURA 3 $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ forma un sistema orientado positivamente.

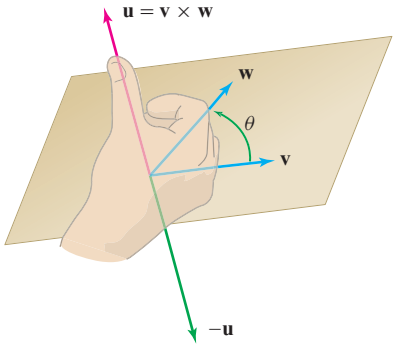


FIGURA 4 Hay dos vectores ortogonales a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de norma $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,\operatorname{sen}\theta$. La regla de la mano derecha determina cuál es $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

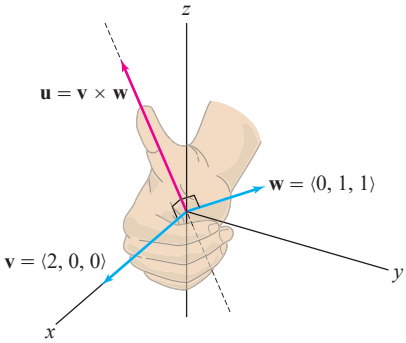


FIGURA 5 La dirección de $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ queda determinada por la regla de la mano derecha. Por tanto, la componente z de $\mathbf{u}$ es positiva.

EJEMPLO 2 Calcule $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, para $\mathbf{v} = \langle -2, 1, 4\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, 2, 5\rangle$.

Solución

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (-3)\mathbf{i} - (-22)\mathbf{j} + (-7)\mathbf{k} = \langle -3, 22, -7\rangle$$

La fórmula (3) no facilita ninguna indicación sobre el signif cado geométrico del producto vectorial. Sin embargo, existe una manera sencilla de visualizar el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ usando la **regla de la mano derecha**. Suponga que $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$ son vectores no nulos que no se encuentran en un plano. Se dice que $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ forman un **sistema orientado positivamente** si la dirección hacia arriba $\mathbf{u}$ queda determinada por la regla de la mano derecha: *Si los dedos de su mano derecha se enroscan desde* $\mathbf{v}$ *hacia* $\mathbf{w}$*, su dedo pulgar apunta hacia el mismo lugar que el plano generado por* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *según* $\mathbf{u}$ (f gura 3). Al f nal de esta sección se demuestra este teorema.

TEOREMA 1 Descripción geométrica del producto vectorial El producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es el único vector que cumple las siguientes tres propiedades:

(i) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$.

(ii) La norma de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,\operatorname{sen}\theta$ (θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, $0 \le \theta \le \pi$).

(iii) $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\}$ forman un sistema orientado positivamente.

¿De qué manera determinan las tres propiedades del teorema 1 a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$? Según la propiedad (i), $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ se encuentra en la recta ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$. Según la propiedad (ii), $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es uno de los dos vectores en esa recta cuya norma es igual a $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,\operatorname{sen}\theta$. Por último, la propiedad (iii) establece cuál de esos dos vectores es $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, es decir, el vector para el que $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ está orientado positivamente (f gura 4).

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{v} = \langle 2, 0, 0\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 0, 1, 1\rangle$. Determine $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ usando las propiedades del producto vectorial y no la ec. (3).

Solución Se va a utilizar el teorema 1. En primer lugar, por la propiedad (i), $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Como $\mathbf{v}$ se encuentra sobre el eje x, $\mathbf{u}$ debe estar situado en el plano yz (f gura 5). Dicho de otro modo, $\mathbf{u} = \langle 0, b, c\rangle$. Pero $\mathbf{u}$ también es ortogonal a $\mathbf{w} = \langle 0, 1, 1\rangle$, por lo que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = b + c = 0$ y $\mathbf{u} = \langle 0, b, -b\rangle$.

Ahora, un cálculo directo prueba que $\|\mathbf{v}\| = 2$ y $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2}$. Además, el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ is $\theta = \frac{\pi}{2}$, pues $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Según la propiedad (ii),

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{b^2 + (-b)^2} = |b|\sqrt{2} \qquad \text{es igual a} \qquad \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}$$

Así, $|b| = 2$ y $b = \pm 2$. Por último, según la propiedad (iii), $\mathbf{u}$ apunta en la dirección de las z positivas (f gura 5). Así, $b = -2$ y $\mathbf{u} = \langle 0, -2, 2\rangle$. Puede verif car que la fórmula del producto vectorial da el mismo resultado.

Una de las propiedades más llamativas del producto vectorial es que es *anticonmutativo*. Cambiar el orden de los factores provoca un cambio de signo:

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w} \qquad 4$$

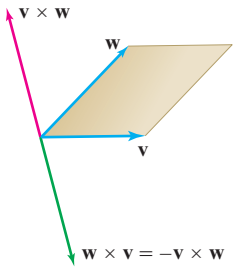


FIGURA 6

Se puede verif car usando la ec. (3): cuando se intercambian $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, cada uno de los dos determinantes 2×2 cambia de signo. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 =$$

$$= -(b_1a_2 - a_1b_2) = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

La anticonmutatividad también se deduce de la descripción geométrica del producto vectorial. Por las propiedades (i) y (ii) del teorema 1, tanto $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ como $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ son ortogonales a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ y de la misma norma. Sin embargo, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ apuntan en direcciones opuestas, por la regla de la mano derecha, y, por tanto, $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ (f gura 6). En particular, $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

El siguiente teorema enuncia más propiedades del producto vectorial (las demostraciones se encuentran dadas como los problemas 45-48).

Observe una diferencia importante entre el producto escalar y el vectorial de un vector con él mismo:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$$

TEOREMA 2 Propiedades básicas del producto vectorial

(i) $\mathbf{w} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

(ii) $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

(iii) $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar λ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(iv) $(\lambda\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\lambda\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(v) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

El producto vectorial de dos vectores cualquiera de la base canónica, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, es igual al tercero, quizás con un signo menos. Concretamente (vea el problema 49):

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \tag{5}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

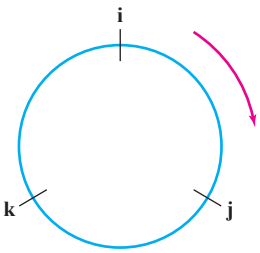


FIGURA 7 Circunferencia para calcular el producto vectorial de los vectores de la base canónica.

Como el producto vectorial es anticonmutativo, cuando el producto se realiza en diferente orden aparece un signo menos. Una manera fácil de recordar estas relaciones es dibujar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, y $\mathbf{k}$ en una circunferencia, como en la f gura 7. Muévase en la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj (empezando en cualquier punto) y obtendrá una de las relaciones (5). Por ejemplo, si empieza en $\mathbf{i}$ y se mueve en el sentido de las agujas del reloj, obtiene $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Si se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj, obtiene las relaciones con un signo menos. Así, empezar en $\mathbf{k}$ y desplazarse en el sentido contrario al de las agujas del reloj, da lugar a la relación $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$.

EJEMPLO 4 Usando las relaciones ijk Calcule $(2\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$.

Solución Se utilizará la propiedad distributiva del producto vectorial:

$$(2\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = (2\mathbf{i}) \times (3\mathbf{j}) + (2\mathbf{i}) \times (5\mathbf{k}) + \mathbf{k} \times (3\mathbf{j}) + \mathbf{k} \times (5\mathbf{k}) =$$

$$= 6(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 10(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 3(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + 5(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) =$$

$$= 6\mathbf{k} - 10\mathbf{j} - 3\mathbf{i} + 5(\mathbf{0}) = -3\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

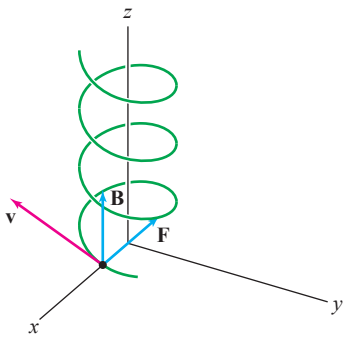


FIGURA 8 Un protón en un campo magnético uniforme se desplaza siguiendo una trayectoria helicoidal.

EJEMPLO 5 Velocidad en un campo magnético La fuerza **F** de un protón que se mueve a velocidad **v** m/s en un campo magnético uniforme **B** (en teslas) es $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ en newtons, donde $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ culombios (figura 8). Calcule **F** si $\mathbf{B} = 0{,}0004\mathbf{k}$ T y **v** tiene norma igual a 10^6 m/s y dirección $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución La norma del vector $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es $\sqrt{2}$ y como la de **v** es 10^6, se tiene:

$$\mathbf{v} = 10^6 \left(\frac{-\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}} \right)$$

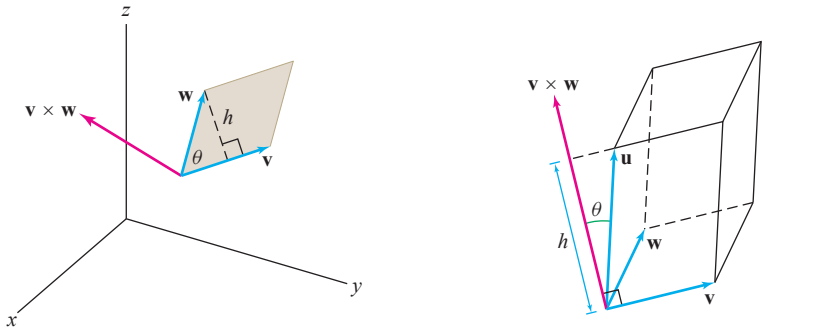
Por tanto, la fuerza (en newtons) es:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 10^6 q \left(\frac{-\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}} \right) \times (0{,}0004\mathbf{k}) = \frac{400q}{\sqrt{2}} ((-\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \mathbf{k})$$

$$= -\frac{400q}{\sqrt{2}}\mathbf{i} = \frac{-400(1{,}6 \times 10^{-19})}{\sqrt{2}}\mathbf{i} \approx -(4{,}5 \times 10^{-17})\mathbf{i}$$

Productos vectoriales, área y volumen

El producto vectorial y los determinantes están fuertemente relacionados con el área y el volumen. Considere el paralelogramo $\mathcal{P}$ generado por los vectores no nulos **v** y **w** con el mismo punto base. En la figura 9(A), se observa que la base de $\mathcal{P}$ es $b = \|\mathbf{v}\|$ y su altura es $h = \|\mathbf{w}\| \operatorname{sen} \theta$, donde θ es el ángulo entre **v** y **w**. Así, el área de $\mathcal{P}$ es $A = bh = \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \operatorname{sen} \theta = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$.



(A) El área del paralelogramo $\mathcal{P}$ es $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = |\mathbf{v}| \, |\mathbf{w}| \operatorname{sen} \theta$.

(B) El volumen del paralelepípedo **P** es $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

FIGURA 9

Un "paralelepípedo" es el cuerpo sólido generado por tres vectores. Cada cara es un paralelogramo.

Considere a continuación el **paralelepípedo P** generado por tres vectores no nulos **u**, **v**, **w** en $\mathbb{R}^3$ [el prisma tridimensional de la figura 9(B)]. La base de **P** es el paralelogramo generado por **v** y **w**, por lo que el área de la base es $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$. La altura de **P** es $h = \|\mathbf{u}\| \cdot |\cos \theta|$, donde θ es el ángulo entre **u** y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Así:

$$\text{Volumen de } \mathbf{P} = (\text{área de la base})(\text{altura}) = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cdot |\cos \theta|$$

Pero $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \, \|\mathbf{u}\| \cos \theta$ es igual al producto escalar de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ y **u**. Así se ha demostrado la fórmula:

$$\text{Volumen de } \mathbf{P} = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

La cantidad $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, denominada **producto mixto**, se puede expresar como un determinante. Sean:

$$\mathbf{u} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \qquad \mathbf{v} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle \qquad \mathbf{w} = \langle a_3, b_3, c_3 \rangle$$

Se utiliza la siguiente notación para el determinante de la matriz cuyas filas son los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$*:*

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Es poco práctico escribir el valor absoluto de un determinante en la expresión de la derecha, pero se puede denotar como:

$$\left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}\right|$$

Entonces:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{k}\right) =$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix} \quad \boxed{6}$$

Se obtienen las siguientes fórmulas para el área y el volumen.

TEOREMA 3 Área y volumen vía productos vectoriales y determinantes Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

i) El área del paralelogramo $\mathcal{P}$ generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $A = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$.

ii) El volumen del paralelepípedo $\mathbf{P}$ generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ es:

$$V = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = \left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}\right| \quad \boxed{7}$$

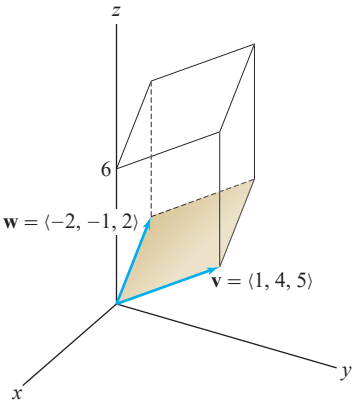


FIGURA 10

EJEMPLO 6 Sean $\mathbf{v} = \langle 1, 4, 5\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -2, -1, 2\rangle$. Calcule:

(a) El área A del paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

(b) El volumen V del paralelepípedo de la f gura 10.

Solución Se calculará el producto vectorial y se aplicará el teorema 3:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} 4 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 5\\ -2 & 2\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 4\\ -2 & -1\end{vmatrix}\mathbf{k} = \langle 13, -12, 7\rangle$$

(a) El área del paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es:

$$A = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \sqrt{13^2 + (-12)^2 + 7^2} = \sqrt{362} \approx 19$$

(b) La altura vertical del paralelepípedo es el vector $6\mathbf{k}$, por lo que, según la ec. (7),

$$V = |(6\mathbf{k})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = |\langle 0, 0, 6\rangle\cdot\langle 13, -12, 7\rangle| = 6\cdot 7 = 42$$

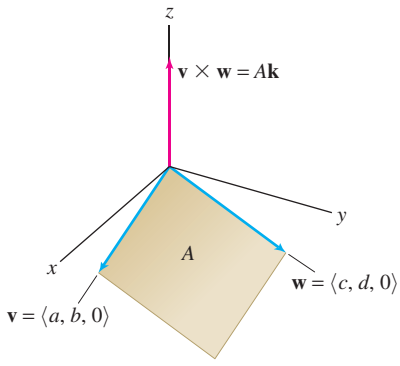


FIGURA 11 Paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en el plano xy.

Se puede calcular el área A del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle c, d\rangle$ entendiendo $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como vectores en $\mathbb{R}^3$ con componente z igual a cero (f gura 11). Así, se puede expresar $\mathbf{v} = \langle a, b, 0\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle c, d, 0\rangle$. El producto vectorial $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ es un vector que apunta en la dirección z:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a & b & 0\\ c & d & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0\\ d & 0\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a & 0\\ c & 0\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Según el teorema 3, el área del paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $A = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$ y, de esta manera:

$$A = \left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right| \quad \boxed{8}$$

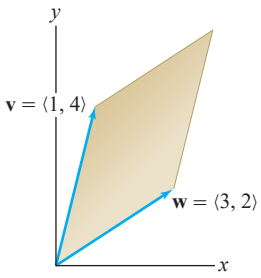


FIGURA 12

EJEMPLO 7 Calcule el área A del paralelogramo de la figura 12.

Solución Se tiene $\begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10$. El área es el valor absoluto $A = |-10| = 10$. ■

Demostraciones de las propiedades del producto vectorial

A continuación, se demuestran las propiedades del producto vectorial que se han enunciado en el teorema 1. Sean:

$$\mathbf{v} = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \qquad \mathbf{w} = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$$

Se demuestra que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ probando que $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$. Según la ec. (6):

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{9}$$

Manipulación algebraica elemental (que se deja para el lector) prueba que la expresión a la derecha de la ec. (9) es igual a cero. Así se prueba que $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ y, en consecuencia, que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, como se quería demostrar. Intercambiando los papeles de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, se deduce también que $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, y como $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$, se tiene que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$. Así se demuestra el punto (i) del teorema 1. Para demostrar (ii), se utilizará la siguiente identidad:

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 \qquad \mathbf{10}$$

Para comprobar esta identidad, calcule $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2$ como la suma de cuadrados de las componentes de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$$
$$= (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (a_1c_2 - c_1a_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \qquad \mathbf{11}$$

Por otra pare, por def nición:

$$\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \qquad \mathbf{12}$$

De nuevo, por manipulación algebraica (que se deja al lector) se obtiene que la ec. (11) es igual a la ec. (12).

Ahora, sea θ el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Según la ec. (10):

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \cos^2 \theta =$$
$$= \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Por tanto, $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \operatorname{sen} \theta$. Observe que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ ya que, por convenio, θ se encuentra entre 0 y π. Así se ha demostrado (ii).

El punto (iii) del teorema 1 af rma que $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\}$ es un sistema orientado positivamente. Se trata de una propiedad más sutil que no se puede comprobar únicamente mediante álgebra elemental. Se debe dar como cierta la siguiente relación entre un sistema orientado positivamente y el signo del determinante, que se puede obtener usando la continuidad de los determinantes:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{si y sólo si } \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \text{ es un sistema orientado positivamente}$$

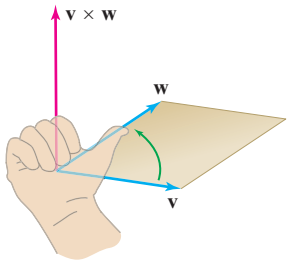


FIGURA 13 Tanto $\{\mathbf{v}\times\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ como $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\times\mathbf{w}\}$ son sistemas orientados positivamente.

Además, se puede comprobar directamente de la ec. (2) que el determinante no cambia cuando se reemplaza $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ por $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ (o por $\{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$). Teniendo presente este resultado y usando la ec. (6), se obtiene

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{w}\\ \mathbf{v}\times\mathbf{w}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\mathbf{v}\times\mathbf{w}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix} = (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2 > 0$$

Por tanto $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\times\mathbf{w}\}$ es un sistema orientado positivamente, tal y como se quería demostrar (figura 13).

13.4 RESUMEN

- Determinantes 2×2 y 3×3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

- El *producto vectorial* de $\mathbf{v} = \langle a_1, b_1, c_1\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle a_2, b_2, c_2\rangle$ es el determinante simbólico:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

- El producto vectorial $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ es el único vector que cumple las tres propiedades siguientes:

  (i) $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$.

  (ii) la norma de $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ es $\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$ sen θ (θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, $0 \le \theta \le \pi$).

  (iii) $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\times\mathbf{w}\}$ es un sistema orientado positivamente.

- Propiedades del producto vectorial:

  (i) $\mathbf{w}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

  (ii) $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  (iii) $(\lambda\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{v}\times(\lambda\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$

  (iv) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{w} + \mathbf{v}\times\mathbf{w}$

  $\mathbf{v}\times(\mathbf{u}+\mathbf{w}) = \mathbf{v}\times\mathbf{u} + \mathbf{v}\times\mathbf{w}$

- Productos vectoriales de los vectores de la base canónica (figura 14):

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$

- El área del paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|$.
- Identidad del producto vectorial: $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2$
- El *producto mixto* se define como $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Se tiene:

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \det\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix}$$

- El volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$.

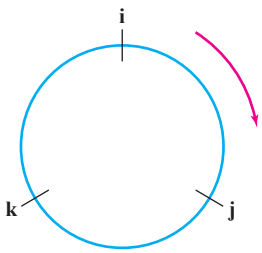


FIGURA 14 Circunferencia para calcular los productos vectoriales de los vectores de la base canónica.

13.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es el menor $(1, 3)$ de la matriz $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$?

2. El ángulo entre $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ es $\frac{\pi}{6}$. ¿Cuál es la norma de $\mathbf{e} \times \mathbf{f}$?

3. ¿A qué es igual $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$, si $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \langle 2, 2, 1 \rangle$?

4. Halle el producto vectorial sin utilizar la fórmula:

(a) $\langle 4, 8, 2 \rangle \times \langle 4, 8, 2 \rangle$ **(b)** $\langle 4, 8, 2 \rangle \times \langle 2, 4, 1 \rangle$

5. ¿A qué es igual $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ y $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$?

6. ¿Cuándo es $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ igual a cero?

Problemas

En los problemas 1-4, calcule el determinante 2×2.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}$

En los problemas 5-8, calcule el determinante 3×3.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

En los problemas 9-12, calcule $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

9. $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 1 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 3, 1, 1 \rangle$

10. $\mathbf{v} = \langle 2, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle -1, 0, 1 \rangle$

11. $\mathbf{v} = \langle \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2} \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 4, -6, 3 \rangle$

12. $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, 1, 1 \rangle$

En los problemas 13-16, use las relaciones de la ec. (5) para calcular el producto vectorial.

13. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$

14. $(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k})$

15. $(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - \mathbf{k})$

16. $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k})$

En los problemas 17-22, calcule el producto vectorial suponiendo que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle 1, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \langle 0, 3, 1 \rangle, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \langle 2, -1, 1 \rangle$$

17. $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

18. $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

19. $\mathbf{w} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})$

20. $(3\mathbf{u} + 4\mathbf{w}) \times \mathbf{w}$

21. $(\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$

22. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times (3\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$

23. Sea $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. Calcule $\mathbf{v} \times \mathbf{i}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{k}$.

24. Halle $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de norma 3 en el plano xz, orientados como en la f gura 15, y $\theta = \frac{\pi}{6}$.

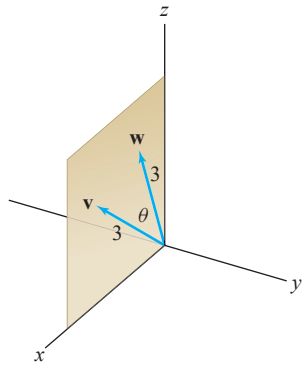


FIGURA 15

Los problemas 25 y 26, hacen referencia a la f gura 16.

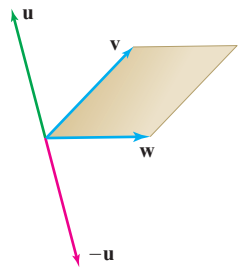


FIGURA 16

25. ¿Cuál de los vectores $\mathbf{u}$ o $-\mathbf{u}$ es igual a $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$?

26. ¿Cuál de las siguientes ternas forma un sistema orientado positivamente?

(a) $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}\}$ **(b)** $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ **(c)** $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$

(d) $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ **(e)** $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}, -\mathbf{u}\}$ **(f)** $\{\mathbf{v}, -\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$

27. Sea $\mathbf{v} = \langle 3, 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 0, 1, -1 \rangle$. Determine $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ usando las propiedades geométricas del producto vectorial en lugar de la fórmula.

28. ¿Cuáles son los posibles ángulos θ entre dos vectores unitarios $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ si $\|\mathbf{e} \times \mathbf{f}\| = \frac{1}{2}$?

29. Pruebe que si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están situados en el plano yz, entonces $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es un múltiplo de $\mathbf{i}$.

30. Halle los dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 1 \rangle$ como a $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 1 \rangle$.

31. Sean $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}'$ vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{e} \perp \mathbf{e}'$. Use las propiedades geométricas del producto vectorial para calcular $\mathbf{e} \times (\mathbf{e}' \times \mathbf{e})$.

32. Calcule la fuerza $\mathbf{F}$ sobre un electrón (carga $q = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C) que se mueve a velocidad 10^5 m/s en la dirección $\mathbf{i}$ en un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, donde $\mathbf{B} = 0{,}0004\mathbf{i} + 0{,}0001\mathbf{j}$ teslas (vea el ejemplo 5).

33. Un electrón que se mueve a velocidad $\mathbf{v}$ en el plano, experimenta una fuerza $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, donde q es la carga del electrón y $\mathbf{B}$ es un campo magnético uniforme que apunta en la perpendicular fuera de la página. ¿Cuál de los dos vectores $\mathbf{F}_1$ o $\mathbf{F}_2$ de la f gura 17 representa la fuerza sobre el electrón? Recuerde que q es negativa.

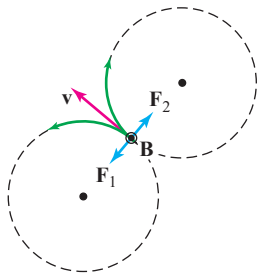


FIGURA 17 El vector del campo magnético $\mathbf{B}$ apunta en la perpendicular fuera de la página.

34. Calcule el producto mixto $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, donde $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -2, 2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, -1, 2 \rangle$.

35. Compruebe la identidad (10) para los vectores $\mathbf{v} = \langle 3, -2, 2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, -1, 2 \rangle$.

36. Halle el volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en la f gura 18.

37. Halle el área del paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en la f gura 18.

38. Calcule el volumen del paralelepípedo generado por:

$$\mathbf{u} = \langle 2, 2, 1 \rangle \qquad \mathbf{v} = \langle 1, 0, 3 \rangle \qquad \mathbf{w} = \langle 0, -4, 0 \rangle$$

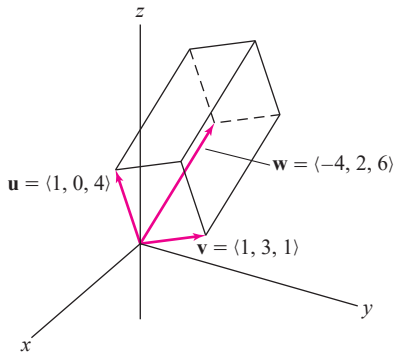


FIGURA 18

39. Represente y calcule el volumen del paralelepípedo generado por:

$$\mathbf{u} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{v} = \langle 0, 2, 0 \rangle \qquad \mathbf{w} = \langle 1, 1, 2 \rangle$$

40. Represente el paralelogramo generado por $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0, 0, 4 \rangle$ y calcule su área.

41. Calcule el área del paralelogramo generado por $\mathbf{u} = \langle 1, 0, 3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 1 \rangle$.

42. Halle el área del paralelogramo determinado por los vectores $\langle a, 0, 0 \rangle$ y $\langle 0, b, c \rangle$.

43. Represente el triángulo de vértices en O, $P = (3, 3, 0)$ y $Q = (0, 3, 3)$ y calcule su área utilizando productos vectoriales.

44. Use el producto vectorial para hallar el área del triángulo de vértices $P = (1, 1, 5)$, $Q = (3, 4, 3)$ y $R = (1, 5, 7)$ (f gura 19).

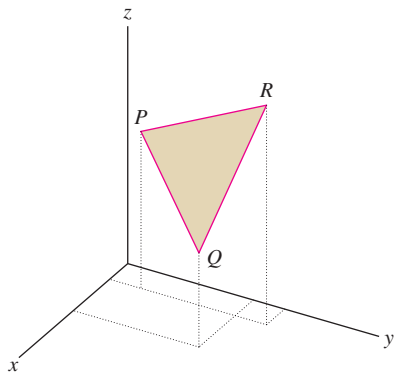


FIGURA 19

En los problemas 45-47, compruebe la identidad usando la fórmula del producto vectorial.

45. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$

46. $(\lambda \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (λ un escalar)

47. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

48. Use la descripción geométrica del teorema 1 para demostrar el teorema 2 (iii): $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ para algún escalar λ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

49. Compruebe las relaciones (5).

50. Pruebe que:

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j})$$

Deduzca que la propiedad asociativa no se puede cumplir para el producto vectorial.

51. Las componentes del producto vectorial tienen una interpretación geométrica. Pruebe que el valor absoluto de la componente $\mathbf{k}$ de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es igual al área del paralelogramo generado por las proyecciones $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{w}_0$ sobre el plano xy (f gura 20).

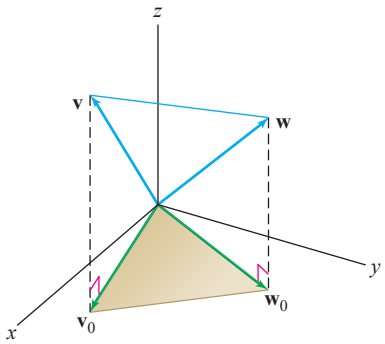


FIGURA 20

52. Formule y demuestre resultados análogos a los del problema 51 para las componentes **i** y **j** de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

53. Demuestre que tres puntos P, Q, R son colineales (están sobre una misma recta) si y sólo si $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$.

54. Use el resultado del problema 53 para determinar si los puntos P, Q y R son colineales y, en caso negativo, halle un vector normal al plano que los contiene.

(a) $P = (2, 1, 0), \quad Q = (1, 5, 2), \quad R = (-1, 13, 6)$

(b) $P = (2, 1, 0), \quad Q = (-3, 21, 10), \quad R = (5, -2, 9)$

(c) $P = (1, 1, 0), \quad Q = (1, -2, -1), \quad R = (3, 2, -4)$

55. Resuelva la ecuación $\langle 1, 1, 1\rangle \times \mathbf{X} = \langle 1, -1, 0\rangle$, donde $\mathbf{X} = \langle x, y, z\rangle$. *Nota:* hay inf nitas soluciones.

56. Explique geométricamente por qué $\langle 1, 1, 1\rangle \times \mathbf{X} = \langle 1, 0, 0\rangle$ no tiene solución, donde $\mathbf{X} = \langle x, y, z\rangle$.

57. Sea $\mathbf{X} = \langle x, y, z\rangle$. Pruebe que $\mathbf{i} \times \mathbf{X} = \mathbf{v}$ tiene solución si y sólo si **v** está contenido en el plano yz (la componente **i** es cero).

58. Suponga que los vectores **u**, **v** y **w** son mutuamente ortogonales, es decir que $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. Demuestre que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{0}$.

En los problemas 59-62: la ***torsión*** *respecto al origen* O*, debida a una fuerza* **F** *que actúa sobre un objeto cuyo vector de posición es* **r***, es la magnitud vectorial* $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$*. Si son diferentes fuerzas* $\mathbf{F}_j$ *las que actúan sobre posiciones* $\mathbf{r}_j$*, entonces la torsión neta (unidades: N-m o lb-ft) es la suma:*

$$\tau = \sum \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j$$

La torsión mide cómo la fuerza provoca que el objeto rote. Según las leyes de Newton, τ *es igual a la tasa de variación del momento angular.*

59. Calcule la torsión τ respecto al O que actúa sobre el punto P del brazo mecánico de la f gura 21(A), suponiendo que actúa una fuerza de 25 N, tal y como se indica. Ignore el peso del brazo.

60. Calcule la torsión neta respecto al origen O en P, suponiendo que en P hay una masa de 30 kg [f gura 21(B)]. La fuerza $\mathbf{F}_g$ debida a la gravedad sobre una masa m tiene una magnitud de $9{,}8m$ m/s^2 y actúa en la dirección hacia abajo.

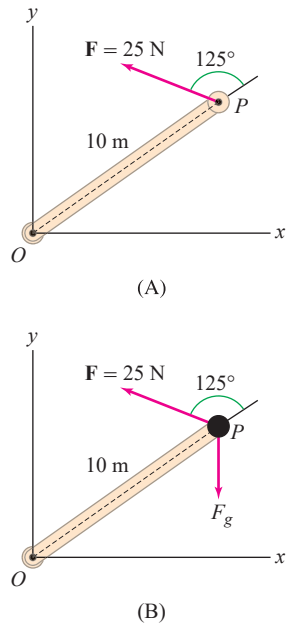


FIGURA 21

61. Sea τ la torsión neta respecto al O que actúa sobre el brazo robótico de la f gura 22. Suponga que las masas de los dos segmentos son m_1 y m_2 (en kg) y que se coloca un peso de m_3 kg en el extremo P. Al calcular la torsión, se puede suponer que la masa total de cada segmento del brazo se encuentra en el punto medio del brazo (su centro de masas). Pruebe que los vectores de posición de las masas m_1, m_2 y m_3 son:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}L_1(\operatorname{sen}\theta_1\mathbf{i} + \cos\theta_1\mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_2 = L_1(\operatorname{sen}\theta_1\mathbf{i} + \cos\theta_1\mathbf{j}) + \frac{1}{2}L_2(\operatorname{sen}\theta_2\mathbf{i} - \cos\theta_2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}_3 = L_1(\operatorname{sen}\theta_1\mathbf{i} + \cos\theta_1\mathbf{j}) + L_2(\operatorname{sen}\theta_2\mathbf{i} - \cos\theta_2\mathbf{j})$$

Después pruebe que:

$$\tau = -\left(L_1\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)\operatorname{sen}\theta_1 + L_2\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)\operatorname{sen}\theta_2\right)\mathbf{k}$$

Para simplif car los cálculos, observe que las fuerzas gravitacionales actúan en la dirección $-\mathbf{j}$, de tal manera que las componentes **j** de los vectores de posición $\mathbf{r}_i$ no contribuyen a la torsión.

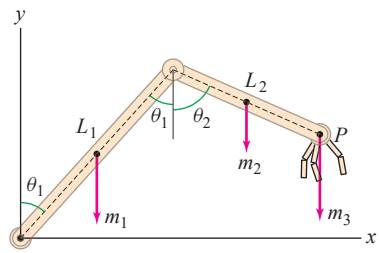


FIGURA 22

62. Continuando con el problema 61, suponga que $L_1 = 5$ ft, $L_2 = 3$ ft, $m_1 = 30$ lb, $m_2 = 20$ lb y $m_3 = 50$ lb. Si los ángulos θ_1, θ_2 son iguales (e iguales a θ), ¿cuál es el valor máximo que puede alcanzar θ si se supone que el brazo robótico puede soportar una torsión máxima de 400 ft-lb?

Problemas avanzados

63. Pruebe que los determinantes 3×3 se pueden calcular mediante la **regla de la diagonal**: repita las dos primeras columnas de la matriz y forme todos los productos de números sobre las seis diagonales que se indican. Después sume los productos para las diagonales que se inclinan de izquierda a derecha y reste los de las diagonales que se inclinan de derecha a izquierda.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

64. Use la regla de la diagonal para calcular $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

65. Demuestre que $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar λ. Suponga que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

66. Use la ec. (10) para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$$

Pruebe que se verif ca la igualdad si y sólo si $\mathbf{w}$ es un múltiplo de $\mathbf{v}$ o, como mínimo, uno de los dos vectores $\mathbf{v}$ o $\mathbf{w}$ es cero.

67. Pruebe que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores no nulos y $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$, entonces, o bien (i) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos o bien (ii) $\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$.

68. Suponga que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ son no nulos y:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{0}$$

Pruebe que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son, o bien mutuamente paralelos o bien mutuamente perpendiculares. *Indicación:* aplique el problema 67.

69. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vectores no nulos y considere:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \qquad \mathbf{w} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

(a) Demuestre que:

(i) $\mathbf{v}$ se encuentra en el plano generado por $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

(ii) $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$.

(b) Demuestre que $\mathbf{w}$ también cumple (i) y (ii). Deduzca que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelos.

(c) Pruebe algebraicamente que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ (f gura 23).

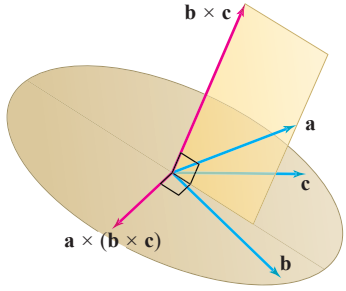


FIGURA 23

70. Use el problema 69 para demostrar la identidad:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

71. Pruebe que si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ son vectores no nulos tales que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, entonces existe un vector $\mathbf{X}$ tal que:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{X} = \mathbf{b} \qquad \boxed{13}$$

Indicación: pruebe que si $\mathbf{X}$ es ortogonal a $\mathbf{b}$ y no es un múltiplo de $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{a} \times \mathbf{X}$ es un múltiplo de $\mathbf{b}$.

72. Pruebe que si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores no nulos tales que $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, entonces el conjunto de todas la soluciones de la ec. (13) es una recta que tiene a $\mathbf{a}$ como vector director. *Indicación:* sea $\mathbf{X}_0$ cualquier solución (que existe en base al problema 71). Pruebe que cualquier otra solución es de la forma $\mathbf{X}_0 + \lambda\mathbf{a}$ para algún escalar λ.

73. Suponga que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se ecnuentran en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$, como en la f gura 24. Use argumentos de geometría plana para demostrar que el área del paralelogramo es igual a $\left[\det\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}\right]$.

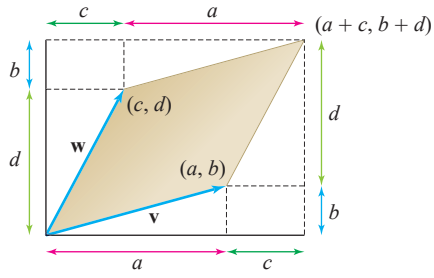


FIGURA 24

74. Considere el tetraedro generado por los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ como en la f gura 25(A). Sean A, B, C las caras que contienen al origen O y sea D la cuarta cara, opuesta al origen O. Para cada cara F, sea $\mathbf{v}_F$ el vector normal a la cara, que apunta hacia afuera del tetraedro, y cuya norma es igual a dos veces el área de F. Demuestre las relaciones:

$$\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_D = 0$$

Indicación: pruebe que $\mathbf{v}_D = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

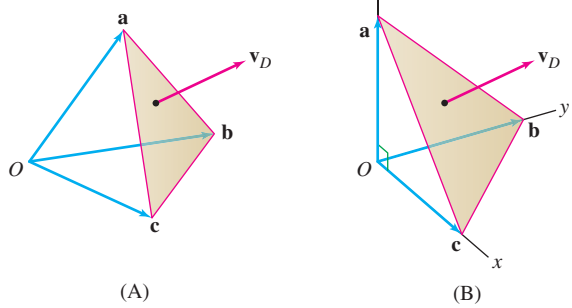


FIGURA 25 El vector $\mathbf{v}_D$ es perpendicular a la cara.

75. Siguiendo con la notación del problema 74, suponga que **a**, **b**, **c** son mutuamente perpendiculares, como en la f gura 25(B). Sea S_F el área de la cara F. Demuestre la siguiente versión, en tres dimensiones, del teorema de Pitágoras:

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2$$

13.5 Planos en tres dimensiones

Una ecuación lineal $ax + by = c$ en dos variables def ne una recta en $\mathbb{R}^2$. En esta sección se mostrará que una ecuación lineal $ax + by + cz = d$ en tres variables def ne un plano en $\mathbb{R}^3$.

El término "normal" es otra palabra para indicar "ortogonal" o "perpendicular."

Considere un plano $\mathcal{P}$ que pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Se puede determinar completamente $\mathcal{P}$ especif cando un vector no nulo $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ que sea ortogonal a $\mathcal{P}$. Un vector con estas características se denomina **vector normal**. Si se considera la base de $\mathbf{n}$ en el punto P_0 como en la f gura 1, se tiene que un punto $P = (x, y, z)$ pertenece a $\mathcal{P}$ justamente cuando $\overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$. Así, P se encuentra en el plano si:

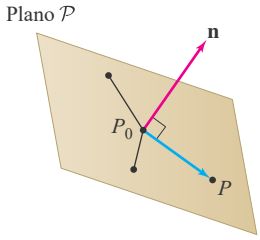


FIGURA 1 Un punto P se encuentra en $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{P_0P} \perp \mathbf{n}$.

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad \boxed{1}$$

En componentes, $\overrightarrow{P_0P} = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle$. Así la ec. (1) se lee:

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

De esta manera se obtiene la siguiente ecuación del plano:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Que se puede expresar como:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP_0} \qquad \boxed{2}$$

Si se introduce $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP_0}$, la ec. (2) resulta $\mathbf{n} \cdot \langle x, y, z\rangle = d$, o

$$ax + by + cz = d$$

TEOREMA 1 Ecuación de un plano Plano que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$:

Expresión vectorial: $\mathbf{n} \cdot \langle x, y, z\rangle = d$ [3]

Expresiones escalares: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ [4]

$ax + by + cz = d$ [5]

donde $d = \mathbf{n} \cdot \langle x_0, y_0, z_0\rangle = ax_0 + by_0 + cz_0$.

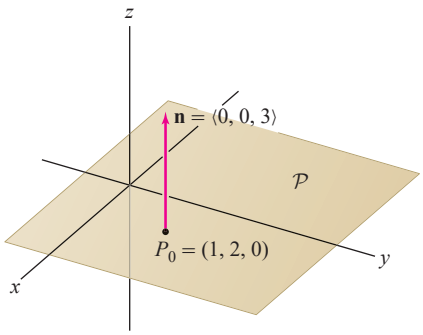


FIGURA 2 El plano de vector normal $\mathbf{n} = \langle 0, 0, 3\rangle$ que pasa por $P_0 = (1, 2, 0)$ es el plano xy.

Para ilustrar el funcionamiento en un caso sencillo, considere el plano $\mathcal{P}$ que pasa por $P_0 = (1, 2, 0)$ de vector normal $\mathbf{n} = \langle 0, 0, 3\rangle$ (f gura 2). Como $\mathbf{n}$ apunta en la dirección z, el plano $\mathcal{P}$ debe ser paralelo al plano xy. Por otra parte, P_0 está situado en el plano xy, por lo que $\mathcal{P}$ debe ser el propio plano xy. Esto es precisamente a lo que la ec. (3) da lugar:

$$\mathbf{n} \cdot \langle x, y, z\rangle = \mathbf{n} \cdot \langle 1, 2, 0\rangle$$
$$\langle 0, 0, 3\rangle \cdot \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 3\rangle \cdot \langle 1, 2, 0\rangle$$
$$3z = 0 \quad \text{o} \quad z = 0$$

Dicho de otro modo, la ecuación de $\mathcal{P}$ es $z = 0$, por lo que $\mathcal{P}$ es el plano xy.

EJEMPLO 1 Halle una ecuación del plano que pasa por $P_0 = (3, 1, 0)$ y tiene vector normal $\mathbf{n} = \langle 3, 2, -5 \rangle$.

Solución Usando la ec. (4), se obtiene:

$$3(x - 3) + 2(y - 1) - 5z = 0$$

De forma alternativa, se puede calcular:

$$d = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP_0} = \langle 3, 2, -5 \rangle \cdot \langle 3, 1, 0 \rangle = 11$$

y escribir la ecuación como $\langle 3, 2, -5 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle = 11$, o $3x + 2y - 5z = 11$.

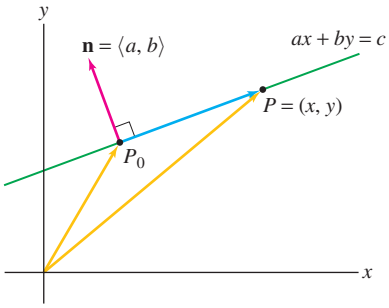


FIGURA 3 Una recta de vector normal $\mathbf{n}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Recuerde que las componentes de un vector normal están "escondidas" en la ecuación $ax + by + cz = d$, porque $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. Lo mismo ocurre para las rectas en $\mathbb{R}^2$. La recta $ax + by = c$ en la f gura 3 tiene vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b \rangle$ porque la pendiente de la recta es $-a/b$ y la pendiente del vector $\mathbf{n}$ es b/a (dos rectas son ortogonales si el producto de sus pendientes es -1).

Observe que si $\mathbf{n}$ es normal a un plano $\mathcal{P}$, también lo es cualquier múltiplo escalar λn. Cuando se usa $\lambda \mathbf{n}$ en lugar de $\mathbf{n}$, la ecuación resultante para $\mathcal{P}$ cambia en un factor λ. Por ejemplo, las dos ecuaciones siguientes def nen el mismo plano:

$$x + y + z = 1 \qquad 4x + 4y + 4z = 4$$

La primera ecuación usa el vector normal $\langle 1, 1, 1 \rangle$ y la segunda el vector normal $\langle 4, 4, 4 \rangle$.

Por otra parte, dos planos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son paralelos si tienen un vector normal en común. Los dos planos siguientes son paralelos porque cada uno de ellos es normal a $\mathbf{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$:

$$x + y + z = 1 \qquad x + y + z = 2 \qquad 4x + 4y + 4z = 7$$

En general, una familia de planos paralelos se puede construir eligiendo un vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ y haciendo variar la constante d de la ecuación

$$ax + by + cz = d$$

El único plano en esta familia que pasa por el origen tiene como ecuación $ax + by + cz = 0$.

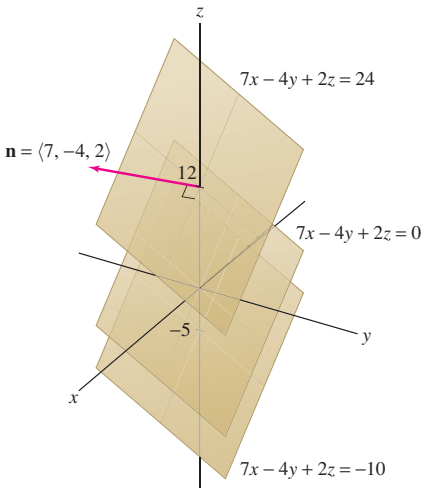


FIGURA 4 Planos paralelos de vector normal $\mathbf{n} = \langle 7, -4, 2 \rangle$.

EJEMPLO 2 Planos paralelos Sea $\mathcal{P}$ un plano de ecuación $7x - 4y + 2z = -10$. Halle una ecuación del plano paralelo a $\mathcal{P}$ que pasa por:

(a) el origen. **(b)** $Q = (2, -1, 3)$.

Solución Los planos paralelos a $\mathcal{P}$ tienen ecuación (f gura 4):

$$7x - 4y + 2z = d \qquad \boxed{6}$$

(a) Para $d = 0$, se obtiene el plano por el origen: $7x - 4y + 2z = 0$.

(b) El punto $Q = (2, -1, 3)$ cumple la ec. (6) con:

$$d = 7(2) - 4(-1) + 2(3) = 24$$

Por tanto, el plano paralelo a $\mathcal{P}$ que pasa por Q tiene ecuación $7x - 4y + 2z = 24$.

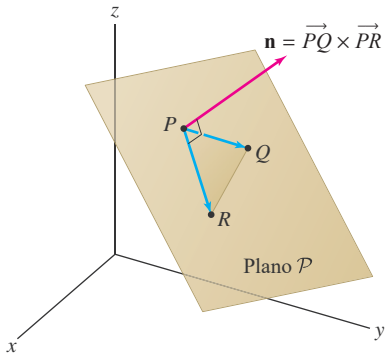


FIGURA 5 Tres puntos P, Q y R determinan un plano (suponiendo que no son colineales).

Los puntos que se encuentran en una recta se denominan **colineales**. Dados tres puntos P, Q y R que no son colineales, existe un solo plano que pasa por P, Q y R (f gura 5). En el siguiente ejemplo se ilustra cómo encontrar la ecuación de este plano.

EJEMPLO 3 El plano determinado por tres puntos Halle una ecuación del plano $\mathcal{P}$ determinado por los puntos:

$$P = (1, 0, -1) \qquad Q = (2, 2, 1) \qquad R = (4, 1, 2)$$

Solución

Etapa 1. **Halle un vector normal**

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ están en el plano $\mathcal{P}$, por lo que su producto vectorial es normal a $\mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 2, 2, 1\rangle - \langle 1, 0, -1\rangle = \langle 1, 2, 2\rangle$$

$$\overrightarrow{PR} = \langle 4, 1, 2\rangle - \langle 1, 0, -1\rangle = \langle 3, 1, 3\rangle$$

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = \langle 4, 3, -5\rangle$$

Según la ec. (5), $\mathcal{P}$ tiene como ecuación $4x + 3y - 5z = d$ para alguna d.

En el ejemplo 3, se podían haber usado los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$ (o $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{RQ}$) para hallar un vector normal $\mathbf{n}$.

Etapa 2. **Elija un punto en el plano y calcule *d***

Ahora elija cualquiera de los tres puntos, por ejemplo $P = (1, 0, -1)$, y calcule d:

$$d = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP} = \langle 4, 3, -5\rangle \cdot \langle 1, 0, -1\rangle = 9$$

Así, $\mathcal{P}$ tiene ecuación $4x + 3y - 5z = 9$. ■

ATENCIÓN *Cuando encuentre un vector normal al plano que contenga los puntos P, Q, R, asegúrese de calcular un producto vectorial como por ejemplo $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Un error común consiste en calcular un producto vectorial como $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ o $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR}$, que no necesariamente será normal al plano.*

EJEMPLO 4 Intersección de un plano y una recta Halle el punto P en el que el plano $3x - 9y + 2z = 7$ y la recta $\mathbf{r}(t) = \langle 1, 2, 1\rangle + t\langle -2, 0, 1\rangle$ se intersecan.

Solución La recta tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 - 2t, \qquad y = 2, \qquad z = 1 + t$$

Sustituya en la ecuación del plano y aísle t:

$$3x - 9y + 2z = 3(1 - 2t) - 9(2) + 2(1 + t) = 7$$

Simplif cando se obtiene $-4t - 13 = 7$ o $t = -5$. Por tanto, las coordenadas de P son:

$$x = 1 - 2(-5) = 11, \qquad y = 2, \qquad z = 1 + (-5) = -4$$

El plano y la recta se intersecan en el punto $P = (11, 2, -4)$. ■

La intersección de un plano $\mathcal{P}$ con un plano de coordenadas, o con un plano paralelo a un plano de coordenadas, se denomina **traza**. La traza es una recta salvo si $\mathcal{P}$ es paralelo al plano de coordenadas (en cuyo caso la traza es vacía o el propio $\mathcal{P}$).

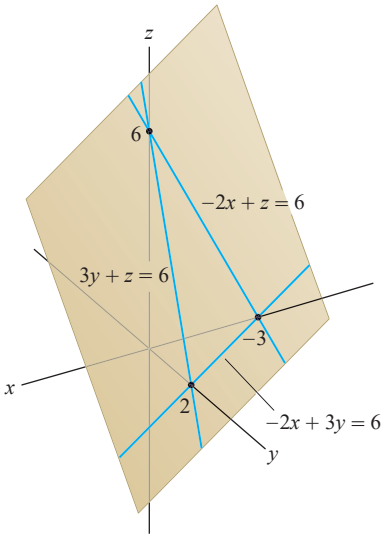


FIGURA 6 Las tres rectas azules son las trazas del plano $-2x + 3y + z = 6$ en los planos de coordenadas.

■ **EJEMPLO 5 Trazas del plano** Halle las trazas del plano $-2x+3y+z = 6$ en los planos coordenados.

Solución Para obtener la traza en el plano xy sustituya $z = 0$ en la ecuación del plano. Por tanto, la traza es la recta $-2x + 3y = 6$ en el plano xy (f gura 6).

De forma análoga, la traza en el plano xz se obtiene sustituyendo $y = 0$, que da como resultado la recta $-2x + z = 6$ en el plano xz. Finalmente, la traza en el plano yz es $3y + z = 6$. ■

13.5 RESUMEN

- Ecuación del plano por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, de vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$:

Expresión vectorial:	$\mathbf{n} \cdot \langle x, y, z\rangle = d$
Expresiones escalares:	$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
	$ax + by + cz = d$

donde $d = \mathbf{n} \cdot \langle x_0, y_0, z_0\rangle = ax_0 + by_0 + cz_0$.

- La familia de planos paralelos, de vector normal dado $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ está formada por todos los planos de ecuación $ax + by + cz = d$ para algún d.
- Plano que pasa por tres puntos P, Q, R que no son colineales:
  - $\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$
  - $d = \mathbf{n} \cdot \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, donde $P = (x_0, y_0, z_0)$
- La intersección de un plano $\mathcal{P}$ con un plano de coordenadas, o con un plano paralelo a un plano de coordenadas, se denomina una *traza*. La traza en el plano yz se obtiene sustituyendo $x = 0$ en la ecuación del plano (y análogamente para las trazas en los planos xz y xy).

13.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la ecuación del plano paralelo a $3x + 4y - z = 5$ que pasa por el origen?

2. ¿A cuál de los siguientes planos es normal el vector $\mathbf{k}$?

(a) $x = 1$ **(b)** $y = 1$ **(c)** $z = 1$

3. ¿Cuál de los siguientes planos no es paralelo al plano $x+y+z = 1$?

(a) $2x + 2y + 2z = 1$ **(b)** $x + y + z = 3$

(c) $x - y + z = 0$

4. ¿Cuál de los planos de coordenadas es paralelo el plano $y = 1$?

5. ¿Cuál de los siguientes planos contiene el eje z?

(a) $z = 1$ **(b)** $x + y = 1$ **(c)** $x + y = 0$

6. Suponga que tanto un plano $\mathcal{P}$ de vector normal $\mathbf{n}$ como una recta $\mathcal{L}$ de vector director $\mathbf{v}$ pasan por el origen y que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones es correcta?

(a) $\mathcal{L}$ está contenida en $\mathcal{P}$.

(b) $\mathcal{L}$ es ortogonal a $\mathcal{P}$.

Problemas

En los problemas 1-8, obtenga la ecuación del plano con vector director $\mathbf{n}$ *que pasa por el punto dado en cada una de las tres expresiones (una expresión vectorial y dos escalares).*

1. $\mathbf{n} = \langle 1, 3, 2\rangle$, $(4, -1, 1)$

2. $\mathbf{n} = \langle -1, 2, 1\rangle$, $(3, 1, 9)$

3. $\mathbf{n} = \langle -1, 2, 1\rangle$, $(4, 1, 5)$

4. $\mathbf{n} = \langle 2, -4, 1\rangle$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

5. $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, $(3, 1, -9)$

6. $\mathbf{n} = \mathbf{j}$, $(-5, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

7. $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $(6, 7, 2)$

8. $\mathbf{n} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $(4, 2, -8)$

9. Determine la ecuación de cualquier plano que pasa por el origen.

10. Obtenga la ecuación de dos planos distintos de vector director $\mathbf{n} = \langle 3, 2, 1 \rangle$ que no pasen por el origen.

11. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones es verdadera para un plano que es paralelo al plano yz?

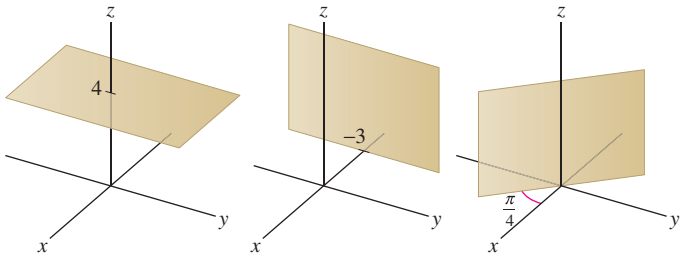
(a) $\mathbf{n} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ es un vector normal.

(b) $\mathbf{n} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ es un vector normal.

(c) La ecuación es de la forma $ay + bz = d$.

(d) La ecuación es de la forma $x = d$.

12. Halle un vector normal $\mathbf{n}$ y una ecuación para los planos de las f guras 7(A)-(C).



(A) (B) (C)

FIGURA 7

En los problemas 13-16, halle un vector normal al plano con la ecuación dada.

13. $9x - 4y - 11z = 2$

14. $x - z = 0$

15. $3(x - 4) - 8(y - 1) + 11z = 0$

16. $x = 1$

En los problemas 17-20, halle una ecuación para el plano que pasa por los tres puntos dados.

17. $P = (2, -1, 4)$, $Q = (1, 1, 1)$, $R = (3, 1, -2)$

18. $P = (5, 1, 1)$, $Q = (1, 1, 2)$, $R = (2, 1, 1)$

19. $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 1)$, $R = (2, 0, 1)$

20. $P = (2, 0, 0)$, $Q = (0, 4, 0)$, $R = (0, 0, 2)$

En los problemas 21-28, halle la ecuación del plano descrito.

21. Pasa por O y es paralelo a $4x - 9y + z = 3$.

22. Pasa por $(4, 1, 9)$ y es paralelo a $x + y + z = 3$.

23. Pasa por $(4, 1, 9)$ y es paralelo a $x = 3$.

24. Pasa por $P = (3, 5, -9)$ y es paralelo al plano xz.

25. Pasa por $(-2, -3, 5)$ y su vector normal es $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

26. Contiene las rectas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle 3t, t, 8t \rangle$.

27. Contiene las rectas $\mathbf{r}_1(t) = \langle 2, 1, 0 \rangle + \langle t, 2t, 3t \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle 2, 1, 0 \rangle + \langle 3t, t, 8t \rangle$.

28. Contiene a $P = (-1, 0, 1)$ y a $\mathbf{r}(t) = \langle t + 1, 2t, 3t - 1 \rangle$.

29. ¿Son paralelos los planos $\frac{1}{2}x + 2x - y = 5$ y $3x + 12x - 6y = 1$?

30. Sean a, b, c constantes. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones def ne un plano que pasa por $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$?

(a) $ax + by + cz = 1$

(b) $bcx + acy + abz = abc$

(c) $bx + cy + az = 1$

(d) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

31. Halle una ecuación para el plano $\mathcal{P}$ de la f gura 8.

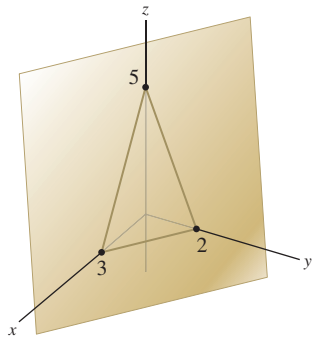


FIGURA 8

32. Compruebe que el plano $x - y + 5z = 10$ y la recta $\mathbf{r}(t) = \langle 1, 0, 1 \rangle + +t\langle -2, 1, 1 \rangle$ se intersecan en $P = (-3, 2, 3)$.

En los problemas 33-36, halle la intersección de la recta y el plano.

33. $x + y + z = 14$, $\mathbf{r}(t) = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 0, 2, 4 \rangle$

34. $2x + y = 3$, $\mathbf{r}(t) = \langle 2, -1, -1 \rangle + t\langle 1, 2, -4 \rangle$

35. $z = 12$, $\mathbf{r}(t) = t\langle -6, 9, 36 \rangle$

36. $x - z = 6$, $\mathbf{r}(t) = \langle 1, 0, -1 \rangle + t\langle 4, 9, 2 \rangle$

En los problemas 37-42, halle la traza del plano con el plano de coordenadas que se indica.

37. $3x - 9y + 4z = 5$, yz

38. $3x - 9y + 4z = 5$, xz

39. $3x + 4z = -2$, xy

40. $3x + 4z = -2$, xz

41. $-x + y = 4$, xz

42. $-x + y = 4$, yz

43. ¿Tiene traza en yz el plano $x = 5$? Razone su respuesta.

44. Obtenga las ecuaciones de dos planos diferentes cuya traza en el plano xy tenga como ecuación $4x + 3y = 8$.

45. Obtenga las ecuaciones de dos planos diferentes cuya traza en el plano yz tenga como ecuación $y = 4z$.

46. Halle unas ecuaciones paramétricas de la recta por $P_0 = (3, -1, 1)$ perpendicular al plano $3x + 5y - 7z = 29$.

47. Halle todos los planos en $\mathbb{R}^3$ cuya intersección con el plano xz sea la recta de ecuación $3x + 2z = 5$.

48. Halle todos los planos en $\mathbb{R}^3$ cuya intersección con el plano xy sea la recta $\mathbf{r}(t) = t\langle 2, 1, 0\rangle$.

En los problemas 49-54, calcule el ángulo entre los dos planos, que se def ne como el ángulo θ (comprendido entre 0 y π) formado por sus vectores normales (f gura 9).

49. Planos de vectores normales $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{n}_2 = \langle -1, 1, 1\rangle$.

50. Planos de vectores normales $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, 1\rangle$, $\mathbf{n}_2 = \langle 4, 1, 3\rangle$.

51. $2x + 3y + 7z = 2$ y $4x - 2y + 2z = 4$

52. $x - 3y + z = 3$ y $2x - 3z = 4$

53. $3(x-1) - 5y + 2(z-12) = 0$ y el plano de vector normal $\mathbf{n} = \langle 1, 0, 1\rangle$.

54. El plano que pasa por $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y el plano yz.

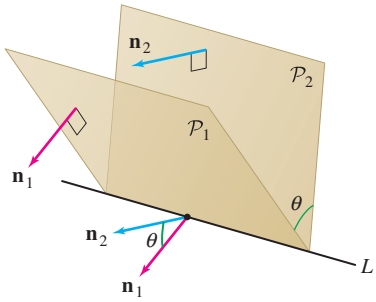


FIGURA 9 Por def nición, el ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus vectores normales.

55. Halle una ecuación del plano que forma un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ con el plano $3x + y - 4z = 2$.

56. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ planos de vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ respectivamente. Suponga que estos planos no son paralelos y sea $\mathcal{L}$ su intersección (una recta). Pruebe que $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es un vector director de $\mathcal{L}$.

57. Halle un plano que sea perpendicular a los dos planos $x + y = 3$ y $x + 2y - z = 4$.

58. Sea $\mathcal{L}$ la intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x + 2y + 3z = 1$. Use el problema 56 para hallar un vector director para $\mathcal{L}$. A continuación, halle un punto P de $\mathcal{L}$ por *inspección* y obtenga las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{L}$.

59. Sea $\mathcal{L}$ la intersección de los planos $x - y - z = 1$ y $2x + 3y + z = 2$. Halle ecuaciones paramétricas para la recta $\mathcal{L}$. *Indicación:* para hallar un punto de $\mathcal{L}$, sustituya un valor arbitrario de z (por ejemplo, $z = 2$) y resuelva las dos ecuaciones resultantes en x e y.

60. Halle unas ecuaciones paramétricas de los planos $2x + y - 3z = 0$ y $x + y = 1$.

61. Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, cada uno de norma 12, se encuentran en el plano $x + 2y - 2z = 0$. El ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\pi/6$. Esta información determina $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ salvo por un signo ± 1. ¿Cuáles son los dos posibles valores de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$?

62. El plano:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

interseca los ejes x, y y z en los puntos P, Q y R. Halle el área del triángulo $\triangle PQR$.

63. En este problema, se muestra que la distancia ortogonal D desde el plano $\mathcal{P}$ de ecuación $ax + by + cz = d$ al origen O es igual a (f gura 10):

$$D = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Sea $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ y P el punto en el que la recta que pasa por $\mathbf{n}$ corta a $\mathcal{P}$. Por def nición, la distancia ortogonal de $\mathcal{P}$ a O es la distancia de P a O.

(a) Pruebe que P es el punto terminal de $\mathbf{v} = \left(\frac{d}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\right)\mathbf{n}$.

(b) Pruebe que la distancia de P a O es D.

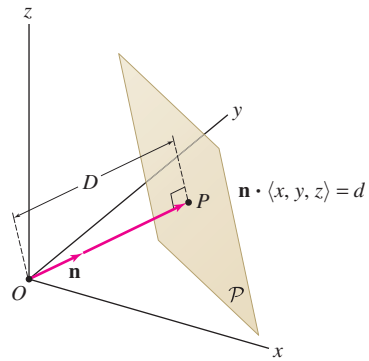


FIGURA 10

64. Use el problema 63 para calcular la distancia ortogonal del plano $x + 2y + 3z = 5$ al origen.

Problemas avanzados

En los problemas 65 y 66, sea $\mathcal{P}$ un plano de ecuación:

$$ax + by + cz = d$$

y vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$. Para cualquier punto Q, existe un único punto P en $\mathcal{P}$ que es el más cercano a Q, y tal que $\overline{PQ}$ es ortogonal a $\mathcal{P}$ (f gura 11).

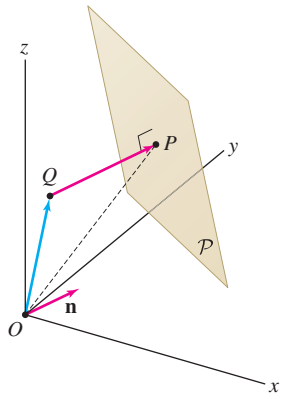


FIGURA 11

65. Pruebe que el punto P en el plano $\mathcal{P}$ más cercano a Q queda determinado por la ecuación:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \left(\frac{d - \overrightarrow{OQ} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n} \qquad \boxed{7}$$

66. Por definición, la distancia de un punto $Q = (x_1, y_1, z_1)$ al plano $\mathcal{P}$ es $\|QP\|$ donde P es el punto de $\mathcal{P}$ que está más cercano a Q. Demuestre:

$$\text{Distancia de } Q \text{ a } \mathcal{P} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\|\mathbf{n}\|} \qquad \boxed{8}$$

67. Use la ec. (7) para hallar el punto P más cercano a $Q = (2, 1, 2)$ y que esté en el plano $x + y + z = 1$.

68. Halle el punto P más cercano a $Q = (-1, 3, -1)$ que esté en el plano $x - 4z = 2$.

69. Use la ec. (8) para hallar la distancia de $Q = (1, 1, 1)$ al plano $2x + y + 5z = 2$.

70. Halle la distancia de $Q = (1, 2, 2)$ al plano $\mathbf{n} \cdot \langle x, y, z \rangle = 3$, donde $\mathbf{n} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \rangle$.

71. ¿Cuál es la distancia de $Q = (a, b, c)$ al plano $x = 0$? Visualice su respuesta geométricamente y explíquela sin realizar ningún cálculo. A continuación compruebe que la ec. (8) da lugar a la misma respuesta.

72. Se dice que la ecuación de un plano $\mathbf{n} \cdot \langle x, y, z \rangle = d$ está en **forma normal**, si $\mathbf{n}$ es un vector unitario. Pruebe que, en tal caso, $|d|$ es la distancia del plano al origen. Escriba la ecuación del plano $4x - 2y + 4z = 24$ en forma normal.

13.6 Un estudio de las cuádricas

Las cuádricas son las superficies análogas a las secciones cónicas. Recuerde que una sección cónica es una curva en $\mathbb{R}^2$ definida mediante una ecuación cuadrática en dos variables. Una cuádrica se define mediante una ecuación cuadrática en *tres* variables:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + ax + by + cz + d = 0 \qquad \boxed{1}$$

Para asegurar que la ec. (1) es realmente cuadrática, se supondrá que los coeficientes de grado 2 A, B, C, D, E, F no son todos cero.

Como las secciones cónicas, las cuádricas se clasifican en unos pocos tipos. Cuando se elijen los ejes de coordenadas de manera que coincidan con los ejes de la cuádrica, la ecuación de la cuádrica tiene una expresión sencilla. Se dice entonces que la cuádrica está en **posición estándar**. En posición estándar, los coeficientes D, E, F son todos cero y la parte lineal $(ax + by + cz + d)$ se reduce a un solo término. En este pequeño estudio de cuádricas, nos centraremos en las cuádricas en posición estándar.

Las superficies análogas a las elipses son los **elipsoides**, que tienen forma de huevo (figura 1). En su forma estándar, la ecuación de un elipsoide es:

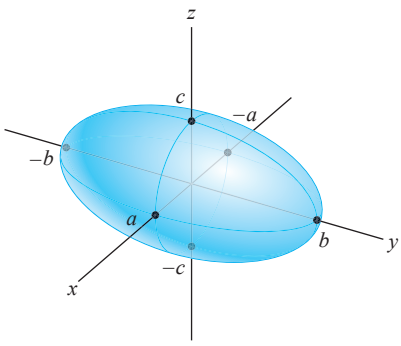


FIGURA 1 Elipsoide de ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$.

Elipsoide $\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$

Para $a = b = c$, esta ecuación es equivalente a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el elipsoide es una esfera de radio a.

Las superficies se suelen representar gráficamente por una malla de curvas llamadas **trazas**, que se obtienen intersecando la superficie con planos paralelos a uno de los planos de coordenadas (figura 2). En términos algebraicos, esto corresponde a **bloquear** una de las tres variables (mantenerla constante). Por ejemplo, la intersección del plano horizontal $z = z_0$ con la superficie es una curva de traza horizontal.

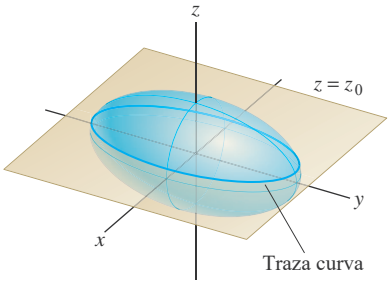


FIGURA 2 La intersección del plano $z = z_0$ con un elipsoide es una elipse.

EJEMPLO 1 Las trazas de un elipsoide Describa las trazas del elipsoide:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{7}\right)^2 + \left(\frac{z}{9}\right)^2 = 1$$

Solución En primer lugar, observe que las trazas en los planos coordenados son elipses (f gura 3A):

traza xy (considere $z = 0$, azul en la f gura): $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{7}\right)^2 = 1$

traza yz (considere $x = 0$, verde en la f gura): $\left(\frac{y}{7}\right)^2 + \left(\frac{z}{9}\right)^2 = 1$

traza xz (considere $y = 0$, rojo en la f gura): $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{z}{9}\right)^2 = 1$

En realidad, todas las trazas de un elipsoide son elipses. Por ejemplo, la traza horizontal def nida por $z = z_0$ es la elipse [f gura 3(B)]

$$\text{Traza a altura } z_0\text{: } \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{7}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{9}\right)^2 = 1 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = \underbrace{1 - \frac{z_0^2}{81}}_{\text{Una constante}}$$

La traza a altura $z_0 = 9$ es únicamente el punto $(0, 0, 9)$ porque $x^2/25 + y^2/49 = 0$ tiene una única solución: $x = 0, y = 0$. Análogamente, para $z_0 = -9$ la traza es el punto $(0, 0, -9)$. Si $|z_0| > 9$, entonces $1 - z_0^2/81 < 0$ y el plano se encuentra por encima, o por debajo, del elipsoide. En tal caso, la traza no contiene ningún punto. Las trazas en los planos $x = x_0$ e $y = y_0$ admiten una descripción similar [f gura 3(C)]. ■

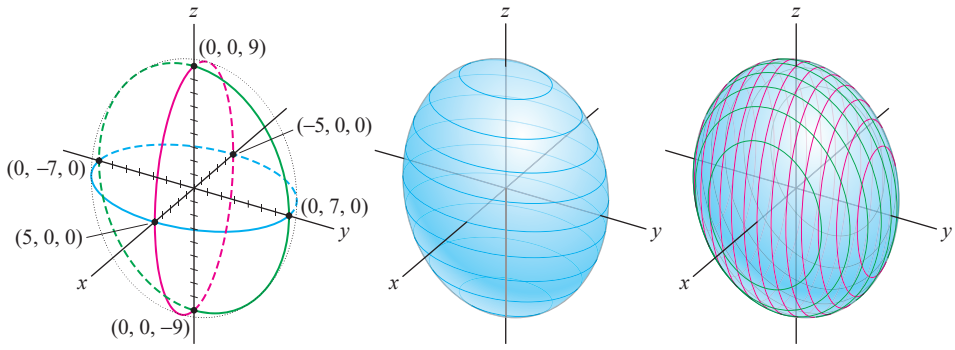


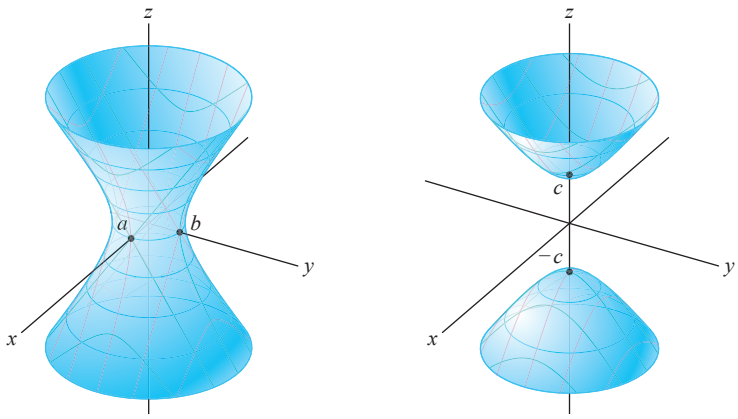
FIGURA 3 El elipsoide $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{7}\right)^2 + \left(\frac{z}{9}\right)^2 = 1$.

Los análogos a las hipérbolas son los **hiperboloides**, que son de dos tipos, según si la superf cie tiene una o dos componentes. Nos referiremos a estos tipos de hiperboloides como de una o de dos hojas (f gura 4). Sus ecuaciones en posición estándar son:

Hiperboloides	Una hoja:	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 + 1$
	Dos hojas:	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$

2

Observe que un hiperboloide de dos hojas no contiene ningún punto para el que su coordenada z cumpla $-c < z < c$ porque el término de la derecha $\left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$ sería entonces negativo pero el término de la izquierda de la ecuación es mayor o igual que cero.



(A) Hiperboloide de una hoja (B) Hiperboloide de dos hojas

FIGURA 4 Hiperboloides de una y de dos hojas.

EJEMPLO 2 Las trazas de un hiperboloide de una hoja Determine las trazas del hiperboloide $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{z}{4}\right)^2 + 1$.

Solución Las trazas horizontales son elipses y las trazas verticales (paralelas tanto al plano yz como al plano xz) son hipérbolas (f gura 5):

Traza $z = z_0$ (elipse, azul en la f gura): $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{z_0}{4}\right)^2 + 1$

Traza $x = x_0$ (hipérbola, verde en la f gura): $\left(\frac{y}{3}\right)^2 - \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x_0}{2}\right)^2$

Traza $y = y_0$ (hipérbola, rojo en la f gura): $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 1 - \left(\frac{y_0}{3}\right)^2$

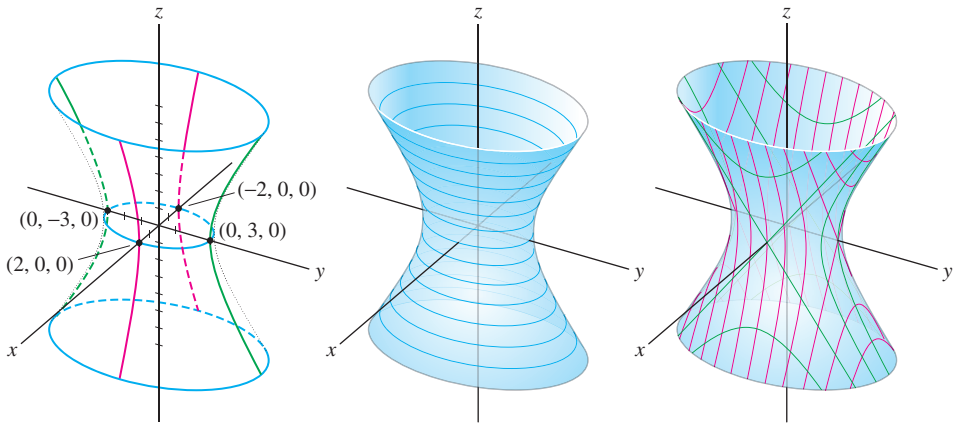
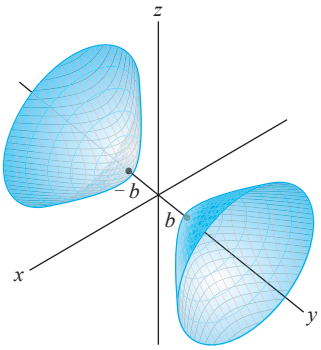


FIGURA 5 El hiperboloide $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{z}{4}\right)^2 + 1$.



Hiperboloide de dos hojas

FIGURA 6 El hiperboloide de dos hojas $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{y}{b}\right)^2-1$.

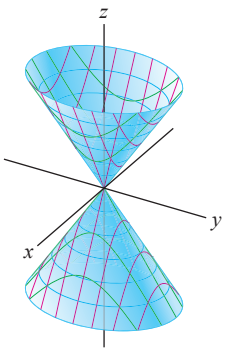


FIGURA 7 Cono elíptico $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{z}{c}\right)^2$.

■ **EJEMPLO 3 Hiperboloide de dos hojas simétrico respecto al eje *y*** Pruebe que $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{y}{b}\right)^2-1$ no tiene ningún punto para $-b<y<b$.

Solución Esta ecuación no tiene la misma forma que la ec. (3) porque las variables y y z se encuentran intercambiadas. Este hiperboloide es simétrico respecto al eje y y no respecto al eje z (f gura 6). El término de la izquierda de la ecuación es siempre ≥ 0. Por tanto, no existen soluciones si $|y|<b$ porque el término a la derecha es $\left(\frac{y}{b}\right)^2-1<0$. Por tanto, el hiperboloide tiene dos hojas, correspondientes a $y\geq b$ e $y\leq -b$. ■

La siguiente ecuación def ne un **cono elíptico** (f gura 7):

Cono elíptico: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{z}{c}\right)^2$

Un cono elíptico se puede entender como un caso límite de un hiperboloide de una hoja en que se "pellizca la cintura" hasta obtener un punto.

La tercera familia importante de cuádricas son los **paraboloides**. Hay de dos tipos: elípticos e hiperbólicos. En posición estándar, sus ecuaciones son:

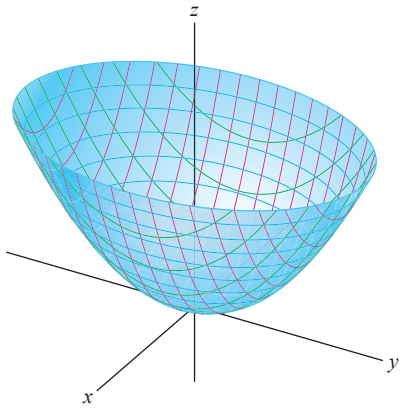
Paraboloides

Elíptico: $z=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$

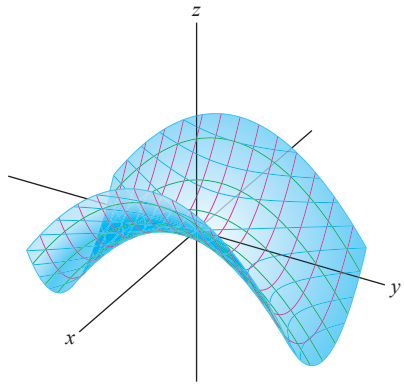
Hiperbólico: $z=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$ **3**

Vamos a comparar sus trazas (f gura 8):

	Paraboloide elíptico	Paraboloide hiperbólico
Trazas horizontales	elipses	hipérbolas
Trazas verticales	parábolas con las ramas hacia arriba	parábolas con las ramas hacia arriba y parábolas con las ramas hacia abajo



(A) Paraboloide elíptico $z=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2$



(B) Paraboloide hiperbólico $z=\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2$

FIGURA 8

Observe, por ejemplo, que para el paraboloide hiperbólico las trazas verticales $x = x_0$ son parábolas con las ramas hacia abajo (en verde en la f gura)

$$\underbrace{z = -\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_0}{a}\right)^2}_{\text{Traza } x = x_0 \text{ del paraboloide hiperbólico}}$$

mientras que las trazas verticales $y = y_0$ son parábolas con las ramas hacia arriba (en rojo en la f gura)

$$\underbrace{z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{b}\right)^2}_{\text{Traza } y = y_0 \text{ del paraboloide hiperbólico}}$$

Los paraboloides desempeñan un papel importante en la optimización de funciones de dos variables. El paraboloide elíptico de la figura 8 tiene un mínimo local en el origen. El paraboloide hiperbólico tiene una "forma de silla" en el origen, que es el análogo a un punto de inflexión para superficies.

EJEMPLO 4 Expresión alternativa para un paraboloide hiperbólico Pruebe que $z = 4xy$ es un paraboloide hiperbólico escribiendo la ecuación en términos de las variables $u = x + y$ y $v = x - y$.

Solución Observe que $u + v = 2x$ y $u - v = 2y$. Así:

$$4xy = (u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

y la ecuación, en las coordenadas $\{u, v, z\}$, resulta ser $z = u^2 - v^2$. Las coordenadas $\{u, v, z\}$ se obtienen por rotación de las coordenadas $\{x, y, z\}$ en un ángulo de 45° respecto al eje z (f gura 9). ■

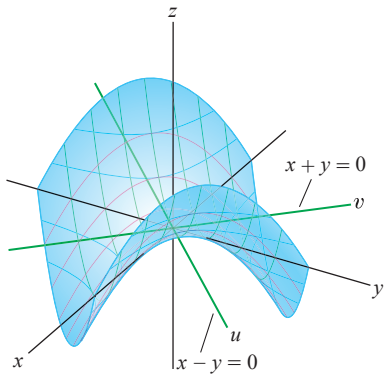


FIGURA 9 El paraboloide hiperbólico queda def nido por $z = 4xy$ o $z = u^2 - v^2$.

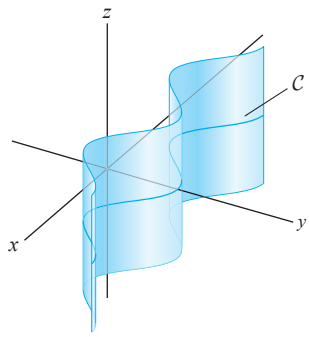
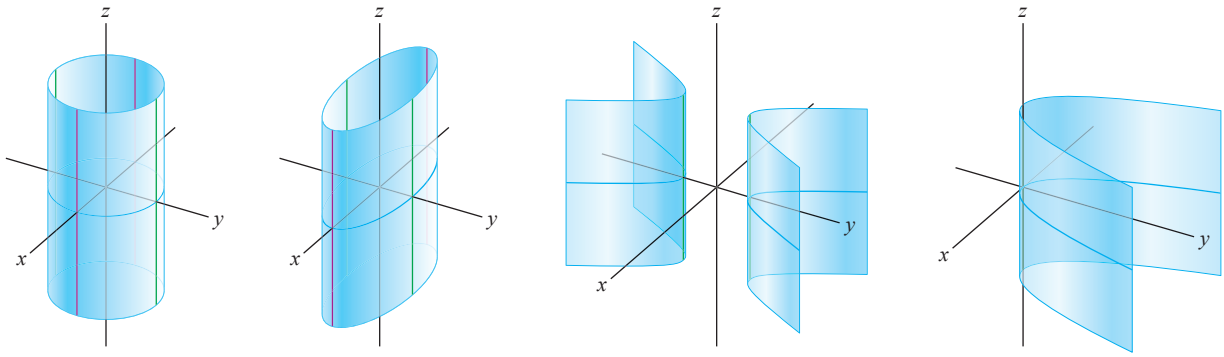


FIGURA 10 El cilindro de base $\mathcal{C}$.

Otro tipo de cuádricas son los **cilindros cuadráticos**. Se utiliza el término *cilindro* en el siguiente sentido: dada una curva $\mathcal{C}$ en el plano xy, el cilindro de base $\mathcal{C}$ es la superf cie formada por todas las rectas verticales que pasan por $\mathcal{C}$ (f gura 10). Las ecuaciones de los cilindros involucran sólo las variables x e y. La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ def ne un cilindro circular de radio r siendo el eje z su eje central. La f gura 11 muestra un cilindro circular y otros tres tipos de cilindros cuadráticos.

Los elipsoides, hiperboloides, paraboloides y cilindros cuadráticos se denominan cuádricas **no degeneradas**. También existe un cierto número de cuádricas "degeneradas". Por ejemplo, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ es una cuádrica que se reduce a un único punto $(0, 0, 0)$ y $(x + y + z)^2 = 1$ consiste en la unión de los dos planos $x + y + z = \pm 1$.



$x^2 + y^2 = r^2$
Cilindro circular de radio r

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
Cilindro elíptico

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
Cilindro hiperbólico

$y = ax^2$
Cilindro parabólico

FIGURA 11

13.6 RESUMEN

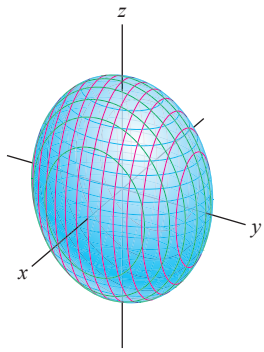
- Una *cuádrica* es una superf cie def nida mediante una ecuación cuadrática en tres variables para la que alguno de los coef cientes A-F es no nulo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + ax + by + cz + d = 0$$

- Cuádricas en posición estándar:

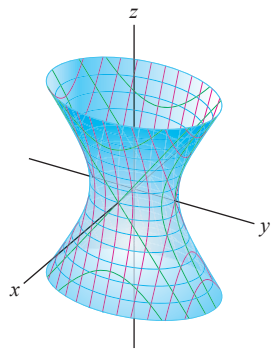
Elipsoide

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$



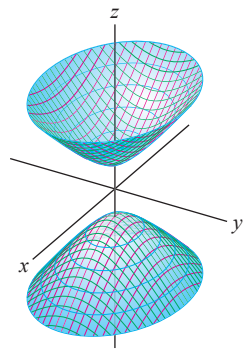
Hiperboloide (una hoja)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 + 1$$

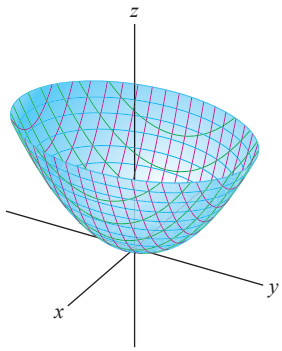


Hiperboloide (dos hojas)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1$$

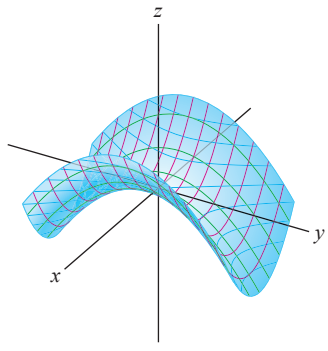


Paraboloide (elíptico)



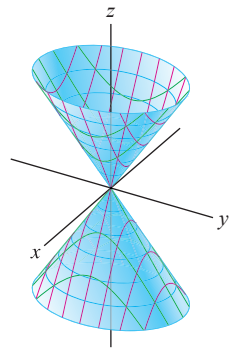
$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

Paraboloide (hiperbólico)



$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

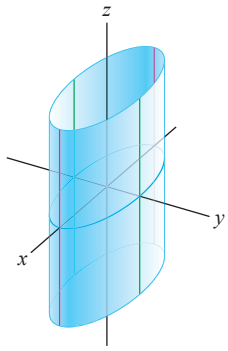
Cono (elíptico)



$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

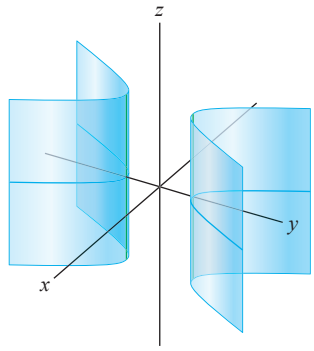
• Un cilindro (vertical) es una superf cie formada por todas las rectas verticales que pasan por una curva (llamada la base) en el plano xy. Un cilindro cuadrático es un cilindro cuya base es una sección cónica. Hay tres tipos:

Cilindro elíptico



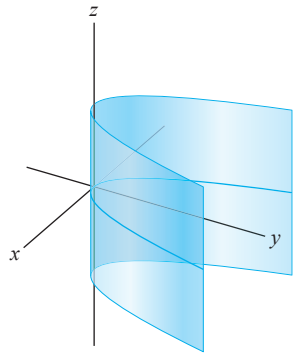
$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

Cilindro hiperbólico



$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

Cilindro parabólico



$y=ax^2$

13.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Verdadero o falso? Todas las trazas de un elipsoide son elipses.

2. ¿Verdadero o falso? Todas las trazas de un hiperboloide son hipérbolas.

3. ¿Qué cuádricas pueden tener como trazas hipérbolas y parábolas también?

4. ¿Hay alguna cuádrica cuyas trazas sean siempre parábolas?

5. Una superf cie se llama **acotada** si existe $M > 0$ tal que todo punto de la superf cie se encuentra a una distancia de como mucho M del origen. ¿Qué cuádricas son acotadas?

6. ¿Cuál es la def nición de cilindro parabólico?

Problemas

En los problemas 1-6, determine si la ecuación def ne un elipsoide o un hiperboloide. Si se trata de un hiperboloide, establezca si es de una o de dos hojas.

1. $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{5}\right)^2=1$

2. $\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2-\left(\frac{z}{7}\right)^2=1$

3. $x^2+3y^2+9z^2=1$

4. $-\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{5}\right)^2=1$

5. $x^2-3y^2+9z^2=1$

6. $x^2-3y^2-9z^2=1$

En los problemas 7-12, determine si la ecuación def ne un paraboloide elíptico, un paraboloide hiperbólico o un cono elíptico.

7. $z=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2$

8. $z^2=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2$

9. $z=\left(\frac{x}{9}\right)^2-\left(\frac{y}{12}\right)^2$

10. $4z=9x^2+5y^2$

11. $3x^2-7y^2=z$

12. $3x^2+7y^2=14z^2$

En los problemas 13-20, determine el tipo de cuádrica y describa la traza obtenida al intersecar con el plano indicado.

13. $x^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+z^2=1, \quad y=0$

14. $x^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+z^2=1, \quad y=5$

15. $x^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+z^2=1, \quad z=\frac{1}{4}$

16. $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2-5z^2=1, \quad x=0$

17. $\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2-5z^2=1, \quad y=1$

18. $4x^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2-2z^2=-1, \quad z=1$

19. $y=3x^2, \quad z=27$

20. $y=3x^2, \quad y=27$

21. Asocie cada uno de los elipsoides de la f gura 12 con la ecuación correcta:

(a) $x^2+4y^2+4z^2=16$

(b) $4x^2+y^2+4z^2=16$

(c) $4x^2+4y^2+z^2=16$

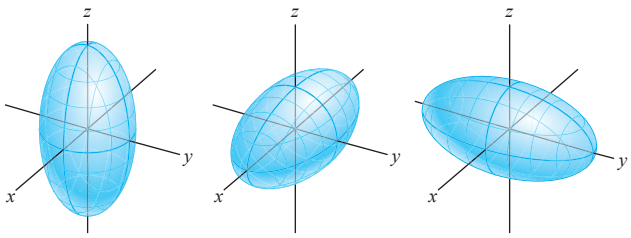


FIGURA 12

22. Describa la superf cie que se obtiene cuando, en la ecuación $\pm 8x^2 \pm 3y^2 \pm z^2 = 1$, se elije (a) todos los signos positivos, (b) un signo menos, y (c) dos signos menos.

23. ¿Cuál es la ecuación de la superf cie que se obtiene cuando el paraboloide elíptico $z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2$ se rota respecto al eje x en un ángulo de 90°? Haga referencia a la f gura 13.

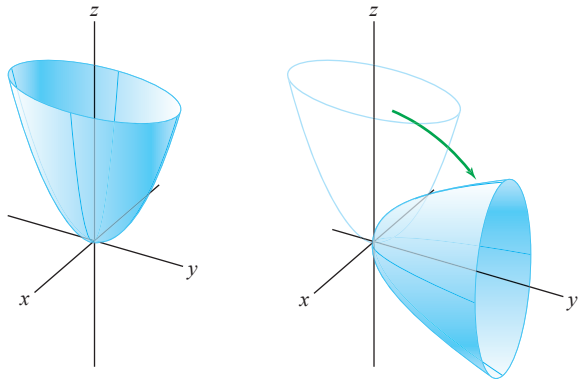


FIGURA 13

24. Describa la intersección del plano horizontal $z = h$ y el hiperboloide $-x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 1$. ¿Para qué valores de h esta intersección es vacía?

En los problemas 25-30, dibuje la superf cie.

25. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

26. $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{8}\right)^2 + \left(\frac{z}{12}\right)^2 = 1$

27. $z = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{8}\right)^2$

28. $z = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{8}\right)^2$

29. $z^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{8}\right)^2$

30. $z = -x^2$

31. Halle la ecuación del elipsoide que pasa por los puntos indicados en la f gura 14(A).

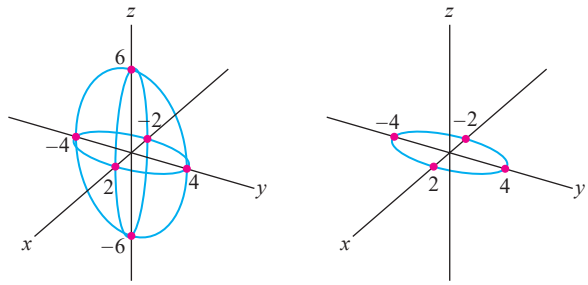


FIGURA 14

32. Halle la ecuación del cilindro elíptico que pasa por los puntos indicados en la f gura 14(B).

33. Halle la ecuación del hiperboloide que se muestra en la f gura 15(A).

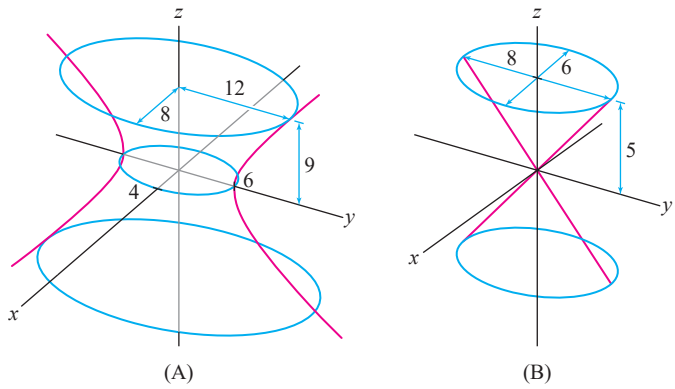


FIGURA 15

34. Halle la ecuación de la cuádrica que se muestra en la f gura 15(B).

35. Determine las trazas verticales de un cilindro elíptico y de un cilindro parabólico en forma estándar.

36. ¿Cuál es la ecuación de un hiperboloide de una o de dos hojas en forma estándar si toda traza horizontal es una circunferencia?

37. Sea $\mathcal{C}$ una elipse en un plano horizontal por encima del plano xy. ¿Qué tipo de cuádrica se forma a partir de todas las rectas que pasan por el origen y por un punto de $\mathcal{C}$?

38. En la sección 11.5 se def nió la excentricidad de una cónica. Pruebe que las trazas horizontales de un elipsoide

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

son elipses de la misma excentricidad (excepto las trazas a altura $h = \pm c$, que se reducen a un único punto). Halle la excentricidad.

Problemas avanzados

39. Sean $\mathcal{S}$ un hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ y $P = (\alpha, \beta, 0)$ un punto de $\mathcal{S}$ en el plano-(x, y). Pruebe que hay exactamente dos rectas que pasan por P y que están enteramente contenidas en $\mathcal{S}$ (f gura 16). *Indicación:* considere la recta $\mathbf{r}(t) = \langle \alpha + at, \beta + bt, t \rangle$ que pasa por P. Pruebe que $\mathbf{r}(t)$ está contenida en $\mathcal{S}$ si (a, b) es uno de los dos puntos en la circunferencia unidad que se obtiene rotando (α, β) en $\pm\frac{\pi}{2}$. Así se demuestra que un hiperboloide de una hoja es una **superf cie doblemente reglada**, lo que signif ca que se puede generar moviendo una recta en el espacio de dos maneras diferentes.

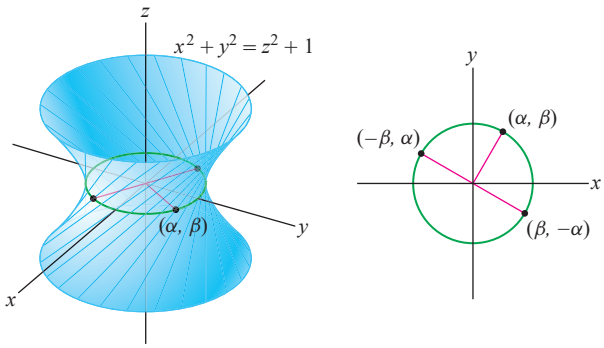


FIGURA 16

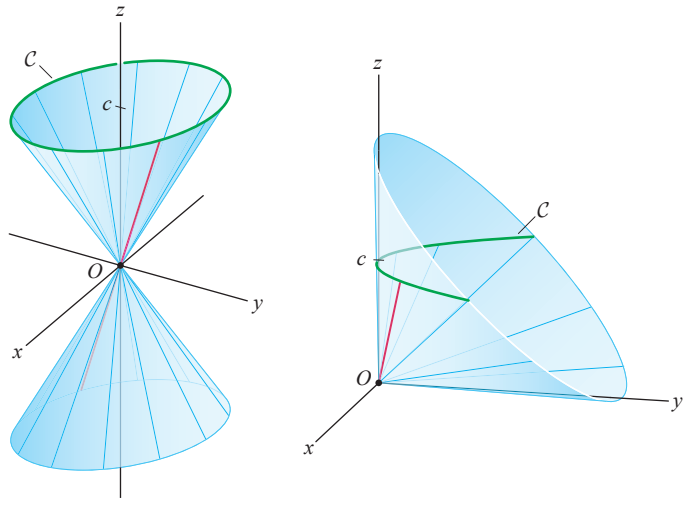
En los problemas 40 y 41, sea $\mathcal{C}$ una curva en $\mathbb{R}^3$ que no pasa por el origen. El cono sobre $\mathcal{C}$ es la superf cie formada por todas las rectas que pasan por el origen y por un punto de $\mathcal{C}$ [f gura 17(A)].

40. Pruebe que el cono elíptico $\left(\frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ es, en realidad, un cono sobre la elipse $\mathcal{C}$ formada por todos los puntos (x, y, c) tales que $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

41. Sean a y c constantes no nulas y sea $\mathcal{C}$ la parábola a la altura c formada por todos los puntos (x, ax^2, c) [f gura 17(B)]. Sea $\mathcal{S}$ el cono formado por todas las rectas que pasan por el origen y por un punto de $\mathcal{C}$. En este problema se prueba que $\mathcal{S}$ también es un cono elíptico.

(a) Pruebe que la ecuación de $\mathcal{S}$ es $yz = acx^2$.

(b) Pruebe que, si se realiza el cambio de variables $y = u + v$ y $z = u - v$, esta ecuación resulta ser $acx^2 = u^2 - v^2$ o $u^2 = acx^2 + v^2$ (la ecuación de un cono elíptico en las variables x, v, u).



(A) Cono sobre una elipse $\mathcal{C}$

(B) Cono sobre una parábola $\mathcal{C}$ (se muestra la mitad del cono)

FIGURA 17

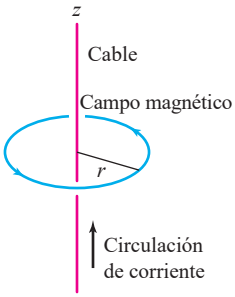


FIGURA 1 El campo magnético generado por la corriente que circula por un cable largo y estrecho se puede expresar de forma cómoda en coordenadas cilíndricas.

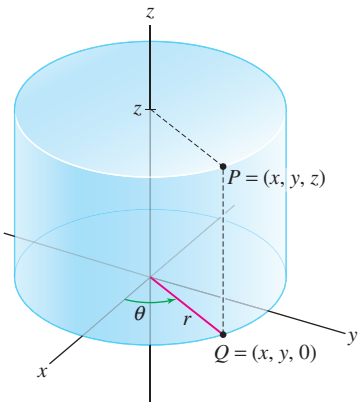


FIGURA 2 Las coordenadas cilíndricas de P son (r, θ, z).

13.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas

En esta sección se introducen dos generalizaciones de las coordenadas polares para $\mathbb{R}^3$: las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas. Estos sistemas de coordenadas se utilizan habitualmente en problemas que presentan simetría respecto a un eje o simetría rotacional. Por ejemplo, el campo magnético generado por la corriente que circula por un cable largo y estrecho se puede expresar de forma cómoda en coordenadas cilíndricas (f gura 1). También se verán las ventajas de las coordenadas cilíndricas y esféricas cuando se estudie el cambio de variables para integrales múltiples.

Coordenadas cilíndricas

En coordenads cilíndricas, se reemplazan las coordenadas x e y de un punto $P = (x, y, z)$ por coordenadas polares. Así, las **coordenadas cilíndricas** de P son (r, θ, z), donde (r, θ) son coordenadas polares de la proyección $Q = (x, y, 0)$ de P sobre el plano xy (f gura 2). Observe que los puntos a una distancia f ja r del eje z forman un cilindro, de aquí el nombre de coordenadas cilíndricas.

Se puede pasar de coordenadas rectangulares a cilíndricas usando las fórmulas rectangular-polar de la sección 12.3. En coordenadas cilíndricas, se suele suponer que $r \geq 0$.

Cilíndricas a rectangulares	Rectangulares a cilíndricas
$x = r \cos \theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \operatorname{sen} \theta$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$
$z = z$	$z = z$

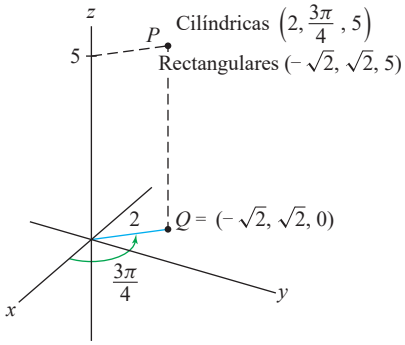


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Conversión de coordenadas cilíndricas a rectangulares Halle las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenadas cilíndricas son $(r, \theta, z) = (2, \frac{3\pi}{4}, 5)$.

Solución La conversión a coordenadas rectangulares es inmediata (f gura 3):

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

La coordenada z no cambia y, por tanto, $(x, y, z) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5)$. ■

EJEMPLO 2 Conversión de coordenadas rectangulares a cilíndricas Halle las coordenadas cilíndricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son $(x, y, z) = (-3\sqrt{3}, -3, 5)$.

Solución Se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = 6$. El ángulo θ cumple:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad \frac{7\pi}{6}$$

La elección correcta es $\theta = \frac{7\pi}{6}$ pues la proyección $Q = (-3\sqrt{3}, -3, 0)$ se encuentra en el tercer cuadrante (f gura 4). Las coordenadas cilíndricas son $(r, \theta, z) = (6, \frac{7\pi}{6}, 5)$. ■

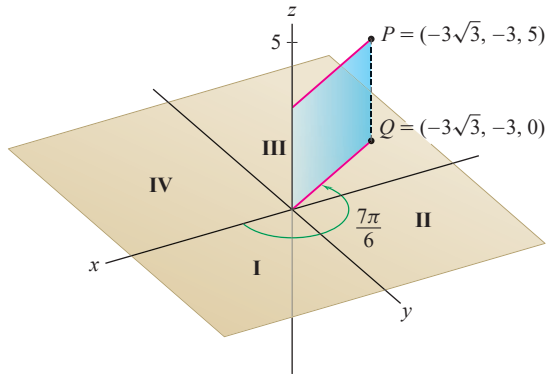


FIGURA 4 La proyección Q se encuentra en el tercer cuadrante. Por tanto, $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

Las **superf cies de nivel** de un sistema de coordenadas son las superf cies que se obtienen considerando una de las coordenadas igual a una constante. En coordenadas rectangulares, las superf cies de nivel son los planos $x = x_0$, $y = y_0$ y $z = z_0$. En coordenadas cilíndricas, las superf cies de nivel son de tres tipos (f gura 5). La superf cie $r = R$ es el cilindro de radio R formado por todos los puntos situados a una distancia R del eje z. La ecuación $\theta = \theta_0$ def ne el semiplano de todos los puntos cuya proyección se encuentra en la semirecta $\theta = \theta_0$ del plano-(x, y). Por último, $z = c$ es el plano horizontal a altura c.

Superficies de nivel en coordenadas cilíndricas

$r = R$	*Cilindro de radio R con el eje z como eje de simetría.*
$\theta = \theta_0$	*Semiplano que pasa por el eje z y que forma un ángulo θ_0 con el plano xz.*
$z = c$	*Plano horizontal a altura c.*

EJEMPLO 3 Ecuaciones en coordenadas cilíndricas Halle una ecuación de la forma $z = f(r, \theta)$ para las superf cies:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ **(b)** $x + y + z = 1$

Solución Se utilizarán las fórmulas:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

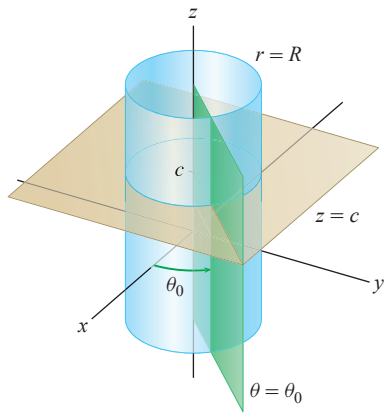


FIGURA 5 Superf cies de nivel en coordenadas cilíndricas.

(a) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ resulta ser $r^2 + z^2 = 9$, o $z = \pm\sqrt{9 - r^2}$. Se trata de una esfera de radio 3.

(b) El plano $x + y + z = 1$ queda:

$$z = 1 - x - y = 1 - r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{o} \qquad z = 1 - r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$$ ■

Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas utilizan el hecho que un punto P sobre una esfera de radio ρ queda determinado por dos coordenadas angulares θ y ϕ (f gura 6):

- θ es el ángulo polar de la proyección Q de P sobre el plano xy.
- ϕ es el **ángulo de declinación**, que mide cuánto se inclina la semirrecta que pasa por P disminuye respecto a la vertical.

Así P queda determinado por la terna (ρ, θ, ϕ), que se denominan **coordenadas esféricas**.

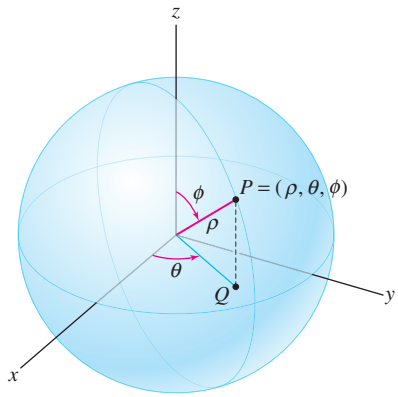


FIGURA 6 Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ).

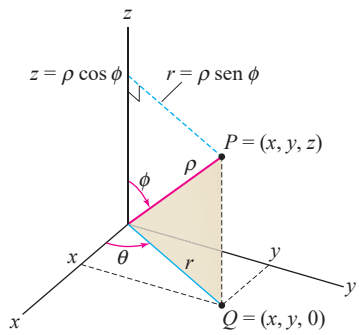


FIGURA 7

- *El símbolo ϕ (que se pronuncia "fi") es la vigésimo primera letra del alfabeto griego.*
- *Se utiliza ρ para la coordenada radial, aunque r también se utiliza para denotar distancia al origen en otros contextos.*

Suponga que $P = (x, y, z)$ en coordenadas rectangulares. Como ρ es la distancia de P al origen,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por otra parte, en la f gura 7 se puede ver que:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cos\phi = \frac{z}{\rho}$$

Coordenadas esféricas

ρ = *distancia al origen*

θ = *ángulo polar en el plano xy*

ϕ = *ángulo de disminución respecto a la vertical*

En alguno textos, se menciona a θ *como el* ángulo acimut *y a* ϕ *como el* ángulo polar.

La coordenada radial r de $Q = (x, y, 0)$ es $r = \rho \operatorname{sen} \phi$ y, por tanto:

$$x = r\cos\theta = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \qquad z = \rho\cos\phi$$

Esféricas a rectangulares	Rectangulares a esféricas
$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
$z = \rho\cos\phi$	$\cos\phi = \dfrac{z}{\rho}$

EJEMPLO 4 De coordenadas esféricas a rectangulares Halle las coordenadas rectangulares de $P = (\rho, \theta, \phi) = (3, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ y halle la coordenada radial r de la proyección de Q sobre el plano xy.

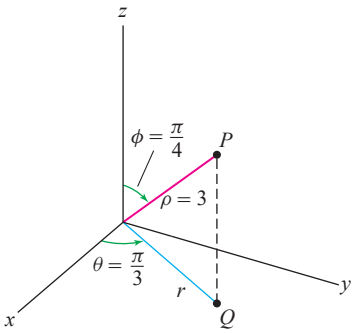


FIGURA 8 Punto de coordenadas esféricas $(3, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$.

Solución Según las fórmulas anteriores,

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi = 3\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 3\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$$

$$z = \rho\cos\phi = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ahora, considere la proyección $Q = (x, y, 0) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{6}}{4}, 0\right)$ (f gura 8). La coordenada radial r de Q cumple:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

Por tanto, $r = 3/\sqrt{2}$. ■

EJEMPLO 5 De coordenadas rectangulares a esféricas Halle las coordenadas esféricas del punto $P = (x, y, z) = (2, -2\sqrt{3}, 3)$.

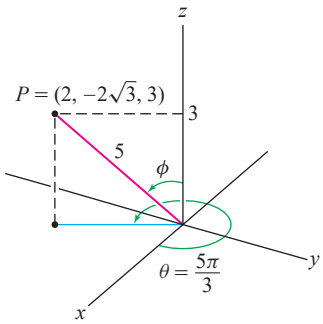


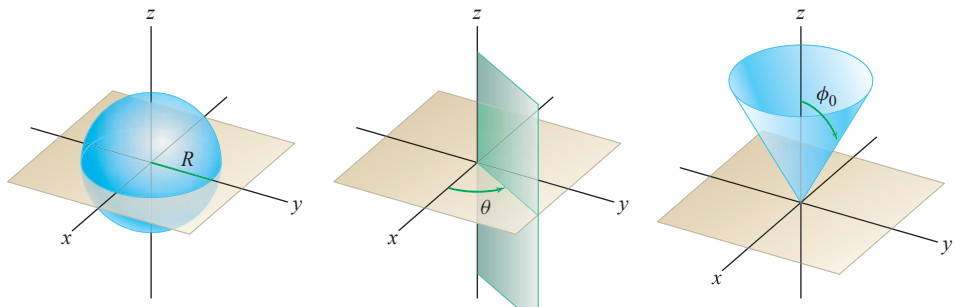
FIGURA 9 Punto de coordenadas rectangulares $(2, -2\sqrt{3}, 3)$.

Solución La coordenada radial es $\rho = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. La coordenada angular θ cumple:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ o } \frac{5\pi}{3}$$

Como el punto $(x, y) = (2, -2\sqrt{3})$ está en el cuarto cuadrante, la elección correcta es $\theta = \frac{5\pi}{3}$ (f gura 9). Por último, $\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{3}{5}$ con lo que $\phi = \cos^{-1}\frac{3}{5} \approx 0{,}93$. De esta manera, las coordenadas esféricas de P son $(5, \frac{5\pi}{3}, 0{,}93)$. ■

La f gura 10 muestra los tres tipos de superf cies de nivel en coordenadas esféricas. Observe que si $\phi \neq 0$, $\frac{\pi}{2}$ o π, entonces la superf cie de nivel $\phi = \phi_0$ es el cono circular formado por los puntos P tales que $\overline{OP}$ forma un ángulo ϕ_0 con el eje z. Hay tres casos excepcionales: $\phi = \frac{\pi}{2}$ def ne el plano xy, $\phi = 0$ es el eje de las z positivas y $\phi = \pi$ es el eje de las z negativas.



$\rho = R$
Esfera de radio R

$\theta = \theta_0$
Semiplano vertical

$\phi = \phi_0$
Cono circular

FIGURA 10

EJEMPLO 6 Hallar un ecuación en coordenadas esféricas Halle una ecuación de la forma $\rho = f(\theta, \phi)$ para las siguientes superf cies:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ **(b)** $z = x^2 - y^2$

Solución

(a) La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ def ne la esfera de radio 3 centrada en el origen. Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, la ecuación en coordenadas esféricas es $\rho = 3$.

(b) Para convertir $z = x^2 - y^2$ a coordenadas esféricas, se sustituyen las fórmulas para x, y y z en términos de ρ, θ y ϕ:

$$\overbrace{\rho\cos\phi}^{z} = \overbrace{(\rho\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi)^2}^{x^2} - \overbrace{(\rho\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\phi)^2}^{y^2}$$

$$\cos\phi = \rho\operatorname{sen}^2\phi(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \qquad \text{(divida por } \rho \text{ saque factor común)}$$

$$\cos\phi = \rho\operatorname{sen}^2\phi\cos 2\theta \qquad \text{(pues } \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta\text{)}$$

Aislando ρ, se obtiene $\rho = \dfrac{\cos\phi}{\operatorname{sen}^2\phi\cos 2\theta}$. ■

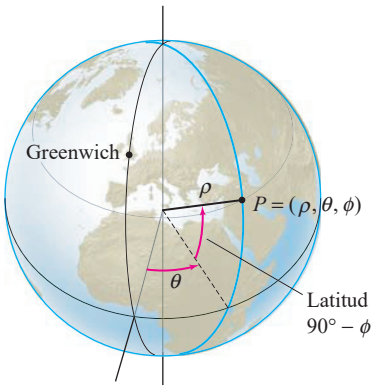


FIGURA 11 La longitud y la latitud dan lugar a coordenadas esféricas sobre la superf cie de la Tierra.

Las coordenadas angulares (θ, ϕ) sobre una esfera de radio f jo están fuertemente relacionadas con el sistema de longitud-latitud que se utiliza para identif car puntos sobre la superf cie de la Tierra (f gura 11). Por convenio, en este sistema se utilizan grados y no radianes.

- Una **longitud** es una semicircunferencia que va desde el Polo Norte al Polo Sur (f gura 12). Los ejes se han escogido de manera que $\theta = 0$ pasa por Greenwich, Inglaterra (esta longitud se denomina *meridiano cero*). Se designa la longitud mediante un ángulo entre 0 y 180° junto con la etiqueta E o W, según si el punto se encuentra, respectivamente, al este o al oeste del meridiano cero.
- El conjunto de los puntos sobre la esfera que cumplen $\phi = \phi_0$ forman una circunferencia horizontal denominada **latitud**. Las latitudes se miden desde el ecuador terrestre y se usa la etiqueta N o S para especif car el hemisferio norte o el sur. Así, en el hemisferio superior, $0 \le \phi_0 \le 90°$, una coordenada esférica ϕ_0 corresponde a la latitud $(90° - \phi_0)$ N. En el hemisferio inferior, $90° \le \phi_0 \le 180°$, ϕ_0 corresponde a la latitud $(\phi_0 - 90°)$ S.

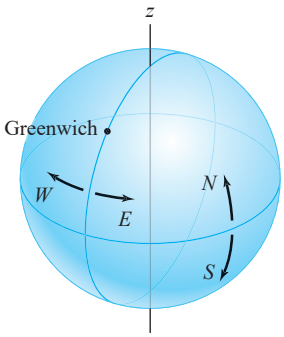


FIGURA 12 La latitud se mide desde el ecuador terrestre y se etiqueta como N (norte) en el hemisferio superior y S (sur) en el hemisferio inferior.

EJEMPLO 7 Coordenadas esféricas vía longitud y latitud Halle los ángulos (θ, ϕ) para Nairobi (1,17° S, 36,48° E) y Ottawa (45,27° N, 75,42° W).

Solución Para Nairobi, $\theta = 36{,}48°$ ya que la longitud se encuentra al este de Greenwich. La latitud de Nairobi está al sur del ecuador terrestre, por lo que $1{,}17 = \phi_0 - 90$ y $\phi_0 = 91{,}17°$.

Para Ottawa, se tiene que $\theta = 360 - 75{,}42 = 284{,}58°$ pues 75,42° W se refiere a 75,42 grados en la dirección de las θ negativas. Como la latitud de Ottawa está al norte del ecuador terrestre, $45{,}27 = 90 - \phi_0$ y $\phi_0 = 44{,}73°$. ■

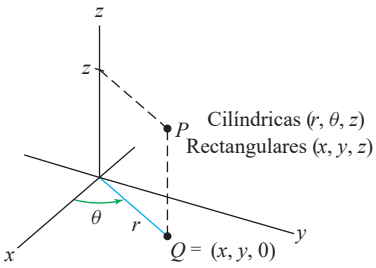


FIGURA 13 Coordenadas cilíndricas (r, θ, z).

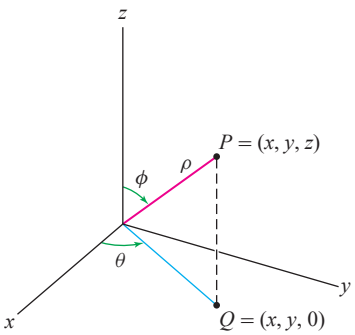


FIGURA 14 Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ).

13.7 RESUMEN

- Conversión de coordenadas rectangulares a cilíndricas (figura 13) y a esféricas (figura 14):

Cilíndricas	Esféricas
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
$z = z$	$\cos\phi = \dfrac{z}{\rho}$

Se escogen los ángulos de manera que:

$$0 \le \theta < 2\pi \quad \text{(cilíndricas o esféricas)} \qquad 0 \le \phi \le \pi \quad \text{(esféricas)}$$

- Conversión a coordenadas rectangulares:

Cilíndricas (r, θ, z)	Esféricas (ρ, θ, ϕ)
$x = r\cos\theta$	$x = \rho\cos\theta\,\operatorname{sen}\phi$
$y = r\operatorname{sen}\theta$	$y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$

- Superficies de nivel:

Cilíndricas		Esféricas	
$r = R$:	Cilindro de radio R	$\rho = R$:	Esfera de radio R
$\theta = \theta_0$:	Semiplano vertical	$\theta = \theta_0$:	Semiplano vertical
$z = c$:	Plano horizontal	$\phi = \phi_0$:	Cono circular

13.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Describa las superficies $r = R$ en coordenadas cilíndricas y $\rho = R$ en coordenadas esféricas.

2. ¿Qué afirmación sobre las coordenadas cilíndricas es correcta?

(a) Si $\theta = 0$, entonces P está en el eje z.

(b) Si $\theta = 0$, entonces P está en el plano xz.

3. ¿Qué afirmación sobre las coordenadas esféricas es correcto?

(a) Si $\phi = 0$, entonces P está en el eje z.

(b) Si $\phi = 0$, entonces P está en el plano xy.

4. La superficie de nivel $\phi = \phi_0$ en coordenadas esféricas, que suele ser un cono, se reduce a una semirrecta para dos valores de ϕ_0. ¿Qué dos valores son?

5. ¿Para qué valor de ϕ_0 es $\phi = \phi_0$ un plano? ¿De qué plano se trata?

Problemas

En los problemas 1-4, convierta de coordenadas cilíndricas a rectangulares.

1. $(4, \pi, 4)$

2. $\left(2, \frac{\pi}{3}, -8\right)$

3. $\left(0, \frac{\pi}{5}, \frac{1}{2}\right)$

4. $\left(1, \frac{\pi}{2}, -2\right)$

En los problemas 5-10, convierta de coordenadas rectangulares a cilíndricas.

5. $(1, -1, 1)$

6. $(2, 2, 1)$

7. $(1, \sqrt{3}, 7)$

8. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 9\right)$

9. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, 2\right)$

10. $(3, 3\sqrt{3}, 2)$

En los problemas 11-16, describa el conjunto utilizando coordenadas cilíndricas.

11. $x^2 + y^2 \le 1$

12. $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

13. $y^2 + z^2 \le 4, \quad x = 0$

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$

15. $x^2 + y^2 \le 9, \quad x \ge y$

16. $y^2 + z^2 \le 9, \quad x \ge y$

En los problemas 17-24, dibuje el conjunto (descrito en coordenadas cilíndricas).

17. $r = 4$

18. $\theta = \frac{\pi}{3}$

19. $z = -2$

20. $r = 2, \quad z = 3$

21. $1 \le r \le 3, \quad 0 \le z \le 4$

22. $1 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le z \le 4$

23. $z^2 + r^2 \le 4$

24. $r \le 3, \quad \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}, \quad z = 4$

En los problemas 25-30, halle una ecuación de la forma $r = f(\theta, z)$ en coordenadas cilíndricas para las siguientes superf cies.

25. $z = x + y$

26. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

27. $\frac{x^2}{yz} = 1$

28. $x^2 - y^2 = 4$

29. $x^2 + y^2 = 4$

30. $z = 3xy$

En los problemas 31-36, convierta de coordenadas esféricas a rectangulares.

31. $\left(3, 0, \frac{\pi}{2}\right)$

32. $\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

33. $(3, \pi, 0)$

34. $\left(5, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

35. $\left(6, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$

36. $(0{,}5, 3{,}7, 2)$

En los problemas 37-42, convierta de coordenadas rectangulares a esféricas.

37. $(\sqrt{3}, 0, 1)$

38. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$

39. $(1, 1, 1)$

40. $(1, -1, 1)$

41. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$

42. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$

En los problemas 43 y 44, convierta de coordenadas cilíndricas a esféricas.

43. $(2, 0, 2)$

44. $(3, \pi, \sqrt{3})$

En los problemas 45 y 46, convierta de coordenadas esféricas a cilíndricas.

45. $(4, 0, \frac{\pi}{4})$

46. $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

En los problemas 47-52, describa el conjunto utilizando coordenadas esféricas.

47. $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

48. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \ge 0$

49. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$

50. $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad x = y, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

51. $y^2 + z^2 \le 4, \quad x = 0$

52. $x^2 + y^2 = 3z^2$

En los problemas 53-60, dibuje el conjunto de puntos (descrito en coordenadas esféricas).

53. $\rho = 4$

54. $\phi = \frac{\pi}{4}$

55. $\rho = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

56. $\rho = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$

57. $\rho = 2, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

58. $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = \frac{\pi}{4}, \quad \rho \ge 1$

59. $\rho \le 2, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \le \phi \le \pi$

60. $\rho = 1, \quad \frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{2\pi}{3}$

En los problemas 61-66, halle una ecuación de la forma $\rho = f(\theta, \phi)$ en coordenadas esféricas para las siguientes superf cies.

61. $z = 2$

62. $z^2 = 3(x^2 + y^2)$

63. $x = z^2$

64. $z = x^2 + y^2$

65. $x^2 - y^2 = 4$

66. $xy = z$

67. ¿Cuál de las ecuaciones (a)-(c) es la de un cilindro de radio R en coordenadas esféricas? Haga referencia a la f gura 15.

(a) $R\rho = \operatorname{sen} \phi$ **(b)** $\rho \operatorname{sen} \phi = R$ **(c)** $\rho = R \operatorname{sen} \phi$

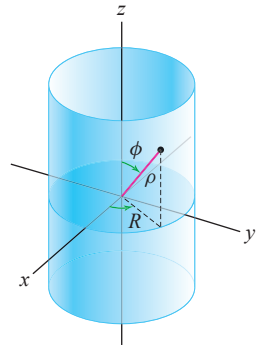


FIGURA 15

68. Sean $P_1 = (1, -\sqrt{3}, 5)$ y $P_2 = (-1, \sqrt{3}, 5)$ en coordenadas rectangulares. ¿En qué cuadrantes se encuentran las proyecciones de P_1 y de P_2 sobre el plano xy? Halle el ángulo polar θ de cada punto.

69. Halle los ángulos esféricos (θ, ϕ) para Helsinki, Finlandia (60,1° N, 25,0° E) y Sao Paulo, Brasil (23,52° S, 46,52° W).

70. Halle la longitud y la latitud de los puntos en el globo terrestre de coordenadas angulares $(\theta, \phi) = (\pi/8, 7\pi/12)$ y $(4, 2)$.

71. Considere un sistema de coordenadas rectangulares con origen en el centro de la Tierra, eje z que pasa por el Polo Norte y eje x que pasa por el meridiano cero. Halle las coordenadas rectangulares de Sydney, Australia (34° S, 151° E) y Bogotá, Colombia (4° 32′ N, 74° 15′ W). Un minuto es 1/60°. Suponga que la Tierra es una esfera de radio $R = 6370$ km.

72. Halle la ecuación en coordenadas rectangulares de la cuádrica formada por los dos conos $\phi = \frac{\pi}{4}$ y $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

73. Halle una ecuación de la forma $z = f(r, \theta)$ en coordenadas cilíndricas para $z^2 = x^2 - y^2$.

74. Pruebe que $\rho = 2\cos\phi$ es la ecuación de una esfera con su centro sobre el eje z. Halle su radio y centro.

75. Explique la siguiente afirmación: si la ecuación de una superficie en coordenadas cilíndricas o esféricas no involucra la coordenada θ, entonces la superficie es rotacionalmente simétrica respecto al eje z.

76. SAC Represente gráficamente la superficie $\rho = 1 - \cos\phi$. Después represente la traza de S en el plano xz y explique por qué S se obtiene por rotación de esta traza.

77. Halle ecuaciones de la forma $r = g(\theta, z)$ (cilíndricas) y $\rho = f(\theta, \phi)$ (esféricas) para el hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ (figura 16). ¿Existen puntos en el hiperboloide para los que $\phi = 0$ o π? ¿Qué valores de ϕ son los que dan lugar a puntos en el hiperboloide?

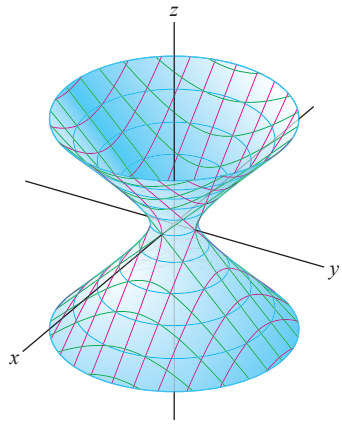


FIGURA 16 El hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

Problemas avanzados

En los problemas 78-82, un ***gran círculo*** *sobre una esfera S de centro O es una circunferencia que se obtiene intersecando S con un plano que pase por O (figura 17). Si P y Q no son antipodales (en lados opuestos), existe un único gran círculo por P y Q sobre S (interseque S con el plano por O, P y Q). La distancia geodésica de P a Q se define como la longitud del menor de los dos arcos circulares de este gran círculo.*

78. Pruebe que la distancia geodésica de P a Q es igual a $R\psi$, donde ψ es el *ángulo central* entre P y Q (el ángulo entre los vectores $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$).

79. Pruebe que la distancia geodésica de $Q = (a, b, c)$ al Polo Norte $P = (0, 0, R)$ es igual a $R\cos^{-1}\left(\frac{c}{R}\right)$.

80. Las coordenadas de Los Ángeles son 34° N y 118° W. Halle la distancia geodésica del Polo Norte a Los Angeles, suponiendo que la Tierra es una esfera de radio $R = 6370$ km.

81. Pruebe que el ángulo central ψ entre dos puntos P y Q sobre una esfera (de cualquier radio) de coordenadas angulares (θ, ϕ) y (θ', ϕ') es igual a:

$$\psi = \cos^{-1}(\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\phi' \cos(\theta - \theta') + \cos\phi\cos\phi')$$

Indicación: calcule el producto escalar de $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$. Compruebe esta fórmula calculando la distancia geodésica entre el Polo Norte y el Polo Sur.

82. Use el problema 81 para hallar la distancia geodésica entre Los Angeles (34° N, 118° W) y Bombay (19° N, 72,8° E).

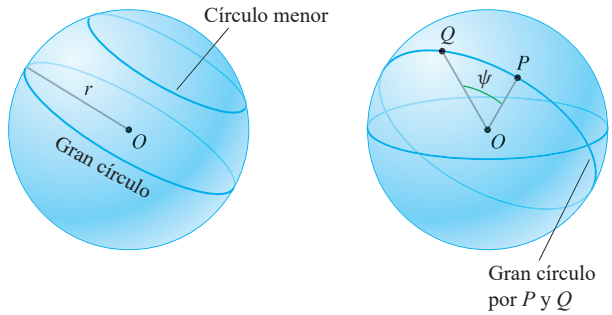


FIGURA 17

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

En los problemas 1-6, sean $\mathbf{v} = \langle -2, 5\rangle$ *y* $\mathbf{w} = \langle 3, -2\rangle$.

1. Calcule $5\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$ y $5\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$.

2. Dibuje $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$.

3. Halle un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

4. Halle la longitud de $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

5. Exprese $\mathbf{i}$ como una combinación lineal $r\mathbf{v} + s\mathbf{w}$.

6. Halle un escalar α tal que $\|\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}\| = 6$.

7. Si $P = (1, 4)$ y $Q = (-3, 5)$, ¿cuáles son las componentes de $\overrightarrow{PQ}$? ¿Cuál es la longitud de $\overrightarrow{PQ}$?

8. Sean $A = (2, -1)$, $B = (1, 4)$ y $P = (2, 3)$. Halle el punto Q tal que $\overrightarrow{PQ}$ es equivalente a $\overrightarrow{AB}$. Dibuje $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{AB}$.

9. Halle el vector de norma 3 que forma un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ con el eje de las x positivas.

10. Calcule $3(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - 6(\mathbf{i} + 6\mathbf{j})$.

11. Halle el valor de β para el que $\mathbf{w} = \langle -2, \beta \rangle$ es paralelo a $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$.

12. Sea $P = (1, 4, -3)$.

(a) Halle el punto Q tal que $\overrightarrow{PQ}$ es equivalente a $\langle 3, -1, 5 \rangle$.

(b) Halle un vector unitario $\mathbf{e}$ equivalente a $\overrightarrow{PQ}$.

13. Sea $\mathbf{w} = \langle 2, -2, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 5, -4 \rangle$. Halle $\mathbf{u}$ si $\mathbf{v} + 5\mathbf{u} = 3\mathbf{w} - \mathbf{u}$.

14. Sea $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Halle la longitud de $\mathbf{v}$ y el vector $2\mathbf{v} + 3(4\mathbf{i} - \mathbf{k})$.

15. Halle una parametrización $\mathbf{r}_1(t)$ de la recta que pasa por $(1, 4, 5)$ y $(-2, 3, -1)$. A continuación, halle una parametrización $\mathbf{r}_2(t)$ dela recta paralela a $\mathbf{r}_1$ que pasa por $(1, 0, 0)$.

16. Sean $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1 + t\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{v}_2 + t\mathbf{w}_2$ parametrizaciones de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ respectivamente. Para cada af rmación (a)-(e) proporcione una demostración, si la af rmación es cierta y un contraejemplo, si es falsa.

(a) Si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, entonces $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$.

(b) Si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ y $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, entonces $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$.

(c) Si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$, entonces $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

(d) Si $\mathcal{L}_1$ es paralela a $\mathcal{L}_2$, entonces $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$.

(e) Si $\mathcal{L}_1$ es paralela a $\mathcal{L}_2$, entonces $\mathbf{w}_1 = \lambda\mathbf{w}_2$ para algún escalar λ.

17. Halle a y b tales que las rectas $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle + t\langle 1, -1, 1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle 3, -1, 1 \rangle + t\langle a, b, -2 \rangle$ sean paralelas.

18. Halle a tal que las rectas $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle + t\langle 1, -1, 1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle 3, -1, 1 \rangle + t\langle a, 4, -2 \rangle$ intersequen.

19. Dibuje el vector suma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ para los vectores de la f gura 1(A).

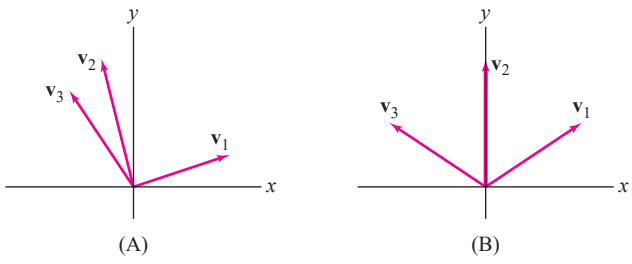


FIGURA 1

20. Dibuje las sumas $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ para los vectores de la f gura 1(B).

En los problemas 21-26, sean $\mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$ *y* $\mathbf{w} = \langle 2, -1, 4 \rangle$.

21. Calcule $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

22. Calcule el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

23. Calcule $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

24. Halle el área del paralelogramo generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

25. Halle el volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 6 \rangle$.

26. Halle todos los vectores ortogonales tanto a $\mathbf{v}$ como a $\mathbf{w}$.

27. Use vectores para demostrar que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.

28. Sean $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 3 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 4, -2, 1 \rangle$.

(a) Halle la descomposición $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$ respecto a $\mathbf{w}$.

(b) Halle la descomposición $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\parallel} + \mathbf{w}_{\perp}$ respecto a $\mathbf{v}$.

29. Calcule la componente de $\mathbf{v} = \langle -2, \frac{1}{2}, 3 \rangle$ a lo largo de $\mathbf{w} = \langle 1, 2, 2 \rangle$.

30. Calcule la norma de las fuerzas sobre las dos cuerdas de la f gura 2.

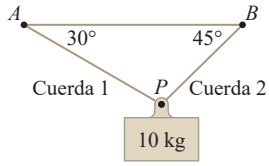


FIGURA 2

31. Una vagoneta de 50 kg se empuja hacia la derecha con una fuerza $\mathbf{F}_1$ formando un ángulo de 30° con el suelo. Al mismo tiempo se empuja la vagoneta hacia la izquierda con una fuerza horizontal $\mathbf{F}_2$.

(a) Halle la norma de $\mathbf{F}_1$ en términos de la de $\mathbf{F}_2$, si la vagoneta no se mueve.

(b) ¿Cuál es el valor máximo para la norma de $\mathbf{F}_1$ que se puede aplicar sobre la vagoneta sin que ésta caiga?

32. Sean $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$ vectores en $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál de los siguientes es un escalar?

(a) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{v})$

En los problemas 33-36, sean $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 4 \rangle$, $\mathbf{u} = \langle 6, -1, 2 \rangle$ *y* $\mathbf{w} = \langle 1, 0, -3 \rangle$. *Calcule lo que se indica.*

33. $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

34. $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$

35. $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

37. Use el producto escalar para hallar el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 3, -1)$, $(2, -1, 3)$ y $(4, 1, 1)$.

38. Calcule $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ si $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3$ y el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\frac{\pi}{6}$.

39. Pruebe que si los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ son ortogonales, entonces $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$.

40. Halle el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ si $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$.

41. Halle $\|\mathbf{e}-4\mathbf{f}\|$, suponiendo que $\mathbf{e}$ y $\mathbf{f}$ son vectores unitarios tales que $\|\mathbf{e}+\mathbf{f}\| = \sqrt{3}$.

42. Halle el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tales que $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 2$ y $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 1$.

43. Pruebe que la ecuación $\langle 1,2,3\rangle \times \mathbf{v} = \langle -1,2,a\rangle$ no tiene solución si $a \neq -1$.

44. Demuestre, con un gráfico, lo siguiente: si $\mathbf{e}$ es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{e}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{e}) = (\mathbf{e}\times\mathbf{v})\times\mathbf{e} = \mathbf{v}$.

45. Use la identidad:

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{w}$$

para demostrar que:

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) + \mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

46. Halle una ecuación del plano que pasa por $(1,-3,5)$ de vector normal $\mathbf{n} = \langle 2,1,-4\rangle$.

47. Obtenga la ecuación del plano $\mathcal{P}$ de ecuación vectorial:

$$\langle 1,4,-3\rangle \cdot \langle x,y,z\rangle = 7$$

en la forma:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Indicación: debe encontrar un punto $P = (x_0,y_0,z_0)$ sobre $\mathcal{P}$.

48. Halle todos los planos paralelos al plano que pasa por los puntos $(1,2,3)$, $(1,2,7)$ y $(1,1,-3)$.

49. Halle el plano que pasa por $P = (4,-1,9)$ y contiene la recta $\mathbf{r}(t) = \langle 1,4,-3\rangle + t\langle 2,1,1\rangle$.

50. Halle la intersección de la recta $\mathbf{r}(t) = \langle 3t+2,1,-7t\rangle$ y el plano $2x-3y+z = 5$.

51. Halle la traza del plano $3x-2y+5z = 4$ en el plano xy.

52. Halle la intersección de los planos $x+y+z = 1$ y $3x-2y+z = 5$.

En los problemas 53-58, determine el tipo de cuádrica.

53. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2z^2 = 1$

54. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 + 2z^2 = 1$

55. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2z = 0$

56. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2z = 0$

57. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2z^2 = 0$

58. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 - 2z^2 = 1$

59. Determine el tipo de cuádrica $ax^2 + by^2 - z^2 = 1$ si:

(a) $a<0, \quad b<0$

(b) $a>0, \quad b>0$

(c) $a>0, \quad b<0$

60. Describa las trazas de la superficie:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - y^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$$

en los tres planos de coordenadas.

61. Convierta $(x,y,z) = (3,4,-1)$ de coordenadas rectangulares a cilíndricas y a esféricas.

62. Convierta $(r,\theta,z) = \left(3,\frac{\pi}{6},4\right)$ de coordenadas cilíndricas a esféricas.

63. Convierta el punto $(\rho,\theta,\phi) = \left(3,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ de coordenadas esféricas a coordenadas cilíndricas.

64. Describa el conjunto de todos los puntos $P = (x,y,z)$ que cumplen $x^2+y^2 \leq 4$ tanto en coordenadas cilíndricas como en esféricas.

65. Dibuje la gráfica de la ecuación cilíndrica $z = 2r\cos\theta$ y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

66. Exprese la superficie $x^2+y^2-z^2 = 2(x+y)$ como una ecuación $r = f(\theta,z)$ en coordenadas cilíndricas.

67. Pruebe que la ecuación cilíndrica:

$$r^2(1-2\operatorname{sen}^2\theta) + z^2 = 1$$

es un hiperboloide de una hoja.

68. Dibuje la gráfica de la ecuación esférica $\rho = 2\cos\theta\operatorname{sen}\phi$ y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

69. Describa de qué manera depende la superficie de ecuación

$$\rho^2(1+A\cos^2\phi) = 1$$

de la constante A.

70. Pruebe que la ecuación esférica $\cot\phi = 2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ define un plano que pasa por el origen (con el origen excluido en la superficie final). Halle un vector normal a este plano.

71. Sean c un escalar, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores y $\mathbf{X} = \langle x,y,z\rangle$. Pruebe que la ecuación $(\mathbf{X}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{b}) = c^2$ define una esfera de centro $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ y radio R, siendo $R^2 = c^2 + \left\|\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\right\|^2$.

Los polímeros de ADN forman curvas helicoidales cuya orientación espacial tiene inf uencia en sus propiedades bioquímicas.

14 CÁLCULO PARA FUNCIONES VECTORIALES

En este capítulo se estudian las funciones vectoriales y sus derivadas, y se utilizan para analizar las curvas y el movimiento en el espacio tridimensional. Aunque muchas de las técnicas del cálculo en una variable se pueden aplicar también para los vectores, hay un aspecto nuevo que es importante en términos de derivadas. Una función con valores reales $f(x)$ puede variar sólo de dos maneras: puede crecer o decrecer. Por el contrario, una función vectorial puede cambiar no sólo de magnitud sino también de dirección, y la tasa de variación no es un número sino que ahora es un vector también. Para desarrollar estos nuevos conceptos, empezamos con una introducción a las funciones vectoriales.

14.1 Funciones vectoriales

Considere una partícula que se mueve en $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en el instante t son $(x(t), y(t), z(t))$. Es cómodo representar la trayectoria de la partícula mediante una **función vectorial**:

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad (1)$$

Las funciones $f(x)$ (con valores reales) se suelen llamar con valores escalares *para distinguirlas de las funciones con valores vectoriales.*

Piense en $\mathbf{r}(t)$ como en un vector en movimiento que apunta desde el origen a la posición de la partícula en el instante t (f gura 1).

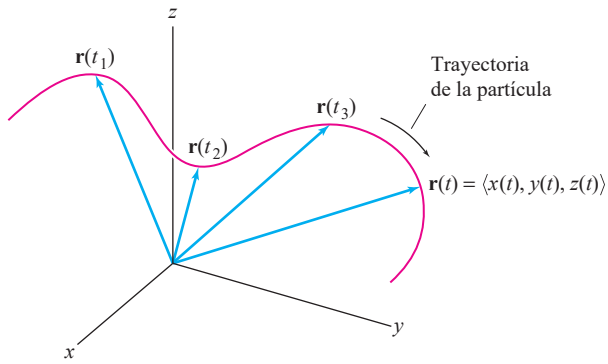


FIGURA 1

El parámetro se suele llamar t (de tiempo), pero se puede escoger cualquier otra variable como s o θ. Es mejor no escribir $\mathbf{r}(x)$ o $\mathbf{r}(y)$ para evitar confusiones con las componentes x e y de $\mathbf{r}$.

En general, una función vectorial es cualquier función $\mathbf{r}(t)$ como en la ec. (1) cuyo dominio $\mathcal{D}$ sea un conjunto de números y cuyo rango sea un conjunto de vectores. La variable t se denomina un **parámetro** y las funciones $x(t), y(t), z(t)$ son las **componentes** o **funciones coordenadas**. Se suele considerar como dominio el conjunto de todos los valores de t para los que $\mathbf{r}(t)$ está def nida, es decir, todos los valores de t que pertenecen a los dominios de las tres funciones coordenadas $x(t), y(t), z(t)$. Por ejemplo:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, 4 - 7t \rangle, \qquad \text{dominio } \mathcal{D} = \mathbb{R}$$
$$\mathbf{r}(s) = \langle \sqrt{s}, e^s, s^{-1} \rangle, \qquad \text{dominio } \mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} : s > 0\}$$

El punto terminal de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ describe una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ cuando t varía. Nos referiremos a $\mathbf{r}(t)$ como a una trayectoria o a una **parametrización vectorial** de una trayectoria. Se supondrá, en este capítulo, que las componentes de $\mathbf{r}(t)$ tienen derivadas continuas.

Ya se han estudiado algunos casos especiales de parametrizaciones vectoriales. En el capítulo 13, se han descrito las rectas en $\mathbb{R}^3$ mediante parametrizaciones vectoriales. Recuerde que:

$$\mathbf{r}(t) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\mathbf{v} = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

parametriza la recta que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$.

En el capítulo 12, se han estudiado las curvas parametrizadas en el plano $\mathbb{R}^2$ que son de la forma

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

Una curva como esta se puede describir también mediante una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$. La diferencia únicamente radica en si se visualiza la trayectoria como la trazada por un "punto en movimiento" $c(t)$ o por un "vector en movimiento" $\mathbf{r}(t)$. En este capítulo se utilizará la forma vectorial porque lleva, de forma más natural, a la definición de la derivada de funciones con valores vectoriales.

Es importante distinguir entre la trayectoria parametrizada por $\mathbf{r}(t)$ y la curva subyacente $\mathcal{C}$ descrita por $\mathbf{r}(t)$. La curva $\mathcal{C}$ es el conjunto de todos los puntos $(x(t), y(t), z(t))$ cuando t toma valores en el dominio de $\mathbf{r}(t)$. La trayectoria es una manera particular de recorrer la curva; puede recorrer la curva en varias ocasiones, cambiar de dirección, moverse adelante y atrás, etc.

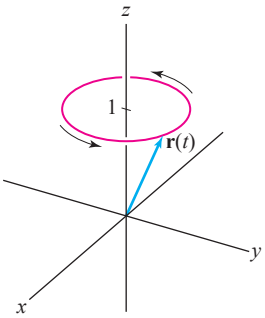


FIGURA 2 Representación gráfica de $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 1 \rangle$.

EJEMPLO 1 La trayectoria respecto a la curva Describa la trayectoria:

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 1 \rangle, \qquad -\infty < t < +\infty$$

¿En qué forma son la trayectoria y la curva $\mathcal{C}$ descrita por $\mathbf{r}(t)$ diferentes?

Solución Cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$, el extremo del vector $\mathbf{r}(t)$ se mueve sobre una circunferencia unidad de altura $z = 1$ infinitamente en el sentido contrario al de las agujas del reloj, cuando se mira desde arriba (figura 3). La curva subyacente $\mathcal{C}$ descrita por $\mathbf{r}(t)$ es la circunferencia unidad que se mencionó anteriormente. ■

Una curva en $\mathbb{R}^3$ también se denomina una **curva en el espacio** (como opuesto a una curva en $\mathbb{R}^2$, que se denomina una **curva en el plano**). Las curvas en el espacio son bastante difíciles de dibujar a mano. La manera más eficaz de visualizar una curva es representarla desde diferentes puntos de vista usando un ordenador (figura 3). Como una ayuda para la visualización, se representa una curva "engrosada" en las figuras 3 y 5, pero recuerde que las curvas en el espacio son unidimensionales y no tienen grosor.

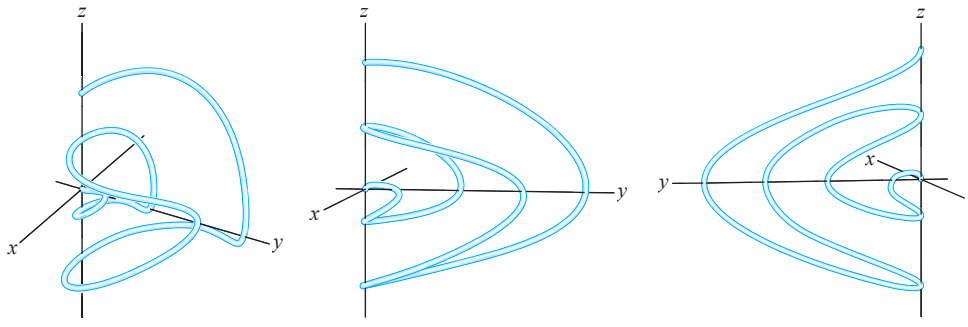


FIGURA 3 La curva $\mathbf{r}(t) = \langle t \operatorname{sen} 2t \cos t, t \operatorname{sen}^2 t, t \cos t \rangle$ para $0 \le t \le 4\pi$, desde tres puntos de vista diferentes.

Las proyecciones sobre los planos de coordenadas son otra ayuda para visualizar curvas en el espacio. La proyección de una trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ sobre el plano

xy es la trayectoria $\mathbf{p}(t) = \langle x(t), y(t), 0\rangle$ (f gura 4). Análogamente, las proyecciones sobre el plano yz y xz son las trayectorias $\langle 0, y(t), z(t)\rangle$ y $\langle x(t), 0, z(t)\rangle$, respectivamente.

EJEMPLO 2 Hélice Describa la curva descrita por $\mathbf{r}(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$ para $t \geq 0$ en términos de las proyecciones sobre los planos de coordenadas.

Solución Las proyecciones son las siguientes (f gura 4):

- plano xy (considere $z = 0$): la trayectoria $\mathbf{p}(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 0\rangle$, que describe un punto que se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj sobre la circunferencia unidad y empezando en el punto $\mathbf{p}(0) = (0, 1, 0)$.
- plano xz (considere $y = 0$): la trayectoria $\langle -\operatorname{sen} t, 0, t\rangle$, que es una onda en la dirección z.
- plano yz (considere $x = 0$): la trayectoria $\langle 0, \cos t, t\rangle$, que es una onda en la dirección z.

La función $\mathbf{r}(t)$ describe un punto que se mueve sobre la circunferencia unidad en el plano xy mientras que su altura $z = t$ aumenta linealmente, con el resultado f nal de la hélice de la f gura 4.

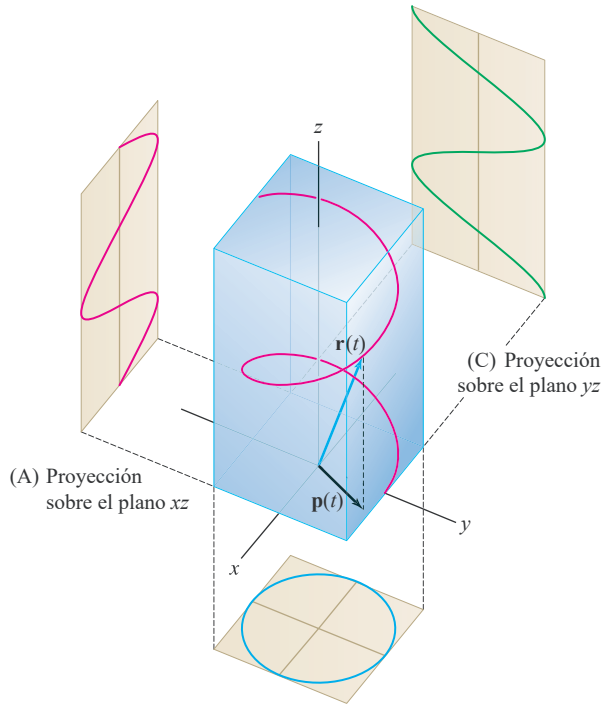


FIGURA 4 Proyecciones de la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$.

Cualquier curva se puede parametrizar de muchas maneras (pues hay inf nitas maneras en las que un punto puede recorrer una curva como función del tiempo). El siguiente ejemplo describe dos parametrizaciones diferentes de la misma curva.

EJEMPLO 3 Parametrizando la intersección de superficies Parametrice la curva C obtenida como la intersección de las superf cies $x^2 - y^2 = z - 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (f gura 5).

Solución Se tiene que expresar las coordenadas (x, y, z) de un punto de la curva como funciones de un parámetro t. He aquí dos maneras de resolver esta cuestión.
Primer método: exprese, a partir de las ecuaciones dadas, y y z en términos de x. En primer lugar, aísle y:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

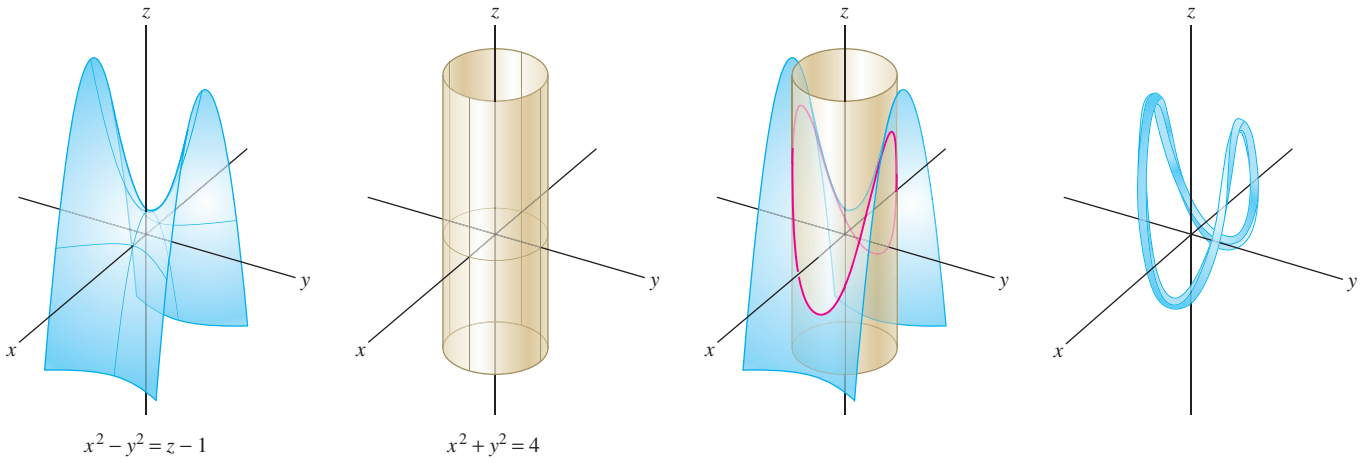


FIGURA 5 Intersección de las superf cies $x^2 - y^2 = z - 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

La ecuación $x^2 - y^2 = z - 1$ se puede escribir como $z = x^2 - y^2 + 1$. Por tanto, se puede sustituir $y^2 = 4 - x^2$ para aislar z:

$$z = x^2 - y^2 + 1 = x^2 - (4 - x^2) + 1 = 2x^2 - 3$$

Ahora use $t = x$ como el parámetro. Entonces $y = \pm\sqrt{4 - t^2}$, $z = 2t^2 - 3$. Los dos signos de la raíz cuadrada corresponden a las dos mitades de la curva en que $y > 0$ e $y < 0$, como se muestra en la f gura 6. Así, se necesitan dos funciones vectoriales para parametrizar la totalidad de la curva:

$$\mathbf{r}_1(t) = \left\langle t, \sqrt{4 - t^2}, 2t^2 - 3 \right\rangle, \quad \mathbf{r}_2(t) = \left\langle t, -\sqrt{4 - t^2}, 2t^2 - 3 \right\rangle, \qquad -2 \le t \le 2$$

Segundo método: observe que $x^2 + y^2 = 4$ admite la parametrización trigonométrica dada por $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$ para $0 \le t < 2\pi$. Según la ecuación $x^2 - y^2 = z - 1$ se tiene que

$$z = x^2 - y^2 + 1 = 4\cos^2 t - 4\,\text{sen}^2\, t + 1 = 4\cos 2t + 1$$

Así, se puede parametrizar la totalidad de la curva mediante una única función vectorial:

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 4\cos 2t + 1 \rangle, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

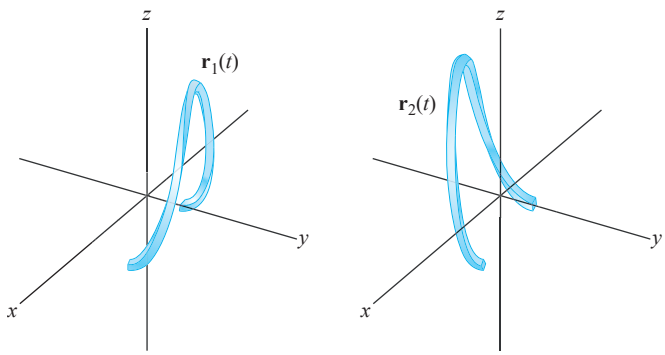


FIGURA 6 Dos mitades de la curva de intersección del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Parametrice la circunferencia de radio 3 y centro $P = (2, 6, 8)$ situada en un plano:

(a) paralelo al plano xy **(b)** paralelo al plano xz

(a) Una circunferencia de radio R en el plano xy con centro en el origen tiene como parametrización $\langle R\cos t, R\,\text{sen}\,t \rangle$. Para situar la circunferencia en un sistema de coordenadas tridimensional se utiliza la parametrización $\langle R\cos t, R\,\text{sen}\,t, 0 \rangle$.

Así, la circunferencia de radio 3 centrada en $(0, 0, 0)$ tiene parametrización $\langle 3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0\rangle$. Para realizar un transporte paralelo de esta circunferencia, de manera que su centro se encuentre en $P = (2, 6, 8)$, se traslada por medio del vector $\langle 2, 6, 8\rangle$:

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2, 6, 8\rangle + \langle 3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0\rangle = \langle 2 + 3\cos t, 6 + 3\operatorname{sen} t, 8\rangle$$

(b) La parametrización $\langle 3\cos t, 0, 3\operatorname{sen} t\rangle$ da lugar a una circunferencia de radio 3 centrada en el origen, en el plano xz. Para realizar un transporte paralelo de la circunferencia, de manera que su centro esté en el punto $(2, 6, 8)$, se traslada por medio del vector $\langle 2, 6, 8\rangle$:

$$\mathbf{r}_2(t) = \langle 2, 6, 8\rangle + \langle 3\cos t, 0, 3\operatorname{sen} t\rangle = \langle 2 + 3\cos t, 6, 8 + 3\operatorname{sen} t\rangle$$

En la f gura 7 se muestran estas dos circunferencias. ■

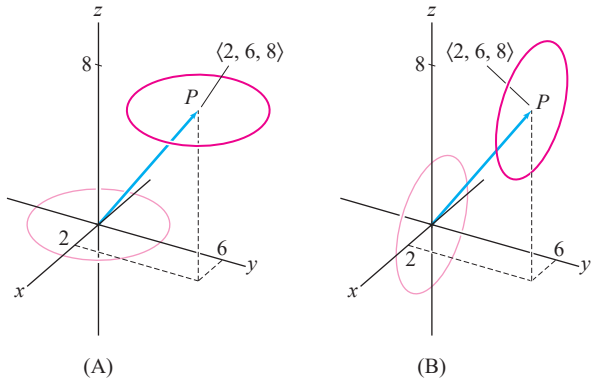


FIGURA 7 Circunferencias horizontal y vertical de radio 3 y centro $P = (2, 6, 8)$ obtenidas por traslación.

14.1 RESUMEN

- Una *función vectorial* es una función de la forma:

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

- Se suele pensar en t como en el tiempo y en $\mathbf{r}(t)$ como en un "vector en movimiento" cuyo punto f nal describe una trayectoria como función del tiempo. Se dice que $\mathbf{r}(t)$ es una *parametrización vectorial* de la trayectoria o simplemente una "trayectoria."
- La curva subyacente $\mathcal{C}$ descrita por $\mathbf{r}(t)$ es el conjunto de todos los puntos $(x(t), y(t), z(t))$ en $\mathbb{R}^3$ para t en el domino de $\mathbf{r}(t)$. Una curva en $\mathbb{R}^3$ también se llama una *curva en el espacio*.
- Toda curva $\mathcal{C}$ se puede parametrizar de muchas maneras.
- La proyección de $\mathbf{r}(t)$ sobre el plano xy es la curva descrita por $\langle x(t), y(t), 0\rangle$. La proyección sobre el plano xz es $\langle x(t), 0, z(t)\rangle$ y la proyección sobre el plano yz es $\langle 0, y(t), z(t)\rangle$.

14.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones *no* es la parametrización de una recta?

(a) $\mathbf{r}_1(t) = \langle 8 - t, 2t, 3t\rangle$

(b) $\mathbf{r}_2(t) = t^3\mathbf{i} - 7t^3\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r}_3(t) = \langle 8 - 4t^3, 2 + 5t^2, 9t^3\rangle$

2. ¿Cuál es la proyección de $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ sobre el plano xz?

3. ¿Qué proyección de $\langle\cos t, \cos 2t, \operatorname{sen} t\rangle$ es una circunferencia?

4. ¿Cuál es el centro de la circunferencia de parametrización

$$\mathbf{r}(t) = (-2 + \cos t)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (3 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}?$$

5. ¿En qué difieren las parametrizaciones de la circunferencia unidad dadas por $\mathbf{r}_1(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$ y por $\mathbf{r}_2(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle$?

6. ¿Qué tres funciones vectoriales, entre las siguientes, parametrizan la misma curva?

(a) $(-2 + \cos t)\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + (3 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

(b) $(2 + \cos t)\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + (-3 - \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

(c) $(-2 + \cos 3t)\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + (3 - \operatorname{sen} 3t)\mathbf{k}$

(d) $(-2 - \cos t)\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + (3 + \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

(e) $(2 + \cos t)\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + (3 + \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

Problemas

1. ¿Cuál es el dominio de $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j} + (t+1)^{-3}\mathbf{k}$?

2. ¿Cuál es el dominio de $\mathbf{r}(s) = e^s\mathbf{i} + \sqrt{s}\,\mathbf{j} + \cos s\,\mathbf{k}$?

3. Evalúe $\mathbf{r}(2)$ y $\mathbf{r}(-1)$ para $\mathbf{r}(t) = \left\langle \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}t, t^2, (t^2+1)^{-1} \right\rangle$.

4. Sean $P = (4, 11, 20)$ y $Q = (-1, 6, 16)$. ¿Pertenecen alguno de estos puntos a la trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + t^2, t^4 \rangle$?

5. Halle una parametrización vectorial de la recta que pasa por $P = (3, -5, 7)$ con la dirección dada por $\mathbf{v} = \langle 3, 0, 1 \rangle$.

6. Halle un vector director para la recta de parametrización $\mathbf{r}(t) = (4 - t)\mathbf{i} + (2 + 5t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$.

7. Relacione las curvas en el espacio de la figura 8 con sus proyecciones sobre el plano xy de la figura 9.

8. Relacione las curvas en el espacio de la figura 8 con las siguientes funciones vectoriales:

(a) $\mathbf{r}_1(t) = \langle \cos 2t, \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$ **(b)** $\mathbf{r}_2(t) = \langle t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$

(c) $\mathbf{r}_3(t) = \langle 1, t, t \rangle$

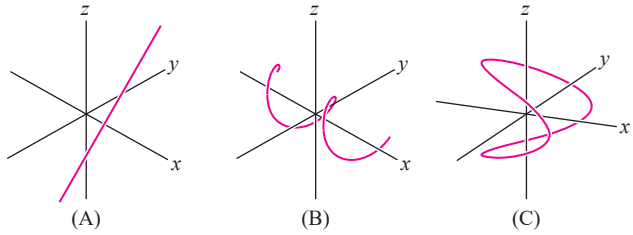


FIGURA 8

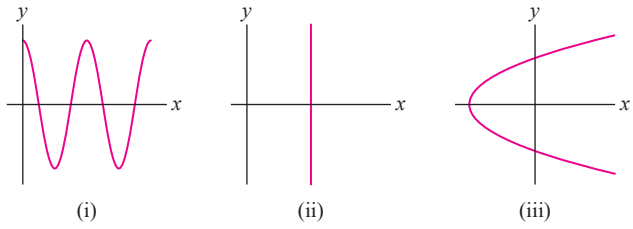


FIGURA 9

9. Relacione las funciones vectoriales (a)-(f) con las curvas en el espacio (i)-(vi) de la figura 10.

(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t + 15, e^{0,08t} \cos t, e^{0,08t} \operatorname{sen} t \rangle$

(b) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 12t \rangle$ **(c)** $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t, \dfrac{25t}{1+t^2} \right\rangle$

(d) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, \operatorname{sen} 2t \rangle$ **(e)** $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, 2t \rangle$

(f) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, \cos t \operatorname{sen} 12t \rangle$

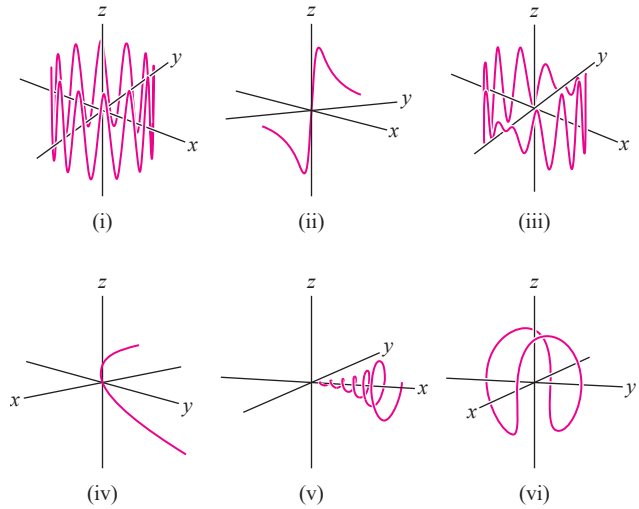


FIGURA 10

10. ¿Cuáles de las siguientes curvas tienen la misma proyección sobre el plano xy?

(a) $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, e^t \rangle$ **(b)** $\mathbf{r}_2(t) = \langle e^t, t^2, t \rangle$

(c) $\mathbf{r}_3(t) = \langle t, t^2, \cos t \rangle$

11. Relacione las curvas en el espacio (A)-(C) de la figura 11 con sus proyecciones (i)-(iii) en el plano xy.

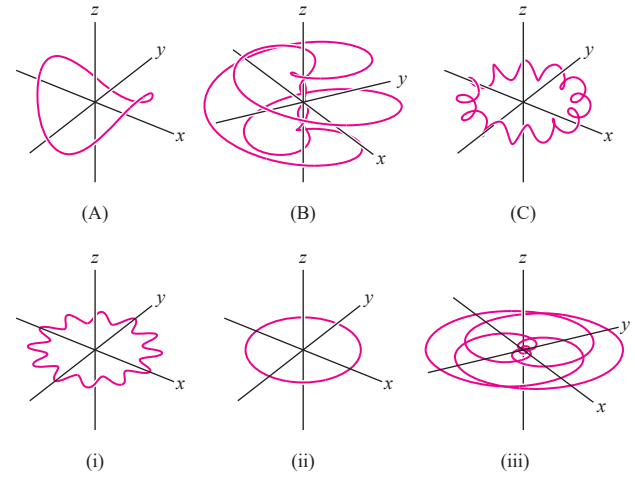


FIGURA 11

12. Describa las proyecciones de la circunferencia:

$$\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 0, 4 + \cos t \rangle$$

sobre los planos de coordenadas.

En los problemas 13-16, la función $\mathbf{r}(t)$ *describe una circunferencia. Determine el radio, el centro y el plano que contiene a la circunferencia.*

13. $\mathbf{r}(t) = (9\cos t)\mathbf{i} + (9\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$

14. $\mathbf{r}(t) = 7\mathbf{i} + (12\cos t)\mathbf{j} + (12\operatorname{sen} t)\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 0, 4 + \cos t \rangle$

16. $\mathbf{r}(t) = \langle 6 + 3\operatorname{sen} t, 9, 4 + 3\cos t \rangle$

17. Sea $\mathcal{C}$ la curva $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\operatorname{sen} t, t \rangle$.

(a) Pruebe que $\mathcal{C}$ se encuentra en el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

(b) Dibuje el cono y una representación aproximada de $\mathcal{C}$ sobre el cono.

18. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para representar las proyecciones sobre el plano xy y el plano xz de la curva $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\operatorname{sen} t, t \rangle$ del problema 17.

En los problemas 19 y 20, sea

$$\boldsymbol{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t \cos 2t \rangle$$

como se muestra en la figura 12.

19. Halle los puntos en que $\mathbf{r}(t)$ interseca con el plano xy.

20. Pruebe que la proyección de $\mathbf{r}(t)$ sobre el plano xz es la curva

$$z = x - 2x^3 \quad \text{para} \quad -1 \le x \le 1$$

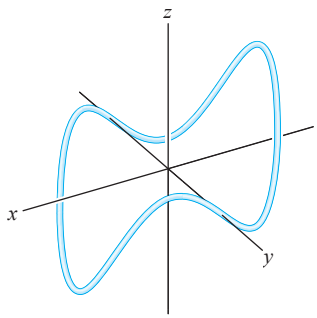


FIGURA 12

21. Parametrice la intersección de las superficies:

$$y^2 - z^2 = x - 2, \qquad y^2 + z^2 = 9$$

usando $t = y$ como el parámetro (se necesitan dos funciones vectoriales, como en el ejemplo 3).

22. Halle una parametrización de la curva del problema 21 usando funciones trigonométricas.

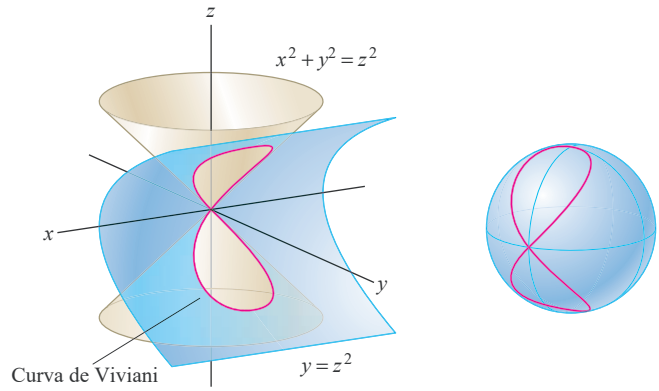
23. Curva de Viviani $\mathcal{C}$ es la intersección de las superficies (figura 13)

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad y = z^2$$

(a) Parametrice cada una de las dos partes de $\mathcal{C}$ correspondientes a $x \ge 0$ y a $x \le 0$, considerando $t = z$ como parámetro.

(b) Describa la proyección de $\mathcal{C}$ sobre el plano xy.

(c) Pruebe que $\mathcal{C}$ se encuentra en la esfera de radio 1 y centro $(0, 1, 0)$. Esta curva parece un ocho sobre una esfera [figura 13(B)].



(A) (B) Curva de Viviani vista desde el eje de las y negativas

FIGURA 13 La curva de Viviani es la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ e } y = z^2.$$

24. Pruebe que todo punto sobre $x^2 + y^2 = z^2$ se puede expresar de la forma $(z\cos\theta, z\operatorname{sen}\theta, z)$ para algún θ. Use este resultado para hallar una parametrización de la curva de Viviani (Problema 23) con θ como parámetro.

25. Use el seno y el coseno para parametrizar la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ (utilice dos funciones vectoriales). A continuación, describa las proyecciones de esta curva sobre los tres planos de coordenadas.

26. Use funciones hiperbólicas para parametrizar la intersección de las superficies $x^2 - y^2 = 4$ y $z = xy$.

27. Use el seno y el coseno para parametrizar la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 4x^2$ (figura 14).

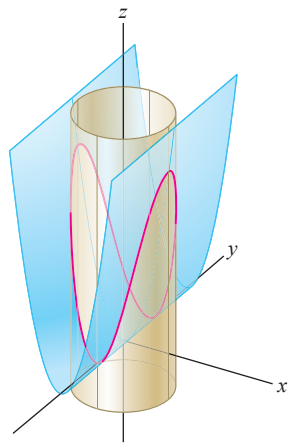


FIGURA 14 Intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $z = 4x^2$.

En los problemas 28-30, dos trayectorias $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ intersecan si existe un punto P sobre ambas curvas. Se dice que $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ colisionan *si $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0)$ en algún instante t_0.*

28. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones es cierta?

(a) Si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ intersecan, entonces colisionan.

(b) Si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ colisionan, entonces intersecan.

(c) Intersección depende solamente de las curvas descritas por $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, pero la colisión depende de la parametrización considerada.

29. Determine si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ colisionan o intersecan:

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2 + 3, t + 1, 6t^{-1} \rangle$$
$$\mathbf{r}_2(t) = \langle 4t, 2t - 2, t^2 - 7 \rangle$$

30. Determine si $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ colisionan o intersecan:

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle, \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t + 6, 4t^2, 7 - t \rangle$$

En los problemas 31-40, halle una parametrización de la curva.

31. La recta vertical que pasa por el punto $(3, 2, 0)$.

32. La recta que pasa por $(1, 0, 4)$ y por $(4, 1, 2)$.

33. La recta que pasa por el origen cuya proyección sobre el plano xy es una recta de pendiente 3 y cuya proyección sobre el plano yz es una recta de pendiente 5 (i.e., $\Delta z/\Delta y = 5$)

34. La circunferencia horizontal de radio 1 y centro $(2, -1, 4)$.

35. La circunferencia de radio 2 y centro $(1, 2, 5)$ en un plano paralelo al plano yz

36. La elipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ en el plano xy, trasladada para que tenga centro $(9, -4, 0)$.

37. La intersección del plano $y = \frac{1}{2}$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

38. La intersección de las superf cies

$$z = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad z = x^2 + xy - 1.$$

39. La elipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$ en el plano xz, trasladada para que su centro sea $(3, 1, 5)$ [f gura 15(A)].

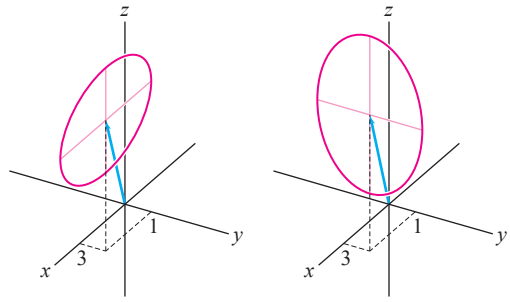


FIGURA 15 Las elipses descritas en los problemas 39 y 40.

40. La elipse $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$, trasladada para que su centro sea $(3, 1, 5)$ [f gura 15(B)].

Problemas avanzados

41. Dibuje la curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \langle |t| + t, |t| - t \rangle$.

42. Halle la máxima altura por encima del plano xy de un punto de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, \operatorname{sen} t, t(4 - t) \rangle$.

43. Sea $\mathcal{C}$ la curva obtenida al intersecar un cilindro de radio r y un plano. Inserte dos esferas de radio r dentro del cilindro, por encima y por debajo del plano y sean F_1 y F_2 los puntos en los que el plano sea tangente a las esferas [f gura 16(A)]. Sea K la distancia vertical entre los ecuadores de las dos esferas. Redescubra la demostración de Arquímedes de que $\mathcal{C}$ es una elipse, probando que todo punto P sobre $\mathcal{C}$ cumple:

$$PF_1 + PF_2 = K \qquad \boxed{2}$$

Indicación: si dos rectas que pasan por un punto P son tangentes a una esfera e intersecan la esfera en Q_1 y Q_2, como en la f gura 16(B), entonces los segmentos $\overline{PQ_1}$ y $\overline{PQ_2}$ tienen la misma longitud. Use este resultado para probar que $PF_1 = PR_1$ y $PF_2 = PR_2$.

44. Suponga que la ecuación del cilindro de la f gura 16 es $x^2 + y^2 = r^2$ y que la ecuación del plano es $z = ax + by$. Halle una parametrización $\mathbf{r}(t)$ de la curva de intersección, usando las funciones $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$.

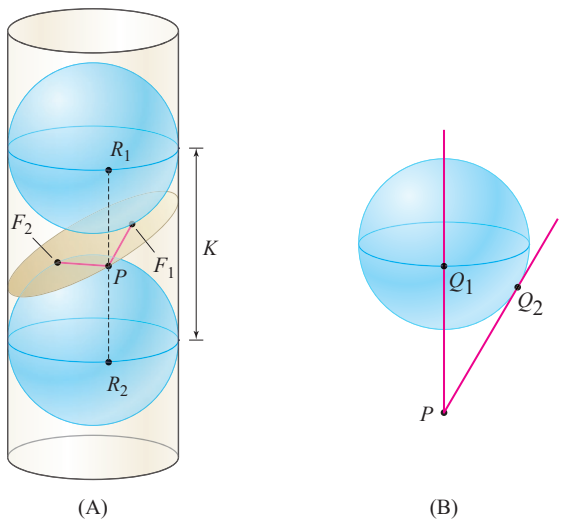


FIGURA 16

45. SAC Ahora vuelva a demostrar el resultado del problema 43 usando geometría vectorial. Suponga que la ecuación del cilindro sea $x^2 + y^2 = r^2$ y que la del plano sea $z = ax + by$.

(a) Pruebe que los centros de las esferas superior e inferior de la f gura 16 son, respectivamente:

$$C_1 = \left(0, 0, r\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right)$$
$$C_2 = \left(0, 0, -r\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\right)$$

(b) Pruebe que los puntos en los que el plano es tangente a la esfera son:

$$F_1 = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}(a, b, a^2 + b^2)$$
$$F_2 = \frac{-r}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}(a, b, a^2 + b^2)$$

Indicación: pruebe que la longitud de $\overline{C_1F_1}$ y de $\overline{C_2F_2}$ es r y que son ortogonales al plano.

(c) Compruebe, con la ayuda de un programa informático de cálculo simbólico, que la ec. (2) es cierta con:

$$K = 2r\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

Para simplif car la manipulación algebraica, observe que, como a y b son arbitrarios, es suf ciente comprobar la ec. (2) para el punto $P = (r, 0, ar)$.

14.2 Cálculo para funciones vectoriales

En esta sección se amplía la derivación y la integración a funciones vectoriales. Es prácticamente inmediato porque las técnicas del cálculo inf nitesimal en una variable se pueden adaptar con muy pocos cambios. Lo que es nuevo e importante es la interpretación geométrica de la derivada como un vector tangente. Este punto se trata en la última parte de la sección.

El primer paso es def nir límites de una función vectorial:

DEFINICIÓN Límite de una función vectorial Una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ tiene límite $\mathbf{u}$ (un vector) cuando t tiende a t_0 si $\lim_{t\to t_0} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{u}\| = 0$. En tal caso, se escribe:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}$$

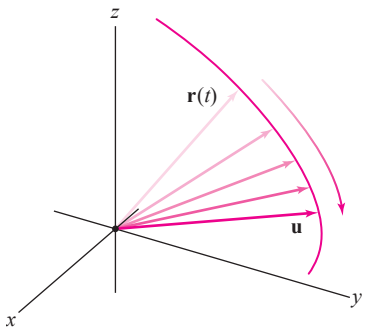


FIGURA 1 La función vectorial $\mathbf{r}(t)$ tiende a $\mathbf{u}$ cuando $t \to t_0$.

Se puede visualizar el límite de una función vectorial como un vector $\mathbf{r}(t)$ "moviéndose" hacia el vector límite $\mathbf{u}$ (f gura 1). Según el siguiente teorema, los límites vectoriales se pueden calcular componente a componente.

TEOREMA 1 Los límites vectoriales se calculan componente a componente Una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ tiende a un límite cuando $t \to t_0$ si y sólo si cada componente tiende a un límite y, en tal caso:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t), \lim_{t\to t_0} z(t) \right\rangle \quad \boxed{1}$$

Las propiedades de los límites para funciones escalares continúan siendo válidas en el caso vectorial. Se comprueban aplicando las propiedades de los límites a las componentes.

Demostración Sea $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$ y considere la norma al cuadrado:

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{u}\|^2 = (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2 \quad \boxed{2}$$

El término de la izquierda tiende a cero si y sólo si cada término de la derecha tiende a cero (porque estos términos son no negativos). En consecuencia, $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{u}\|$ tiende a cero si y sólo si $|x(t) - a|$, $|y(t) - b|$ y $|z(t) - c|$ tienden a cero. Por tanto, $\mathbf{r}(t)$ tiene límite $\mathbf{u}$ cuando $t \to t_0$ si y sólo si $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ convergen a las componentes a, b, y c. ■

■ **EJEMPLO 1** Calcule $\lim_{t\to 3} \mathbf{r}(t)$, donde $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1 - t, t^{-1}\rangle$.

Solución Por el teorema 1:

$$\lim_{t\to 3} \mathbf{r}(t) = \lim_{t\to 3}\langle t^2, 1 - t, t^{-1}\rangle = \left\langle \lim_{t\to 3} t^2, \lim_{t\to 3}(1 - t), \lim_{t\to 3} t^{-1} \right\rangle = \left\langle 9, -2, \frac{1}{3} \right\rangle$$

■

La continuidad para las funciones vectoriales se def ne de la misma manera que en el caso escalar. Una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ es **continua** en t_0 si:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$$

Según el teorema 1, $\mathbf{r}(t)$ es continua en t_0 si y sólo si las componentes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son continuas en t_0.

Se def ne la derivada de $\mathbf{r}(t)$ como el límite del cociente incremental:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \qquad \boxed{3}$$

En la notación de Leibniz, la derivada se expresa como $d\mathbf{r}/dt$.

Se dice que $\mathbf{r}(t)$ es *derivable* en t si el límite de la ec. (3) existe. Observe que las componentes del cociente incremental son cocientes incrementales a su vez:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left\langle \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \right\rangle$$

y por el teorema 1, $\mathbf{r}(t)$ es derivable si y sólo si las componentes don derivables. En tal caso, $\mathbf{r}'(t)$ es igual al vector de derivadas $\langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$.

Según los teoremas 1 y 2, los límites vectoriales y las derivadas se calculan "componente a componente", por lo que no son más difíciles de calcular que los límites y derivadas ordinarias.

TEOREMA 2 Las derivadas de funciones vectoriales se calculan componente a componente Una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ es derivable si y sólo si cada componente es derivable. En tal caso,

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

He aquí algunas derivadas de funciones vectoriales, calculadas componente a componente:

$$\frac{d}{dt}\langle t^2, t^3, \operatorname{sen} t \rangle = \langle 2t, 3t^2, \cos t \rangle \qquad \frac{d}{dt}\langle \cos t, -1, e^{2t} \rangle = \langle -\operatorname{sen} t, 0, 2e^{2t} \rangle$$

Las derivadas de orden superior se def nen mediante derivación sucesiva:

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{r}'''(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}''(t), \quad \ldots$$

■ **EJEMPLO 2** Calcule $\mathbf{r}''(3)$, donde $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln t, t, t^2 \right\rangle$.

Solución Se va a derivar componente a componente:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\langle \ln t, t, t^2 \rangle = \langle t^{-1}, 1, 2t \rangle$$

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d}{dt}\langle t^{-1}, 1, 2t \rangle = \langle -t^{-2}, 0, 2 \rangle$$

Por tanto, $\mathbf{r}''(3) = \langle -\frac{1}{9}, 0, 2 \rangle$. ■

Las reglas de derivación del cálculo diferencial en una variable se pueden aplicar en el entorno vectorial.

Reglas de derivación Suponga que $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ son derivables. Entonces

- **Regla de la suma:** $(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$
- **Regla de la multiplicación por una constante:** para cualquier contante c, $(c\,\mathbf{r}(t))' = c\,\mathbf{r}'(t)$.
- **Regla del producto:** para cualquier función a valores escalares $f(t)$,

$$\frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{r}(t)) = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$$

- **Regla de la cadena:** para cualquier función a valores escalares $g(t)$,

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{r}(g(t)) = g'(t)\mathbf{r}'(g(t))$$

Demostración Cada una de las reglas se demuestra aplicando las reglas de derivación a las componentes. Por ejemplo, para demostrar la regla del producto (se consideran funciones vectoriales en el plano, para que la notación sea simple) exprese:

$$f(t)\mathbf{r}(t) = f(t)\langle x(t), y(t)\rangle = \langle f(t)x(t), f(t)y(t)\rangle$$

Ahora, aplique la regla del producto a cada componente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t)\mathbf{r}(t) &= \left\langle \frac{d}{dt}f(t)x(t), \frac{d}{dt}f(t)y(t)\right\rangle \\ &= \langle f'(t)x(t) + f(t)x'(t), f'(t)y(t) + f(t)y'(t)\rangle \\ &= \langle f'(t)x(t), f'(t)y(t)\rangle + \langle f(t)x'(t), f(t)y'(t)\rangle \\ &= f'(t)\langle x(t), y(t)\rangle + f(t)\langle x'(t), y'(t)\rangle = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t)\end{aligned}$$

El resto de las demostraciones se han dejado como problemas (problemas 69-70). ■

■ **EJEMPLO 3** Sea $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, 5t, 1\right\rangle$ y $f(t) = e^{3t}$. Calcule:

(a) $\dfrac{d}{dt}f(t)\mathbf{r}(t)$ **(b)** $\dfrac{d}{dt}\mathbf{r}(f(t))$

Solución Se tiene $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, 5, 0\rangle$ y $f'(t) = 3e^{3t}$.

(a) Por la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t)\mathbf{r}(t) &= f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t) = e^{3t}\langle 2t, 5, 0\rangle + 3e^{3t}\langle t^2, 5t, 1\rangle \\ &= \langle (3t^2 + 2t)e^{3t}, (15t + 5)e^{3t}, 3e^{3t}\rangle\end{aligned}$$

(b) Por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(f(t)) = f'(t)\mathbf{r}'(f(t)) = 3e^{3t}\mathbf{r}'(e^{3t}) = 3e^{3t}\langle 2e^{3t}, 5, 0\rangle = \langle 6e^{6t}, 15e^{3t}, 0\rangle$$ ■

Hay tres reglas del producto diferentes para funciones vectoriales. Además de la regla del producto para una función escalar $f(t)$ y para una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que se enunciaron anteriormente, hay reglas del producto para el producto escalar y el producto vectorial. Estas reglas son muy importantes, tal y como se verá.

ATENCIÓN *El orden es importante en la regla del producto para el producto vectorial. El primer término de la ecuación ec. (5) se debe escribir como:*

$$\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)$$

y no como $\mathbf{r}_2'(t) \times \mathbf{r}_1(t)$. *De forma análoga, el segundo término es* $\mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t)$. *¿Por qué el orden no es relevante para el producto escalar?*

TEOREMA 3 Regla del producto para el producto escalar y el producto vectorial
Suponga que $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ son derivables. Entonces

Producto escalar: $$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) \quad \boxed{4}$$

Producto vectorial: $$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)] + [\mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t)] \quad \boxed{5}$$

Demostración Se va a comprobar la ec. (4) para funciones vectoriales en el plano. Si $\mathbf{r}_1(t) = \langle x_1(t), y_1(t) \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle x_2(t), y_2(t) \rangle$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)) &= \frac{d}{dt}(x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)) = \\ &= x_1(t)x_2'(t) + x_1'(t)x_2(t) + y_1(t)y_2'(t) + y_1'(t)y_2(t) = \\ &= (x_1(t)x_2'(t) + y_1(t)y_2'(t)) + (x_1'(t)x_2(t) + y_1'(t)y_2(t)) = \\ &= \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)\end{aligned}$$

La demostración de la ec. (5) se ha dejado como problema (problema 71). ■

En el siguiente ejemplo, y para el resto del capítulo, *todas las funciones vectoriales se suponen derivables, salvo que se indique lo contrario*.

■ **EJEMPLO 4** Demuestre la fórmula $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

Solución Por la fórmula del producto para el producto vectorial:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t) + \underbrace{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)}_{\text{Es igual a } \mathbf{0}} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

Aquí, $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ pues el producto vectorial de un vector con él mismo es cero. ■

La derivada como vector tangente

El vector derivada $\mathbf{r}'(t_0)$ tiene una propiedad geométrica importante: apunta en la dirección tangente a la trayectoria descrita por $\mathbf{r}(t)$ en $t = t_0$.

Para entender el por qué, considere el cociente incremental, donde $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0+h) - \mathbf{r}(t_0)$ y $\Delta t = h$ con $h \neq 0$:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)}{h} \quad \boxed{6}$$

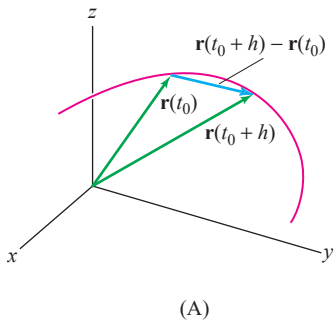
El vector $\Delta\mathbf{r}$ apunta de la punta de $\mathbf{r}(t_0)$ a la punta de $\mathbf{r}(t_0 + h)$, como en la f gura 2(A). El cociente incremental $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ es un múltiplo escalar de $\Delta\mathbf{r}$ y, por tanto, apunta en la misma dirección [f gura 2(B)].

Aunque se adoptó como convenio que todos los vectores estaban basados en el origen, el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ *es una excepción; se visualiza como un vector cuya base es el punto terminal de* $\mathbf{r}(t)$. *De esta manera,* $\mathbf{r}'(t)$ *resulta tangente a la curva (figura 3).*

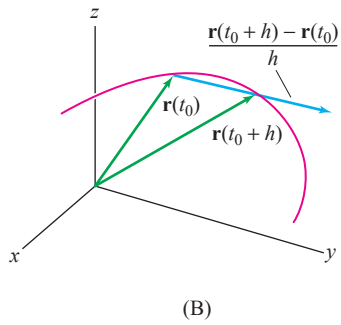
Cuando $h = \Delta t$ tiende a cero, $\Delta\mathbf{r}$ también tiende a cero pero el cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ tiende al vector $\mathbf{r}'(t_0)$, el cual, si es no nulo, apunta en la dirección tangente a la curva. La f gura 3 ilustra este proceso límite. Se dice que $\mathbf{r}'(t_0)$ es el **vector tangente** o el **vector velocidad** en $\mathbf{r}(t_0)$.

El vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ (si es no nulo) es un vector director para la recta tangente a la curva. Por tanto, la recta tangente tiene parametrización vectorial:

Recta tangente en $\mathbf{r}(t_0)$: $$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\,\mathbf{r}'(t_0) \quad \boxed{7}$$

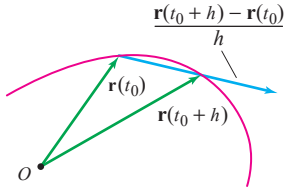


(A)

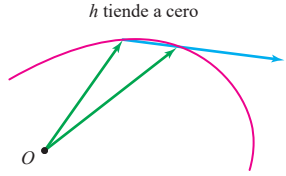


(B)

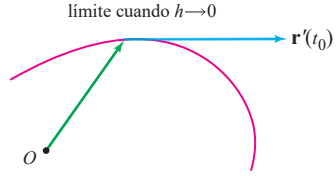
FIGURA 2 El cociente incremental apunta en la dirección de $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0)$.



(A)



(B)



(C)

FIGURA 3 El cociente incremental tiende a $\mathbf{r}'(t_0)$, tangente a la curva.

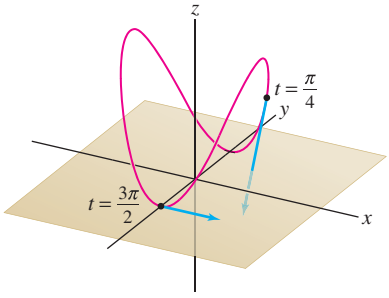


FIGURA 4 Vectores tangentes a $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 4\cos^2 t \rangle$ en $t = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{2}$.

EJEMPLO 5 Representando vectores tangentes SAC Represente el vector $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 4\cos^2 t \rangle$ junto con sus vectores tangentes en $t = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{2}$. Halle una parametrización de la recta tangente en $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución La derivada es $\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, -8\cos t \operatorname{sen} t \rangle$ y, por tanto, los vectores tangentes en $t = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{2}$ son:

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -4 \right\rangle \qquad \mathbf{r}'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

La f gura 4 muestra una representación de $\mathbf{r}(t)$ junto con $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4})$ con base en $\mathbf{r}(\frac{\pi}{4})$ y $\mathbf{r}'(\frac{3\pi}{2})$ con base en $\mathbf{r}(\frac{3\pi}{2})$.

En $t = \frac{\pi}{4}$, $\mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \right\rangle$ y la parametrización de la recta tangente es:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) + t\,\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \right\rangle + t\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -4 \right\rangle$$

Hay algunas diferencias importantes entre derivadas de funciones escalares y de funciones vectoriales. La recta tangente a una curva plana $y = f(x)$ es horizontal en x_0 si $f'(x_0) = 0$. Pero en una parametrización vectorial, el vector tangente $\mathbf{r}'(t_0) = \langle x'(t_0), y'(t_0) \rangle$ es horizontal y no nulo si $y'(t_0) = 0$ pero $x'(t_0) \neq 0$.

EJEMPLO 6 Vectores tangentes horizontales a la cicloide La función:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t \rangle$$

traza una cicloide. Halle los puntos en que:

(a) $\mathbf{r}'(t)$ es horizontal y no nulo. **(b)** $\mathbf{r}'(t)$ es el vector cero.

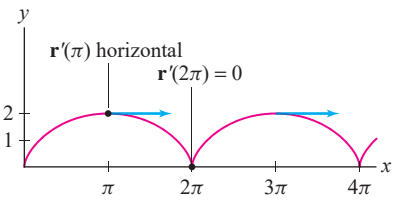


FIGURA 5 Puntos sobre la cicloide

$$r(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t \rangle$$

en que el vector tangente es horizontal.

Solución El vector tangente es $\mathbf{r}'(t) = \langle 1 - \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$. La componente y de $\mathbf{r}'(t)$ es cero si $\operatorname{sen} t = 0$, es decir si $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Se tiene:

$$\mathbf{r}(0) = \langle 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{r}'(0) = \langle 1 - \cos 0, \operatorname{sen} 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \quad \text{(vector cero)}$$

$$\mathbf{r}(\pi) = \langle \pi, 2 \rangle, \quad \mathbf{r}'(\pi) = \langle 1 - \cos \pi, \operatorname{sen} \pi \rangle = \langle 2, 0 \rangle \quad \text{(horizontal)}$$

Debido a la periodicidad, se deduce que $\mathbf{r}'(t)$ es no nulo y horizontal para $t = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ y $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ para $t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ (f gura 5). ■

UN APUNTE CONCEPTUAL La cicloide de la f gura 5 tiene unos puntos angulosos denominados **cúspides** en los puntos $x = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$. Si se representa la cicloide como la gráf ca de una función $y = f(x)$, entonces $f'(x)$ no existe en estos puntos. Por el contrario, el vector derivada $\mathbf{r}'(t) = \langle 1 - \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$ existe *para todo t*, pero $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ en las cúspides. En general, $\mathbf{r}'(t)$ es un vector director para la recta tangente siempre que ésta exista pero no proporciona ninguna información sobre la recta tangente (que puede existir o no) en los puntos en que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$.

En el siguiente ejemplo se establece una importante propiedad de las funciones vectoriales que se utilizará en las secciones 14.4-14.6.

■ **EJEMPLO 7 Ortogonalidad de r y r′ cuando la norma de r es constante** Demuestre que si la norma de $\mathbf{r}(t)$ es constante, entonces $\mathbf{r}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t)$.

Solución Según la regla del producto para el producto escalar:

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{r}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

Esta derivada es cero porque $\|\mathbf{r}(t)\|$ es constante. Por tanto $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ y $\mathbf{r}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t)$ [o $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$]. ■

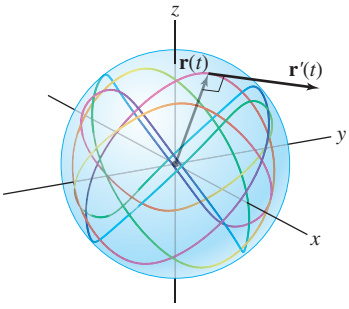


FIGURA 6

UN APUNTE GRÁFICO El resultado del ejemplo 7 tiene una explicación geométrica. Una parametrización vectorial de $\mathbf{r}(t)$ que está formada por vectores de norma constante R describe una curva sobre la superf cie de una esfera de radio R y centro en el origen (f gura 6). Por tanto $\mathbf{r}'(t)$ es tangente a esta esfera. Pero cualquier recta que es tangente a una esfera en un punto P es ortogonal al vector radial que pasa por P y, por tanto, $\mathbf{r}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t)$.

Integración de funciones vectoriales

La integral de una función vectorial se puede def nir en términos de las sumas de Riemann, como en el capítulo 5. Se va a def nir, de manera más simple, por integración componente a componente (las dos def niciones son equivalentes). Dicho de otro modo:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left\langle \int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt \right\rangle$$

La integral existe si cada una de las componentes $x(t), y(t), z(t)$ es integrable. Por ejemplo:

$$\int_0^{\pi} \langle 1, t, \operatorname{sen} t \rangle\,dt = \left\langle \int_0^{\pi} 1\,dt, \int_0^{\pi} t\,dt, \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,dt \right\rangle = \left\langle \pi, \frac{1}{2}\pi^2, 2 \right\rangle$$

Las integrales vectoriales cumplen las mismas propiedades de linealidad que las integrales escalares (vea el problema 72).

Una **primitiva** de $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial $\mathbf{R}(t)$ tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. En el caso de una única variable, dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ con la misma derivada, dif eren en una constante. De forma análoga, dos funciones vectoriales con la misma derivada dif eren en

un *vector constante* (es decir, un vector que no dependa de t). Esto se demuestra aplicando el resultado escalar a cada componente de $\mathbf{r}(t)$.

TEOREMA 4 Si $\mathbf{R}_1(t)$ y $\mathbf{R}_2(t)$ son derivables y $\mathbf{R}_1'(t) = \mathbf{R}_2'(t)$, entonces

$$\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_2(t) + \mathbf{c}$$

para algún vector constante $\mathbf{c}$.

La primitiva de $\mathbf{r}(t)$ se expresa como:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{c}$$

donde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ es un vector constante arbitrario. Por ejemplo:

$$\int \langle 1, t, \operatorname{sen} t \rangle\, dt = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, -\cos t \right\rangle + \mathbf{c} = \left\langle t + c_1, \frac{1}{2}t^2 + c_2, -\cos t + c_3 \right\rangle$$

Teorema fundamental del cálculo para funciones vectoriales Si $\mathbf{r}(t)$ es continua sobre $[a, b]$ y $\mathbf{R}(t)$ es una primitiva de $\mathbf{r}(t)$, entonces:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

EJEMPLO 8 Hallar el vector de posición a través de ecuaciones diferenciales vectoriales La trayectoria de una partícula cumple:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\langle 1 - 6\operatorname{sen} 3t, \frac{1}{5}t \right\rangle$$

Halle la situación de la partícula en $t = 4$ si $\mathbf{r}(0) = \langle 4, 1 \rangle$.

Solución La solución general se obtiene integrando:

$$\mathbf{r}(t) = \int \left\langle 1 - 6\operatorname{sen} 3t, \frac{1}{5}t \right\rangle dt = \left\langle t + 2\cos 3t, \frac{1}{10}t^2 \right\rangle + \mathbf{c}$$

Según la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 4, 1 \rangle$:

$$\mathbf{r}(0) = \langle 2, 0 \rangle + \mathbf{c} = \langle 4, 1 \rangle$$

Por tanto, $\mathbf{c} = \langle 2, 1 \rangle$ y (f gura 7):

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t + 2\cos 3t, \frac{1}{10}t^2 \right\rangle + \langle 2, 1 \rangle = \left\langle t + 2\cos 3t + 2, \frac{1}{10}t^2 + 1 \right\rangle$$

La posición de la partícula en $t = 4$ es:

$$\mathbf{r}(4) = \left\langle 4 + 2\cos 12 + 2, \frac{1}{10}(4^2) + 1 \right\rangle \approx \langle 7{,}69,\ 2{,}6 \rangle$$

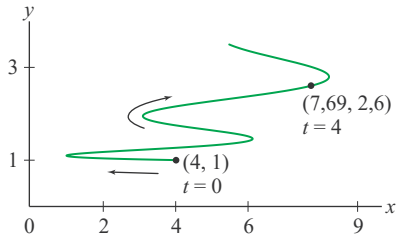


FIGURA 7 Trayectoria de la partícula $\mathbf{r}(t) = \langle t + 2\cos 3t + 2, \frac{1}{10}t^2 + 1 \rangle$

14.2 RESUMEN

- Los límites, derivación e integración de las funciones vectoriales se realizan componente a componente.
- Reglas de derivación:
  - Regla de la suma: $(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

– Regla de la multiplicación por una constante: $(c\,\mathbf{r}(t))' = c\,\mathbf{r}'(t)$

– Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dt}\,\mathbf{r}(g(t)) = g'(t)\mathbf{r}'(g(t))$

- Reglas del producto:

$$\textit{Escalar por vector:} \quad \frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{r}(t)) = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$$

$$\textit{Producto escalar:} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$$

$$\textit{Producto vectorial:} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)) = [\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t)] + [\mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t)]$$

- La derivada $\mathbf{r}'(t_0)$ se denomina el *vector tangente* o *vector de velocidad*.
- Si $\mathbf{r}'(t_0)$ es un vector no nulo, entonces apunta en la dirección tangente a la curva en $\mathbf{r}(t_0)$. La recta tangente tiene parametrización vectorial:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{r}'(t_0)$$

- Si $\mathbf{R}_1'(t) = \mathbf{R}_2'(t)$, entonces $\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_2(t) + \mathbf{c}$ para algún vector constante $\mathbf{c}$.
- Teorema fundamental del cálculo para funciones vectoriales: si $\mathbf{r}(t)$ es continua y $\mathbf{R}(t)$ es una primitiva de $\mathbf{r}(t)$, entonces:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

14.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Enuncie las tres formas de la regla del producto para funciones vectoriales.

En las cuestiones 2-6, indique si la af rmación es verdadera o falsa y, si es falsa, facilite el enunciado correcto.

2. La derivada de una función vectorial se def ne como el límite de los cocientes incrementales, como en el caso de las funciones escalares.

3. Hay dos reglas de la cadena para funciones vectoriales: una para la composición de dos funciones vectoriales y otra para la composición de una función vectorial y una escalar.

4. Los términos "vector velocidad" y "vector tangente" para una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ tienen el mismo signif cado.

5. La derivada de una función vectorial es la pendiente de la recta tangente, al igual que la situación escalar.

6. La derivada del producto vectorial es el producto vectorial de las derivadas.

7. Establezca si las derivadas de las siguientes funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ son escalares o vectores:

(a) $\dfrac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t)$ **(b)** $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t))$

(c) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t))$

Problemas

En los problemas 1-6, evalúe el límite.

1. $\lim\limits_{t\to 3}\left\langle t^2, 4t, \dfrac{1}{t}\right\rangle$

2. $\lim\limits_{t\to\pi} \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \tan 4t\mathbf{k}$

3. $\lim\limits_{t\to 0} e^{2t}\mathbf{i} + \ln(t+1)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

4. $\lim\limits_{t\to 0}\left\langle \dfrac{1}{t+1}, \dfrac{e^t-1}{t}, 4t\right\rangle$

5. Evalúe $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$ para $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^{-1}, \operatorname{sen} t, 4\right\rangle$.

6. Evalúe $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathbf{r}(t)}{t}$ para $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 1-\cos t, -2t\rangle$.

En los problemas 7-12, calcule la derivada.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle 7-t, 4\sqrt{t}, 8\rangle$

9. $\mathbf{r}(s) = \langle e^{3s}, e^{-s}, s^4\rangle$

10. $\mathbf{b}(t) = \left\langle e^{3t-4}, e^{6-t}, (t+1)^{-1}\right\rangle$ **11.** $\mathbf{c}(t) = t^{-1}\mathbf{i} - e^{2t}\mathbf{k}$

12. $\mathbf{a}(\theta) = (\cos 3\theta)\mathbf{i} + (\text{sen}^2\,\theta)\mathbf{j} + (\tan\theta)\mathbf{k}$

13. Calcule $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$.

14. Dibuje la curva $\mathbf{r}(t) = \langle 1 - t^2, t\rangle$ para $-1 \le t \le 1$. Calcule el vector tangente en $t = 1$ e incorpórelo al gráf co.

15. Dibuje la curva $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2\rangle$ junto con su vector tangente en $t = 1$. Después haga lo mismo con $\mathbf{r}_2(t) = \langle t^3, t^6\rangle$.

16. Dibuje la cicloide $\mathbf{r}(t) = \langle t - \text{sen}\,t, 1 - \cos t\rangle$ junto con sus vectores tangentes en $t = \frac{\pi}{3}$ y $\frac{3\pi}{4}$.

En los problemas 17-20, evalúe utilizando la regla del producto apropiada, siendo:

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \langle t^2, t^3, t\rangle \qquad \boldsymbol{r}_2(t) = \langle e^{3t}, e^{2t}, e^t\rangle$$

17. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t))$

18. $\dfrac{d}{dt}(t^4\mathbf{r}_1(t))$

19. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t))$

20. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}_1(t))\Big|_{t=2}$, suponiendo que:

$$\mathbf{r}(2) = \langle 2, 1, 0\rangle \qquad \mathbf{r}'(2) = \langle 1, 4, 3\rangle$$

En los problemas 21 y 22, sean:

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \langle t^2, 1, 2t\rangle \qquad \boldsymbol{r}_2(t) = \langle 1, 2, e^t\rangle$$

21. Calcule $\dfrac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)\Big|_{t=1}$ de dos maneras:

(a) Calcule $\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$ y derive.

(b) Use la regla del producto.

22. Calcule $\dfrac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)\Big|_{t=1}$ de dos maneras:

(a) Calcule $\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)$ y derive.

(b) Use la regla del producto.

En los problemas 23-26, evalúe $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}(g(t))$ *usando la regla de la cadena.*

23. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1 - t\rangle$, $g(t) = e^t$

24. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3\rangle$, $g(t) = \text{sen}\,t$

25. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t}, 4\rangle$, $g(t) = 4t + 9$

26. $\mathbf{r}(t) = \langle 4\,\text{sen}\,2t, 6\cos 2t\rangle$, $g(t) = t^2$

27. Sea $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1 - t, 4t\rangle$. Calcule la derivada de $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{a}(t)$ en $t = 2$, suponiendo que $\mathbf{a}(2) = \langle 1, 3, 3\rangle$ y $\mathbf{a}'(2) = \langle -1, 4, 1\rangle$.

28. Sea $\mathbf{v}(s) = s^2\mathbf{i} + 2s\mathbf{j} + 9s^{-2}\mathbf{k}$. Evalúe $\dfrac{d}{ds}\mathbf{v}(g(s))$ en $s = 4$, suponiendo que $g(4) = 3$ y $g'(4) = -9$.

En los problemas 29-34, halle una parametrización de la recta tangente en el punto que se indica.

29. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^4\rangle$, $t = -2$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 2t, \text{sen}\,3t\rangle$, $t = \frac{\pi}{4}$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 - t^2, 5t, 2t^3\rangle$, $t = 2$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, 5t, 9t\rangle$, $t = -4$

33. $\mathbf{r}(s) = 4s^{-1}\mathbf{i} - \frac{8}{3}s^{-3}\mathbf{k}$, $s = 2$

34. $\mathbf{r}(s) = (\ln s)\mathbf{i} + s^{-1}\mathbf{j} + 9s\mathbf{k}$, $s = 1$

35. Use el ejemplo 4 para calcular $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{r}')$, donde $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, e^t\rangle$.

36. Sea $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 5\,\text{sen}\,t, 4\cos t\rangle$. Pruebe que $\|\mathbf{r}(t)\|$ es constante y deduzca, usando el ejemplo 7, que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ son ortogonales. A continuación, calcule $\mathbf{r}'(t)$ y compruebe directamente que $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

37. Pruebe que la *derivada de la norma* no es igual a la *norma de la derivada* comprobando que $\|\mathbf{r}(t)\|' \ne \|\mathbf{r}(t)'\|$ para $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 1\rangle$.

38. Pruebe que $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \mathbf{a}\times\mathbf{r}'$ para cualquier vector constante $\mathbf{a}$.

En los problemas 39-46, evalúe las integrales.

39. $\displaystyle\int_{-1}^{3}\langle 8t^2 - t, 6t^3 + t\rangle\,dt$

40. $\displaystyle\int_0^1\left\langle\frac{1}{1+s^2}, \frac{s}{1+s^2}\right\rangle ds$

41. $\displaystyle\int_{-2}^{2}(u^3\mathbf{i} + u^5\mathbf{j})\,du$

42. $\displaystyle\int_0^1\left(te^{-t^2}\mathbf{i} + t\ln(t^2+1)\mathbf{j}\right)dt$

43. $\displaystyle\int_0^1\langle 2t, 4t, -\cos 3t\rangle\,dt$

44. $\displaystyle\int_{1/2}^{1}\left\langle\frac{1}{u^2}, \frac{1}{u^4}, \frac{1}{u^5}\right\rangle du$

45. $\displaystyle\int_1^4(t^{-1}\mathbf{i} + 4\sqrt{t}\,\mathbf{j} - 8t^{3/2}\mathbf{k})\,dt$

46. $\displaystyle\int_0^t(3s\mathbf{i} + 6s^2\mathbf{j} + 9\mathbf{k})\,ds$

En los problemas 47-54, halle la solución general de la ecuación y también la solución particular que cumple la condición inicial dada.

47. $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \langle 1 - 2t, 4t\rangle$, $\mathbf{r}(0) = \langle 3, 1\rangle$

48. $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

49. $\mathbf{r}'(t) = t^2\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

50. $\mathbf{r}'(t) = \langle \text{sen}\,3t, \text{sen}\,3t, t\rangle$, $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2}) = \left\langle 2, 4, \dfrac{\pi^2}{4}\right\rangle$

51. $\mathbf{r}''(t) = 16\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{r}'(0) = \langle 0, 1, 0\rangle$

52. $\mathbf{r}''(t) = \left\langle e^{2t-2}, t^2 - 1, 1\right\rangle$, $\mathbf{r}(1) = \langle 0, 0, 1\rangle$, $\mathbf{r}'(1) = \langle 2, 0, 0\rangle$

53. $\mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 0\rangle$, $\mathbf{r}(3) = \langle 1, 1, 0\rangle$, $\mathbf{r}'(3) = \langle 0, 0, 1\rangle$

54. $\mathbf{r}''(t) = \left\langle e^t, \text{sen}\,t, \cos t\right\rangle$, $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{r}'(0) = \langle 0, 2, 2\rangle$

55. Halle la situación en $t = 3$ de una partícula cuya trayectoria (f gura 8) cumple:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\langle 2t - \frac{1}{(t+1)^2}, 2t - 4\right\rangle, \qquad \mathbf{r}(0) = \langle 3, 8\rangle$$

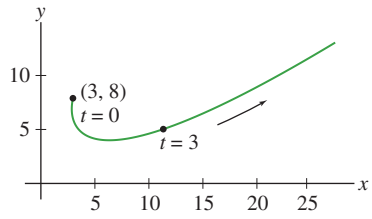


FIGURA 8 Trayectoria de la partícula.

56. Halle la situación y la velocidad en $t = 4$ de una partícula cuya trayectoria cumple:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\langle 2t^{-1/2}, 6, 8t \right\rangle, \qquad \mathbf{r}(1) = \langle 4, 9, 2 \rangle$$

57. Un avión de combate, que puede disparar un rayo láser hacia adelante, tiene trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle 5-t, 21-t^2, 3-t^3/27 \rangle$. Pruebe que existe justamente un instante t en que el piloto puede alcanzar un objetivo situado en el origen.

58. El avión de combate del problema 57 se desplaza según la trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle t-t^3, 12-t^2, 3-t \rangle$. Pruebe que el piloto no puede alcanzar a ningún objetivo que se sitúe sobre el eje x.

59. Halle todas las soluciones de $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}$ con la condición inicial $\mathbf{r}(1) = \mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores constantes de $\mathbb{R}^3$.

60. Sea $\mathbf{u}$ un vector constante de $\mathbb{R}^3$. Halle la solución de la ecuación $\mathbf{r}'(t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{u}$ que cumple $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$.

61. Halle todas las soluciones de $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}(t)$ donde $\mathbf{r}(t)$ sea una función vectorial en el espacio tridimensional.

62. Pruebe que $\mathbf{w}(t) = \langle \operatorname{sen}(3t+4), \operatorname{sen}(3t-2), \cos 3t \rangle$ cumple la ecuación diferencial $\mathbf{w}''(t) = -9\mathbf{w}(t)$.

63. Demuestre que la **espiral de Bernoulli** (f gura 9) de parametrización $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos 4t, e^t \operatorname{sen} 4t \rangle$ tiene la propiedad de que el ángulo ψ entre el vector de posición y el vector tangente es constante. Halle el ángulo ψ en grados.

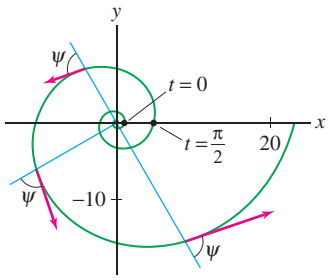


FIGURA 9 Espiral de Bernoulli.

64. Una curva en la forma polar $r = f(\theta)$ tiene parametrización:

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta)\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$$

Sea ψ el ángulo entre el vector radial y el vector tangente (f gura 10). Demuestre que:

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$$

Indicación: Calcule $\mathbf{r}(\theta) \times \mathbf{r}'(\theta)$ y $\mathbf{r}(\theta) \cdot \mathbf{r}'(\theta)$.

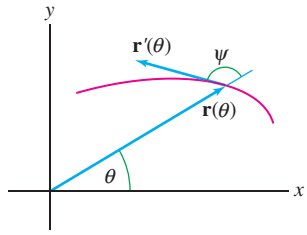


FIGURA 10 Curva de parametrización polar

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta)\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle.$$

65. Demuestre que si $\|\mathbf{r}(t)\|$ alcanza un máximo o un mínimo local en t_0, entonces $\mathbf{r}(t_0)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Explique de qué manera este resultado está relacionado con la f gura 11. *Indicación:* Observe que si $\|\mathbf{r}(t_0)\|$ es un mínimo, entonces $\mathbf{r}(t)$ es tangente en t_0 a la esfera de radio $\|\mathbf{r}(t_0)\|$ centrada en el origen.

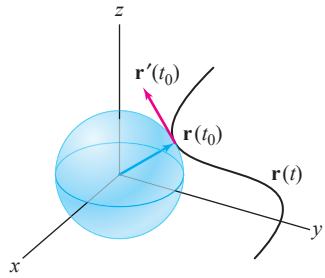


FIGURA 11

66. La segunda ley del movimiento de Newton en su formulación vectorial establece que $\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$ donde $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre un objeto de masa m y $\mathbf{p} = m\mathbf{r}'(t)$ es el momento del objeto. Los análogos de la fuerza y del momento para el movimiento rotacional son la **torsión** $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ y el **momento angular**:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$$

Use la segunda ley para demostrar que $\tau = \dfrac{d\mathbf{J}}{dt}$.

Problemas avanzados

67. Suponga que $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ describe una curva plana $\mathcal{C}$. Suponga además que $x'(t_0) \neq 0$. Pruebe que la pendiente del vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ es igual a la pendiente dy/dx de la curva en $\mathbf{r}(t_0)$.

68. Demuestre que $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''')$.

69. Compruebe las reglas de la suma y del producto para derivadas de funciones vectoriales.

70. Compruebe la regla de la cadena para funciones vectoriales.

71. Compruebe la regla del producto para productos vectoriales [ec. (5)].

72. Compruebe las propiedades de linealidad:

$$\int c\mathbf{r}(t)\,dt = c\int \mathbf{r}(t)\,dt \qquad (c \text{ constante cualquiera})$$

$$\int (\mathbf{r}_1(t)+\mathbf{r}_2(t))\,dt = \int \mathbf{r}_1(t)\,dt + \int \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

73. Demuestre la regla de sustitución (donde $g(t)$ es una función escalar derivable):

$$\int_a^b \mathbf{r}(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \mathbf{r}(u)\,du$$

74. Demuestre que si $\|\mathbf{r}(t)\| \le K$ para $t \in [a,b]$, entonces:

$$\left\| \int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \right\| \le K(b-a)$$

14.3 Longitud de arco y celeridad

En la sección 12.2, se obtuvo una fórmula para la longitud de arco de una curva en el plano dada en forma paramétrica. Este mismo tratamiento se puede aplicar sobre trayectorias en el espacio tridimensional, sólo con pequeños cambios.

Recuerde que la longitud de arco se def ne como el límite de las aproximaciones poligonales. Para obtener una aproximación poligonal a una trayectoria

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle, \qquad a \le t \le b$$

se elige una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$ y se unen los puntos terminales de los vectores $\mathbf{r}(t_j)$ mediante segmentos, como en la f gura 1. De igual manera a cómo ocurrió en la sección 12.2, se obtiene que si $\mathbf{r}'(t)$ existe y es continua en $[a,b]$, entonces las longitudes de las aproximaciones poligonales tienden a un límite L cuando el máximo de las amplitudes $|t_j - t_{j-1}|$ tiende a cero. Este límite es la longitud s de la trayectoria, el cual se calcula como una integral en el siguiente teorema.

RECORDATORIO *Nos referiremos a la longitud de una trayectoria o una curva como a la* longitud de arco.

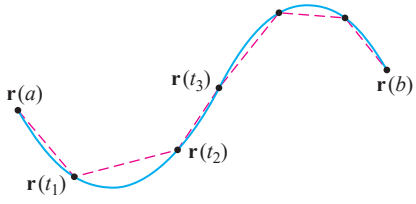


FIGURA 1 Aproximaciones poligonales al arco $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$.

Recuerde que la longitud s en la ec. (1) es la distancia recorrida por la partícula siguiendo la trayectoria $\mathbf{r}(t)$. La longitud de la trayectoria s no es igual a la longitud de la curva subyacente salvo en la situación en que $\mathbf{r}(t)$ recorra la curva sólo una vez sin cambiar de sentido.

TEOREMA 1 Longitud de una trayectoria Suponga que $\mathbf{r}(t)$ es derivable y que $\mathbf{r}'(t)$ es continua en $[a,b]$. Entonces la longitud s de la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$ es igual a:

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt \qquad \boxed{1}$$

EJEMPLO 1 Halle la longitud s de $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 3t, \operatorname{sen} 3t, 3t\rangle$ para $0 \le t \le 2\pi$.

Solución La derivada es $\mathbf{r}'(t) = \langle -3\operatorname{sen} 3t, 3\cos 3t, 3\rangle$ y por tanto:

$$\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = 9\operatorname{sen}^2 3t + 9\cos^2 3t + 9 = 9(\operatorname{sen}^2 3t + \cos^2 3t) + 9 = 18$$

Por consiguiente: $s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{18}\,dt = 6\sqrt{2}\pi.$ ■

La celeridad es, por def nición, la tasa de variación de la distancia recorrida respecto al tiempo t. Para calcular la celeridad, se def ne la **función longitud de arco**:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$$

Por tanto $s(t)$ es la distancia recorrida en el intervalo $[a,t]$. Por el teorema fundamental del cálculo:

$$\text{Celeridad en el instante } t = \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

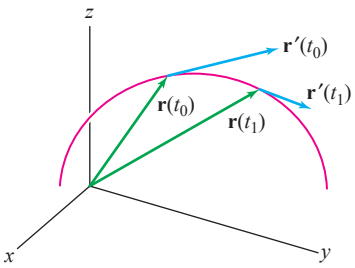


FIGURA 2 El vector velocidad es mayor en t_0 que en t_1, indicando que la partícula se mueve más rápido en t_0.

Ahora se puede ver por qué $\mathbf{r}'(t)$ se conoce como el vector velocidad (y también como el vector tangente). Apunta en la dirección del movimiento y su norma es la celeridad (f gura 2). A menudo se denota el vector velocidad como $\mathbf{v}(t)$ y la celeridad como $v(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t), \qquad v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$$

EJEMPLO 2 Halle la celeridad en $t = 2$ s de una partícula cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

Solución El vector velocidad es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y en $t = 2$:

$$\mathbf{v}(2) = 12\mathbf{i} - e^2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

La celeridad de la partícula es $v(2) = \|\mathbf{v}(2)\| = \sqrt{12^2 + (-e^2)^2 + 4^2} \approx 14{,}65$ m/s. ■

Parametrización por la longitud de arco

Recuerde que una parametrización $\mathbf{r}(t)$ describe no sólo una curva sino la manera en que una partícula se mueve por la curva, posiblemente acelerando, decelerando o cambiando de sentido a lo largo de su recorrido. Un cambio de la parametrización describe una manera diferente de recorrer la misma curva subyacente.

Se ha visto que las parametrizaciones no son únicas. Por ejemplo, tanto $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2 \rangle$ como $\mathbf{r}_2(s) = \langle s^3, s^6 \rangle$ parametrizan la parábola $y = x^2$. Observe, en este caso, que $\mathbf{r}_2(s)$ se obtiene sustituyendo $t = s^3$ en $\mathbf{r}_1(t)$.

En general, se obtiene una nueva parametrización sustituyendo $t = g(s)$, es decir reemplazando $\mathbf{r}(t)$ por $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s))$ [f gura 3]. Si $t = g(s)$ aumenta de a a b cuando s pasa de c a d, entonces la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$ también se parametriza por $\mathbf{r}_1(s)$ para $c \le s \le d$.

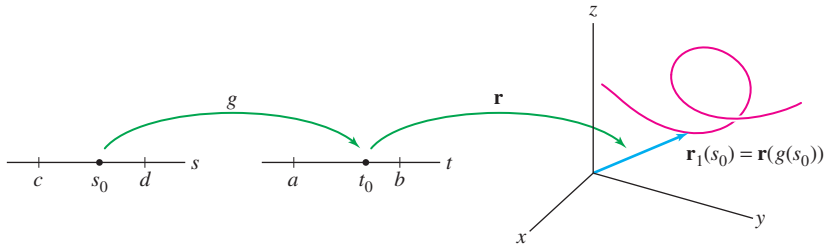


FIGURA 3 La trayectoria se parametriza por $\mathbf{r}(t)$ y por $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s))$.

EJEMPLO 3 Parametrice la trayectoria $\mathbf{r}(t) = (t^2, \operatorname{sen} t, t)$ para $3 \le t \le 9$ usando el parámetro s, donde $t = g(s) = e^s$.

Solución Sustituyendo $t = e^s$ en $\mathbf{r}(t)$, se obtiene la parametrización:

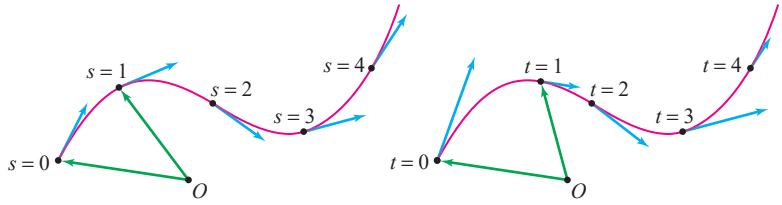
$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s)) = \langle e^{2s}, \operatorname{sen} e^s, e^s \rangle$$

Como $s = \ln t$, cuando el parámetro t pasa de 3 a 9, s pasa de $\ln 3$ a $\ln 9$. Por tanto, la trayectoria se parametriza mediante $\mathbf{r}_1(s)$ para $\ln 3 \le s \le \ln 9$. ■

Una manera de parametrizar una trayectoria es seleccionar un punto inicial y "caminar a lo largo de la trayectoria" a celeridad unitaria (digamos, 1 m/s). Una parametrización de este tipo se denomina una **parametrización por la longitud de arco** [f gura 4(A)]. Queda def nida por la propiedad de que la celeridad es constante e igual a 1:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = 1 \qquad \text{para todo } t$$

En una parametrización por la longitud de arco, la distancia recorrida sobre cualquier intervalo $[a, b]$ es igual a la longitud del intervalo:



(A) Una parametrización por la longitud de arco: todos los vectores tangentes son de longitud 1, con lo que la celeridad es 1.

(B) Una parametrización que no sea por la longitud de arco: las longitudes de los vectores tangentes varían, por lo que la celeridad variará.

FIGURA 4

Se utilizarán las parametrizaciones por la longitud de arco para definir la curvatura en la sección 14.4.

$$\text{Distancia recorrida a lo largo de } [a, b] = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \int_a^b 1\, dt = b - a$$

Para hallar una parametrización por la longitud de arco, empiece con cualquier parametrización $\mathbf{r}(t)$ tal que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t y obtenga la integral de la longitud de arco:

Se suele utilizar la letra s como el parámetro en una parametrización por la longitud de arco.

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\, du$$

Como $\|\mathbf{r}'(t)\| \neq 0$, $s(t)$ es una función estrictamente creciente y, en consecuencia, admite una inversa $t = g(s)$. Por la fórmula de la derivada de una inversa (y como $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$):

RECORDATORIO Según el teorema 2 de la sección 7.2, si $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, entonces:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$g'(s) = \frac{1}{s'(g(s))} = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(g(s))\|}$$

Ahora se puede demostrar que la parametrización:

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s))$$

es una parametrización por la longitud de arco. De hecho, por la regla de la cadena:

$$\|\mathbf{r}_1'(s)\| = \|\mathbf{r}'(g(s))g'(s)\| = \|\mathbf{r}'(g(s))\| \frac{1}{\|\mathbf{r}'(g(s))\|} = 1$$

En muchos casos no se puede evaluar la integral de la longitud de arco $s(t)$ explícitamente y no se puede hallar una expresión para su inversa $g(s)$ tampoco. Por eso, aunque las parametrizaciones por la longitud de arco existan, en general, sólo se pueden determinar en algunos casos particulares.

EJEMPLO 4 Parametrización por la longitud de arco Halle la parametrización por la longitud de arco de la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 4t, \operatorname{sen} 4t, 3t \rangle$.

Solución En primer lugar, evalúe la función longitud de arco:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\langle -4 \operatorname{sen} 4t, 4 \cos t, 3 \rangle\| = \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 4t + 16 \cos^2 4t + 3^2} = 5$$

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \int_0^t 5\, dt = 5t$$

Ahora observe que la inversa de $s(t) = 5t$ es $t = s/5$; es decir, $g(s) = s/5$. Tal y como se probó anteriormente, una parametrización por la longitud de arco es:

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s)) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{5}\right) = \left\langle \cos \frac{4s}{5}, \operatorname{sen} \frac{4s}{5}, \frac{3s}{5} \right\rangle$$

Como comprobación, constate que $\mathbf{r}_1(s)$ tiene celeridad unitaria:

$$\|\mathbf{r}_1'(s)\| = \left\|\left\langle -\frac{4}{5}\operatorname{sen}\frac{4s}{5}, \frac{4}{5}\cos\frac{4s}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle\right\| = \sqrt{\frac{16}{25}\operatorname{sen}^2\frac{4s}{5} + \frac{16}{25}\cos^2\frac{4s}{5} + \frac{9}{25}} = 1$$

14.3 RESUMEN

- La longitud s de una trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ para $a \le t \le b$ es:

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

- Función longitud de arco: $s(t) = \displaystyle\int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$
- La celeridad es la derivada respecto al tiempo de la distancia recorrida:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

- El vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ apunta en la dirección del movimiento [siempre que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$] y su norma $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ es la celeridad del objeto.
- Se dice que $\mathbf{r}(s)$ es una *parametrización por la longitud de arco* si $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$ para todo s. En tal caso, la longitud de la trayectoria para $a \le s \le b$ es $b - a$.
- Si $\mathbf{r}(t)$ es cualquier parametrización tal que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t, entonces:

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s))$$

es una parametrización por la longitud de arco, donde $t = g(s)$ es la inversa de la función longitud de arco.

14.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. En un cierto instante, uno de los coches de una montaña rusa tiene vector velocidad $\mathbf{r}' = \langle 25, -35, 10\rangle$ (en millas por hora). ¿Cuál sería el vector velocidad si se doblara la celeridad? ¿Cuál sería si el sentido se invirtiera, pero su celeridad continuara inalterada?

2. Dos coches van a la misma velocidad sobre la misma montaña rusa (en diferentes instantes). ¿Cuál o cuáles de las siguientes af rmaciones sobre sus vectores velocidad en un cierto punto P de la montaña rusa es/son ciertas?

(a) Los vectores velocidad son idénticos.

(b) Los vectores velocidad apuntan en la misma dirección pero pueden tener diferentes longitudes.

(c) Los vectores velocidad pueden apuntar en sentidos opuestos.

3. Un mosquito vuela describiendo una parábola con celeridad $v(t) = t^2$. Sea $L(t)$ la distancia total recorrida hasta el instante t.

(a) ¿Con qué rapidez está cambiando $L(t)$ en $t = 2$?

(b) ¿Es $L(t)$ igual a la distancia del mosquito desde el origen?

4. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria descrita por $\mathbf{r}(t)$ para $4 \le t \le 10$ si $\mathbf{r}(t)$ es una parametrización por la longitud de arco?

Problemas

En los problemas 1-6, calcule la longitud de la curva sobre el intervalo dado

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 3t, 4t - 3, 6t + 1\rangle, \quad 0 \le t \le 3$

2. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{k}, \quad 11 \le t \le 15$

3. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, \ln t, t^2\rangle, \quad 1 \le t \le 4$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^2 + 1, 2t^2 - 1, t^3\rangle, \quad 0 \le t \le 2$

5. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\operatorname{sen} t, 3t\rangle, \quad 0 \le t \le 2\pi$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (t^2 - 3)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$. Use la fórmula:

$$\int \sqrt{t^2 + a^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2})$$

En los problemas 7 y 8, calcule la función longitud de arco $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$ *para el valor de a que se indica.*

7. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t^2, t^3\rangle, \quad a = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t^{1/2}, \ln t, 2t\rangle, \quad a = 1$

En los problemas 9-12, halle la celeridad en el valor de t que se indica.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t + 3, 4t - 3, 5 - t\rangle, \quad t = 4$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{t-3}, 12, 3t^{-1}\rangle, \quad t = 3$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} 3t, \cos 4t, \cos 5t\rangle, \quad t = \frac{\pi}{2}$

12. $\mathbf{r}(t) = \langle \cosh t, \operatorname{senh} t, t\rangle, \quad t = 0$

13. ¿Cuál es el vector velocidad de una partícula que se desplaza hacia la derecha por la hipérbola $y = x^{-1}$ con velocidad constante e igual a 5 cm/s cuando la situación de la partícula es $(2, \frac{1}{2})$?

14. Una abeja con vector velocidad $\mathbf{r}'(t)$ empieza a volar desde el origen en $t = 0$ y vuela alrededor de éste durante T segundos. ¿Dónde está situada la abeja en el instante T si $\int_0^T \mathbf{r}'(u)\,du = \mathbf{0}$? ¿Qué representa la cantidad $\int_0^T \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$?

15. Sea:

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle R\cos\left(\frac{2\pi Nt}{h}\right), R\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi Nt}{h}\right), t\right\rangle, \qquad 0 \le t \le h$$

(a) Pruebe que $\mathbf{r}(t)$ parametriza una hélice de radio R y altura h realizando N vueltas completas.

(b) Establezca cuál de los dos muelles de la figura 5 utiliza más alambre.

(c) Calcule las longitudes de los dos muelles y compare.

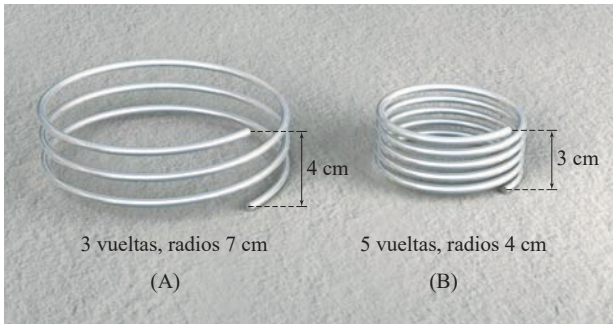


FIGURA 5 ¿En qué muelle hay más alambre?

16. Use el problema 15 para hallar una fórmula general para la longitud de una hélice de radio R y altura h que realice N vueltas completas.

17. La cicloide generada por la circunferencia unidad tiene parametrización:

$$\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t\rangle$$

(a) Halle el valor de t en $[0, 2\pi]$ en que la celeridad es máxima.

(b) Pruebe que un arco de la cicloide tiene longitud 8. Recuerde la identidad $\operatorname{sen}^2(t/2) = (1 - \cos t)/2$.

18. ¿Cuál de las siguientes es una parametrización por la longitud de arco de la circunferencia de radio 4 centrada en el origen?

(a) $\mathbf{r}_1(t) = \langle 4\operatorname{sen} t, 4\cos t\rangle$

(b) $\mathbf{r}_2(t) = \langle 4\operatorname{sen} 4t, 4\cos 4t\rangle$

(c) $\mathbf{r}_3(t) = \left\langle 4\operatorname{sen}\frac{t}{4}, 4\cos\frac{t}{4}\right\rangle$

19. Sea $\mathbf{r}(t) = \langle 3t + 1, 4t - 5, 2t\rangle$.

(a) Evalúe la integral de la longitud de arco $s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$.

(b) Halle la inversa $g(s)$ de $s(t)$.

(c) Compruebe que $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s))$ es una parametrización por la longitud de arco.

20. Halle una parametrización por la longitud de arco de $y = 4x + 9$.

21. Sea $\mathbf{r}(t) = \mathbf{w} + t\mathbf{v}$ la parametrización de una recta.

(a) Pruebe que la función longitud de arco $s(t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$ viene dada por $s(t) = t\|\mathbf{v}\|$. Esto prueba que $\mathbf{r}(t)$ es una parametrización por la longitud de arco si y sólo si $\mathbf{v}$ es un vector unitario.

(b) Halle una parametrización por la longitud de arco de la recta con $\mathbf{w} = \langle 1, 2, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 4, 5\rangle$.

22. Halle una parametrización por la longitud de arco de la circunferencia, en el plano $z = 9$, de radio 4 y centro $(1, 4, 9)$.

23. Halle una trayectoria que describa la circunferencia de radio 4 y centro $(2, 10, -3)$ en el plano $y = 10$ cuya velocidad sea constante e igual a 8.

24. Halle una parametrización por la longitud de arco de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t, e^t\rangle$.

25. Halle una parametrización por la longitud de arco de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3\rangle$.

26. Halle una parametrización por la longitud de arco de la cicloide con parametrización $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t\rangle$.

27. Halle una parametrización por la longitud de arco de la recta $y = mx$ para una pendiente arbitraria m.

28. Exprese la longitud de arco L de $y = x^3$ para $0 \le x \le 8$ como una integral, de dos maneras: usando la parametrización $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^3\rangle$ y la parametrización $\mathbf{r}_2(t) = \langle t^3, t^9\rangle$. No evalúe las integrales pero utilice sustitución para demostrar que conducen al mismo resultado.

29. La curva conocida como la **espiral de Bernoulli** (figura 6) tiene parametrización $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos 4t, e^t \operatorname{sen} 4t\rangle$.

(a) Evalúe $s(t) = \int_{-\infty}^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$. Es conveniente considerar como límite inferior $-\infty$, pues $\mathbf{r}(-\infty) = \langle 0, 0\rangle$.

(b) Use (a) para hallar la parametrización por la longitud de arco de $\mathbf{r}(t)$.

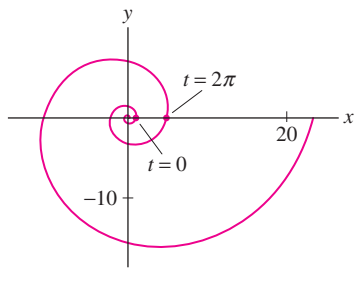


FIGURA 6 Espiral de Bernoulli.

Problemas avanzados

30. Demuestre que cuando se calcula la longitud de una curva como la integral de la longitud de arco, el resultado no depende de la parametrización escogida. De forma más precisa, sea C la curva descrita por $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$. Sea $f(s)$ una función derivable tal que $f'(s) > 0$ y de manera que $f(c) = a$ y $f(d) = b$. Entonces $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(f(s))$ parametriza C para $c \le s \le d$. Compruebe que:

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_c^d \|\mathbf{r}_1'(s)\|\,ds$$

31. La circunferencia unitaria sin el punto $(-1, 0)$ tiene parametrización dada por (vea el problema 73 de la sección 12.1):

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right\rangle, \qquad -\infty < t < +\infty$$

Use esta parametrización para calcular la longitud de la circunferencia unitaria como una integral impropia. *Indicación:* la expresión para $\|\mathbf{r}'(t)\|$ se simplifica.

32. La involuta de una circunferencia, trazada por un punto en el extremo de un hilo que ha sido desenrollado de una bobina circular de radio R, tiene parametrización (vea el problema 26 de la sección 13.2):

$$\mathbf{r}(\theta) = \langle R(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta), R(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)\rangle$$

Halle la parametrización por la longitud de arco de la involuta.

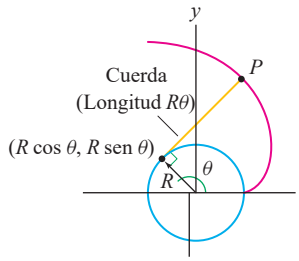


FIGURA 7 La involuta de una circunferencia.

33. La curva $\mathbf{r}(t) = \langle t - \tanh t, \operatorname{sech} t\rangle$ se denomina una **tractriz** (vea el problema 92 de la sección 12.1).

(a) Pruebe que $s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$ es igual a $s(t) = \ln(\cosh t)$.

(b) Pruebe que $t = g(s) = \ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1})$ es una inversa de $s(t)$ y compruebe que:

$$\mathbf{r}_1(s) = \left\langle \tanh^{-1}\left(\sqrt{1 - e^{-2s}}\right) - \sqrt{1 - e^{-2s}}, e^{-s} \right\rangle$$

es una parametrización, por la longitud de arco, de la tractriz.

14.4 Curvatura

FIGURA 1 La curvatura es un elemento clave en el diseño de las montañas rusas.

FIGURA 2 Los bioquímicos estudian el efecto de la curvatura de las cadenas de ADN sobre los procesos biológicos.

La curvatura es una medida de cuánto se dobla una curva. Se utiliza para estudiar las propiedades geométricas de las curvas y del movimiento a lo largo de las curvas y tiene aplicaciones en diversas áreas como en el diseño de las montañas rusas (figura 1), óptica, cirugía oftalmológica (vea el problema 60) y bioquímica (figura 2).

En el capítulo 4, se utilizó la derivada segunda $f''(x)$ para medir la flexión o concavidad de la gráfica de $y = f(x)$, por lo que parece natural considerar $f''(x)$ como nuestra definición de curvatura. Sin embargo, hay dos razones por las que esta propuesta de definición no funciona. En primer lugar, $f''(x)$ sólo tiene sentido para una gráfica $y = f(x)$ en el plano y nuestro objetivo es definir la curvatura para curvas en el espacio tridimensional. Un problema más serio es que $f''(x)$ no captura realmente la curvatura intrínseca de una curva. Una circunferencia, por ejemplo, es simétrica por lo que su curvatura debería ser la misma en cualquier punto (figura 3). Pero la semicircunferencia superior es la gráfica de $f(x) = (1 - x^2)^{1/2}$ y su derivada segunda $f''(x) = -(1 - x^2)^{-3/2}$ no tiene el mismo valor en todo punto de la semicircunferencia. Se debe buscar una definición que sólo dependa de la curva y no de cómo está orientada respecto a los ejes.

Considere una trayectoria de parametrización $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Suponga que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t en el dominio de $\mathbf{r}(t)$. Una parametrización con esta propiedad se denomina **regular**. En todo punto P de la trayectoria existe un **vector tangente unitario** $\mathbf{T} = \mathbf{T}_P$ de la parametrización que apunta en la dirección y sentido del movimiento. Denote como $\mathbf{T}(t)$ el vector tangente unitario en el punto terminal de $\mathbf{r}(t)$:

$$\text{Vector tangente unitario} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$, entonces $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2\rangle$ y el vector tangente unitario en $P = (1, 1, 1)$, que es el punto terminal de $\mathbf{r}(1) = \langle 1, 1, 1\rangle$, será:

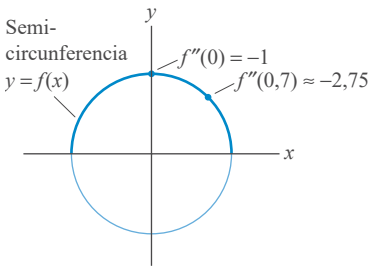


FIGURA 3 La derivada segunda de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ no recoge la curvatura de la circunferencia que, por simetría, debería ser la misma en todos sus puntos.

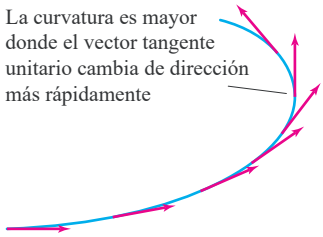


FIGURA 4 El vector tangente unitario cambia de dirección pero no de longitud.

$$\mathbf{T}_P = \frac{\langle 1,2,3\rangle}{\|\langle 1,2,3\rangle\|} = \frac{\langle 1,2,3\rangle}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle$$

Si se elige otra parametrización, digamos $\mathbf{r}_1(s)$, también se puede entender $\mathbf{T}$ como función de s: $\mathbf{T}(s)$ es el vector tangente unitario en el punto terminal de $\mathbf{r}_1(s)$.

Ahora imagínese caminando siguiendo una trayectoria y observando cómo el vector tangente $\mathbf{T}$ cambia de dirección (figura 4). Un cambio en $\mathbf{T}$ indica que la trayectoria se está doblando y conforme más rápido cambie $\mathbf{T}$, más rápido se dobla la trayectoria. Así, $\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\|$ parece ser una buena medida de curvatura. Sin embargo, $\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\|$ depende de lo rápido que usted camine (cuando camine más rápido, el vector tangente unitario cambia más rápido). Se supondrá así que usted camina a celeridad unitaria. En otras palabras, la curvatura es la magnitud $\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|$, donde s es el parámetro de una parametrización por la longitud de arco. Recuerde que $\mathbf{r}(s)$ es una parametrización por la longitud de arco si $\|\mathbf{r}(s)\| = 1$ para todo s.

DEFINICIÓN Curvatura Sea $\mathbf{r}(s)$ una parametrización por la longitud de arco y $\mathbf{T}$ el vector tangente unitario. La **curvatura** en $\mathbf{r}(s)$ es la cantidad (que se denota por la letra minúscula griega "kappa"):

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| \qquad 1$$

Los dos primeros ejemplos ilustran la curvatura en el caso de las rectas y de las circunferencias.

EJEMPLO 1 La curvatura de una recta es cero Calcule la curvatura en todo punto de la recta $\mathbf{r}(t) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\mathbf{u}$, donde $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Solución En primer lugar, observe que por ser $\mathbf{u}$ un vector unitario, $\mathbf{r}(t)$ es una parametrización por la longitud de arco. De hecho, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{u}$ y por tanto $\|\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{u}\| = 1$. De esta manera se tiene $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\| = \mathbf{r}'(t)$ y, en consecuencia, $\mathbf{T}'(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$ (pues $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{u}$ es constante). Como se esperaba, la curvatura es cero en todos los puntos de una recta:

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| = \|\mathbf{r}''(t)\| = 0$$

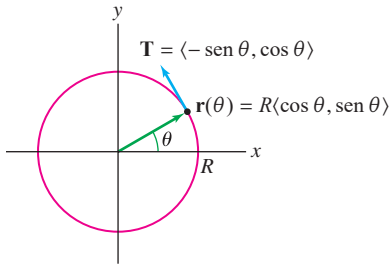


FIGURA 5 El vector tangente unitario sobre una circunferencia de radio R.

En el ejemplo 2 se muestra que una circunferencia de radio R muy grande tiene una curvatura muy pequeña e igual a $1/R$. Esto tiene sentido pues al moverse por una circunferencia cuyo radio es muy grande, su dirección de movimiento cambia muy despacio.

EJEMPLO 2 La curvatura de una circunferencia de radio R es $1/R$ Calcule la curvatura de una circunferencia de radio R.

Solución Suponga que la circunferencia está centrada en el origen, de manera que tiene parametrización dada por $\mathbf{r}(\theta) = \langle R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta\rangle$ (figura 5). No se trata de una parametrización por la longitud de arco si $R \neq 1$. Para hallar una parametrización por la longitud de arco, calcule la función longitud de arco:

$$s(\theta) = \int_0^\theta \|\mathbf{r}'(u)\|\, du = \int_0^\theta R\, du = R\theta$$

Así $s = R\theta$ y la inversa de la función longitud de arco es $\theta = g(s) = s/R$. En la sección 14.3, se probó que $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s))$ es una parametrización por la longitud de arco. En nuestro caso, se obtiene:

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(g(s)) = \mathbf{r}\left(\frac{s}{R}\right) = \left\langle R\cos\frac{s}{R}, R\operatorname{sen}\frac{s}{R}\right\rangle$$

El vector tangente unitario y su derivada son:

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds} = \frac{d}{ds}\left\langle R\cos\frac{s}{R}, R\,\text{sen}\,\frac{s}{R}\right\rangle = \left\langle -\,\text{sen}\,\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right\rangle$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\frac{1}{R}\left\langle \cos\frac{s}{R}, \text{sen}\,\frac{s}{R}\right\rangle$$

Por la definición de curvatura:

$$\kappa(s) = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\| = \frac{1}{R}\left\|\left\langle \cos\frac{s}{R}, \text{sen}\,\frac{s}{R}\right\rangle\right\| = \frac{1}{R}$$

Así queda demostrado que la curvatura es $1/R$ en todos los puntos de la circunferencia. ■

En la práctica suele ser imposible hallar la parametrización por la longitud de arco de forma explícita. Afortunadamente, se puede calcular la curvatura utilizando cualquier otra parametrización $\mathbf{r}(t)$. Para obtener una fórmula, se necesitan los dos siguientes resultados.

En primer lugar, observe que $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$ son ortogonales (vea la nota al margen). En segundo lugar, s es una función $s(t)$ del tiempo t, por lo que las derivadas de $\mathbf{T}$ respecto a t y a s están relacionadas por la regla de la cadena. Denotando la derivada respecto a t con una prima, se tiene:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = v(t)\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

donde $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|$ es la celeridad de $\mathbf{r}(t)$. Como la curvatura es la magnitud $\left\|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|$, se obtiene:

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = v(t)\kappa(t) \qquad \boxed{2}$$

RECORDATORIO *Para demostrar que $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$ son ortogonales, observe que $\mathbf{T}(t)$ es un vector unitario, por lo que $\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 1$. Derive utilizando la regla del producto para el producto escalar:*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 2\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}'(t) = 0$$

Y queda probado que $\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}'(t) = 0$

TEOREMA 1 Fórmula para la curvatura Si $\mathbf{r}(t)$ es una parametrización regular, entonces la curvatura en $\mathbf{r}(t)$ será:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \qquad \boxed{3}$$

Para aplicar la ec. (3) a curvas planas, sustituya $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ por $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), 0\rangle$ y calcule el producto vectorial.

Demostración Como $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$, se tiene $\mathbf{r}'(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$. Por la regla del producto:

$$\mathbf{r}''(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

Ahora calcule el siguiente producto vectorial, utilizando que $\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}(t) = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = v(t)\mathbf{T}(t)\times(v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)) =$$

$$= v(t)^2\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t) \qquad \boxed{4}$$

Como $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$ son ortogonales,

$$\|\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\|\,\|\mathbf{T}'(t)\|\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \|\mathbf{T}'(t)\|$$

RECORDATORIO *Según el teorema 1 de la sección 13.4,*

$$\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\,\text{sen}\,\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

La ec. (4) da lugar a $\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\| = v(t)^2\|\mathbf{T}'(t)\|$. Usando la ec. (2), se obtiene:

$$\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\| = v(t)^2\|\mathbf{T}'(t)\| = v(t)^3\kappa(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|^3\kappa(t)$$

que da lugar a la fórmula del enunciado. ■

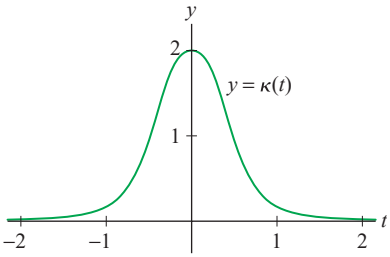


FIGURA 6 Gráf ca de la curvatura $\kappa(t)$ de la curva cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

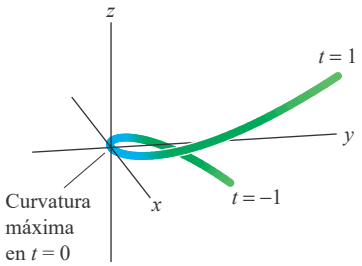


FIGURA 7 Gráf ca de la curva cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ coloreada según la curvatura.

EJEMPLO 3 Curva cúbica torcida SAC Calcule la curvatura $\kappa(t)$ de la cúbica torcida $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. A continuación, represente gráf camente $\kappa(t)$ y determine dónde la curvatura es mayor.

Solución Las derivadas son:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

La parametrización es regular pues $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t, por lo que se puede utilizar la ec. (3):

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

La gráf ca de $\kappa(t)$ en la f gura 6 muestra que la curvatura máxima se alcanza en $t = 0$. En la f gura 7 se ilustra la curva $\mathbf{r}(t)$. La representación se ha coloreado según la curvatura, donde el color azul representa mayor curvatura y el color verde menor. ■

En el segundo párrafo de esta sección, se comentó que la curvatura de una gráf ca $y = f(x)$ debe involucrar algo más que la derivada segunda $f''(x)$. A continuación se prueba que la curvatura se expresa en términos de $f''(x)$ y de $f'(x)$.

TEOREMA 2 Curvatura de una gráfica en el plano La curvatura en el punto $(x, f(x))$ de la gráf ca de $y = f(x)$ es igual a:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} \qquad \boxed{5}$$

Demostración La curva $y = f(x)$ tiene parametrización dada por $\mathbf{r}(x) = \langle x, f(x) \rangle$. Por tanto, $\mathbf{r}'(x) = \langle 1, f'(x) \rangle$ y $\mathbf{r}''(x) = \langle 0, f''(x) \rangle$. Para aplicar el teorema 1, se consideran $\mathbf{r}'(x)$ y $\mathbf{r}''(x)$ como vectores en $\mathbb{R}^3$ cuya componente z es igual a cero. Entonces:

$$\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\mathbf{k}$$

Como $\|\mathbf{r}'(x)\| = \big\|\langle 1, f'(x) \rangle\big\| = (1 + f'(x)^2)^{1/2}$, la ec. (3) da lugar a:

$$\kappa(x) = \frac{\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)\|}{\|\mathbf{r}'(x)\|^3} = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$ ■

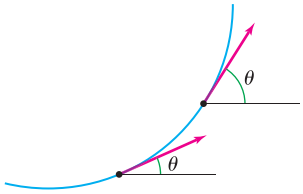


FIGURA 8 El ángulo θ cambia al doblarse la curva.

UN APUNTE CONCEPTUAL La curvatura para curvas planas tiene una interpretación geométrica en términos del ángulo de inclinación, que se def ne como el ángulo θ entre el vector tangente y la horizontal (f gura 8). El ángulo θ cambia cuando la curva se dobla, y se puede observar que la curvatura κ es la tasa de cambio de θ cuando se camina sobre la curva a celeridad unitaria (vea el problema 61).

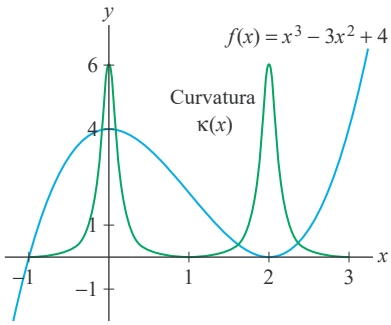


FIGURA 9 Gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ y la curvatura $\kappa(x)$.

EJEMPLO 4 Calcule la curvatura de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en $x = 0, 1, 2, 3$.

Solución Aplicando la ec. (5):

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \qquad f''(x) = 6x - 6$$

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} = \frac{|6x-6|}{(1 + 9x^2(x-2)^2)^{3/2}}$$

Se obtienen los siguientes valores:

$$\kappa(0) = \frac{6}{(1+0)^{3/2}} = 6 \quad \kappa(1) = \frac{0}{(1+9)^{3/2}} = 0$$

$$\kappa(2) = \frac{6}{(1+0)^{3/2}} = 6 \quad \kappa(3) = \frac{12}{82^{3/2}} \approx 0{,}016$$

La figura 9 muestra que la gráfica se dobla más en aquellos puntos donde la curvatura es mayor. ■

Vector normal unitario

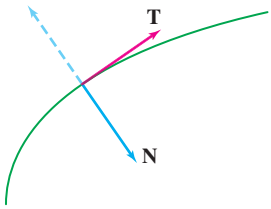


FIGURA 10 Para una curva plana, el vector normal unitario apunta en la dirección de flexión.

Se ha mencionado anteriormente que $\mathbf{T}'(t)$ y $\mathbf{T}(t)$ son ortogonales. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{T}'(t)$, suponiendo que éste es no nulo, se llama el **vector normal unitario** y se denota como $\mathbf{N}(t)$ o simplemente $\mathbf{N}$:

$$\text{Vector normal unitario} = \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \qquad \boxed{6}$$

Además, $\|\mathbf{T}'(t)\| = v(t)\kappa(t)$, según la ec. (2), y se tiene que:

$$\mathbf{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t) \qquad \boxed{7}$$

Intuitivamente, $\mathbf{N}$ apunta en la dirección hacia la que la curva se está doblando (vea la figura 11). Esto resulta particularmente claro para una curva plana. En este caso hay dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{T}$ (figura 10) y, de esos dos, $\mathbf{N}$ es el vector que apunta al "interior" de la curva.

EJEMPLO 5 Vector normal unitario a una hélice Halle el vector normal unitario en $t = \frac{\pi}{4}$ a la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle$.

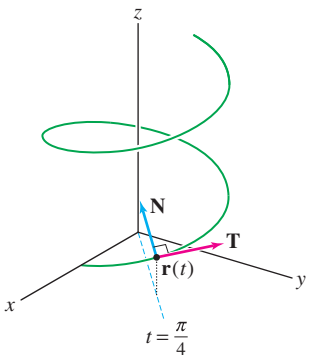


FIGURA 11 Vectores tangente y normal unitarios en $t = \frac{\pi}{4}$ sobre la hélice del ejemplo 5.

Solución La longitud del vector tangente $\mathbf{r}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle$ es $\sqrt{2}$, por lo que:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0 \rangle$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0 \rangle$$

Así, $\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\rangle$ (figura 11). ■

Se finaliza esta sección describiendo otra interpretación de la curvatura: en términos de la circunferencia osculatriz o la circunferencia "que mejor ajusta". Suponga que P es un punto sobre una curva plana $\mathcal{C}$ en que la curvatura κ_P es diferente de cero. La

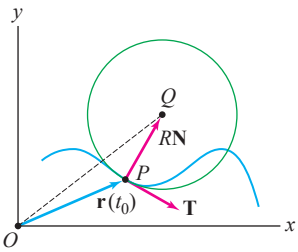


FIGURA 12 El centro Q de la circunferencia osculatriz en P se encuentra a distancia $R = \kappa_P^{-1}$ de P en la dirección normal.

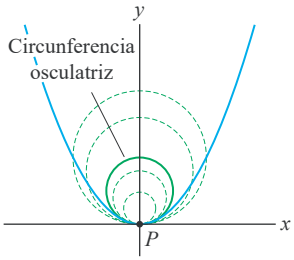


FIGURA 13 Entre todas las circunferencias tangentes a la curva en P, la circunferencia osculatriz es la que "mejor ajusta" a la curva.

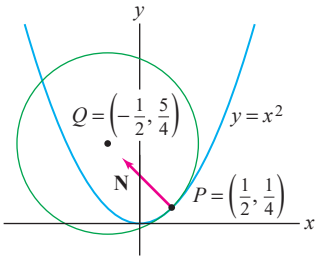


FIGURA 14 La circunferencia osculatriz a $y = x^2$ en $x = \frac{1}{2}$ tiene centro Q y radio $R = \sqrt{2}$.

Si una curva $\mathcal{C}$ se encuentra en un plano, entonces ese plano es el plano osculatriz. Para una curva genérica en el espacio tridimensional, el plano osculatriz varía de punto a punto.

circunferencia osculatriz, que se denota Osc_P, es la circunferencia de radio $R = 1/\kappa_P$ que pasa por P cuyo centro Q se encuentra en la dirección del vector unitario normal $\mathbf{N}$ (f gura 12). Dicho de otro modo, el centro Q queda determinado por:

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}(t_0) + \kappa_P^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{r}(t_0) + R\mathbf{N} \qquad \boxed{8}$$

Entre todas las circunferencias tangentes a $\mathcal{C}$ en P, Osc_P es la que proporciona un "mejor ajuste" a la curva (f gura 13; vea también el problema 71). Diremos que $R = 1/\kappa_P$ es el **radio de curvatura** en P. El centro Q de Osc_P se denomina en **centro de curvatura** en P.

EJEMPLO 6 Parametrice la circunferencia osculatriz a $y = x^2$ en $x = \frac{1}{2}$.

Solución Sea $f(x) = x^2$. Utilice la parametrización:

$$\mathbf{r}(x) = \langle x, f(x)\rangle = \langle x, x^2\rangle$$

y proceda siguiendo las siguientes etapas.

Etapa 1. **Halle el radio**

Aplique la ec. (5) a $f(x) = x^2$ para calcular la curvatura:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}, \qquad \kappa\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El radio de la circunferencia osculatriz es $R = 1/\kappa(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}$.

Etapa 2. **Halle N en $t = \frac{1}{2}$**

Para una curva plana, hay una manera sencilla de hallar $\mathbf{N}$ sin calcular $\mathbf{T}'$. El vector tangente es $\mathbf{r}'(x) = \langle 1, 2x\rangle$ y, dado que $\langle 2x, -1\rangle$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(x)$ (pues su producto escalar es cero), $\mathbf{N}(x)$ es el vector unitario en uno de los dos sentidos $\pm\langle 2x, -1\rangle$. La f gura 14 muestra que el vector unitario apunta en la dirección de las y positivas (la dirección de f exión). Por tanto:

$$\mathbf{N}(x) = \frac{\langle -2x, 1\rangle}{\|\langle -2x, 1\rangle\|} = \frac{\langle -2x, 1\rangle}{\sqrt{1 + 4x^2}}, \qquad \mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1, 1\rangle$$

Etapa 3. **Halle el centro Q**

Aplique la ec. (8) con $t_0 = \frac{1}{2}$:

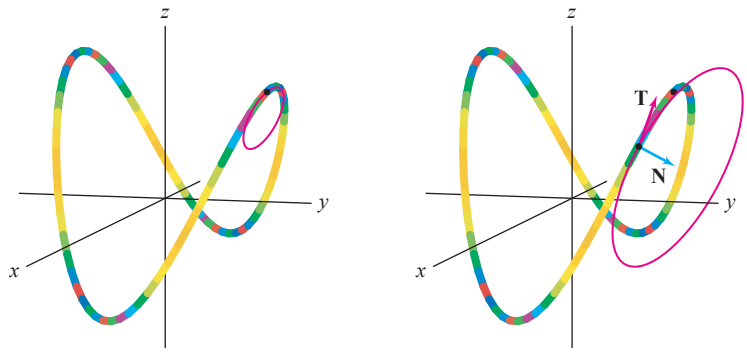
$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}\left(\frac{1}{2}\right) + \kappa\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\mathbf{N}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\rangle + \sqrt{2}\left(\frac{\langle -1, 1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\rangle$$

Etapa 4. **Parametrice la circunferencia osculatriz**

La circunferencia osculatriz tiene radio $R = \sqrt{2}$, por lo que tiene parametrización:

$$\mathbf{c}(t) = \underbrace{\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\rangle}_{\text{Centro}} + \sqrt{2}\,\langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle$$

Para def nir la circunferencia osculatriz en un punto P sobre una curva en el espacio $\mathcal{C}$, se debe especif car en primer lugar en qué plano se encuentra la circunferencia. El **plano osculatriz** es el plano que pasa por P determinado por el vector unitario tangente $\mathbf{T}_P$ y el vector unitario normal $\mathbf{N}_P$ en P (se supone que $\mathbf{T}' \neq 0$, por lo que $\mathbf{N}$ está def nido). Intuitivamente, el plano osculatriz es el plano que "prácticamente" contiene a la curva $\mathcal{C}$ cerca de P (vea la f gura 15). La circunferencia osculatriz es la circunferencia en el plano osculatriz que pasa por P de radio $R = 1/\kappa_P$ y cuyo centro se encuentra en la dirección normal N_P desde P. La ecuación (8) continúa siendo válida para curvas en el espacio.



(A) Circunferencia osculatriz en $t = \frac{\pi}{4}$
Curvatura es $\kappa = 4{,}12$

(B) Circunferencia osculatriz en $t = \frac{\pi}{8}$
Curvatura es $\kappa = 0{,}64$

FIGURA 15 Circunferencias osculatrices a $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t \rangle$.

14.4 RESUMEN

- Una parametrización $\mathbf{r}(t)$ se denomina *regular* si $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t. Si $\mathbf{r}(t)$ es regular, se def ne el *vector unitario tangente* como $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$.
- La *curvatura* se def ne como $\kappa(s) = \left\| \dfrac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|$, donde $\mathbf{r}(s)$ es una parametrización por la longitud de arco.
- En la práctica, se calcula la curvatura utilizando la siguiente fórmula, que es cierta para una parametrización regular arbitraria:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

- La curvatura en un punto de una gráf ca $y = f(x)$ en el plano es:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

- Si $\|\mathbf{T}'(t)\| \neq 0$, se def ne el *vector normal unitario* como $\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$.
- $\mathbf{T}'(t) = \kappa(t) v(t) \mathbf{N}(t)$
- El *plano osculatriz* en un punto P de una curva $\mathcal{C}$ es el plano que pasa por P determinado por los vectores $\mathbf{T}_P$ y $\mathbf{N}_P$. Está def nido únicamente si la curvatura κ_P en P es diferente de cero.
- La *circunferencia osculatriz* Osc_P es la circunferencia en el plano osculatriz que pasa por P de radio $R = 1/\kappa_P$ cuyo centro Q se encuentra en la dirección normal $\mathbf{N}_P$:

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}(t_0) + \kappa_P^{-1} \mathbf{N}_P = \mathbf{r}(t_0) + R\mathbf{N}_P$$

El centro de Osc_P se denomina *centro de curvatura* y R se denomina *radio de curvatura*.

14.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es el vector tangente a la recta de vector director $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -2 \rangle$?

2. ¿Cuál es la curvatura de la circunferencia de radio 4?

3. ¿Qué curvatura es mayor: la de una circunferencia de radio 2 o la de una circunferencia de radio 4?

4. ¿Cuál es la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle 2 + 3t, 7t, 5 - t \rangle$?

5. ¿Cuál es la curvatura en un punto en que $\mathbf{T}'(s) = \langle 1, 2, 3\rangle$ para una parametrización por la longitud de arco $\mathbf{r}(s)$?

6. ¿Cuál es el radio de curvatura de una circunferencia de radio 4?

7. ¿Cuál es el radio de curvatura en P si $\kappa_P = 9$?

Problemas

En los problemas 1-6, calcule $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{T}(t)$ y evalúe $\mathbf{T}(1)$.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t^2, 9t\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, t^2\rangle$

3. $\mathbf{r}(t) = \langle 3 + 4t, 3 - 5t, 9t\rangle$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t, t^2, 3 - t^2\rangle$

5. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, t\rangle$

6. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{-t}, t^2\rangle$

En los problemas 7-10, use la ec. (3) para calcular la función de curvatura $\kappa(t)$.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, e^t, t\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle 4\cos t, t, 4\operatorname{sen} t\rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t + 1, 4t - 3, 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle t^{-1}, 1, t\rangle$

En los problemas 11-14, use la ec. (3) para evaluar la curvatura en el punto que se indica.

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 1/t, 1/t^2, t^2\rangle, \quad t = -1$

12. $\mathbf{r}(t) = \langle 3 - t, e^{t-4}, 8t - t^2\rangle, \quad t = 4$

13. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t^2\rangle, \quad t = \frac{\pi}{2}$

14. $\mathbf{r}(t) = \langle \cosh t, \operatorname{senh} t, t\rangle, \quad t = 0$

En los problemas 15-18, halle la curvatura de la curva plana para el punto que se indica.

15. $y = e^t, \quad t = 3$

16. $y = \cos x, \quad x = 0$

17. $y = t^4, \quad t = 2$

18. $y = t^n, \quad t = 1$

19. Halle la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\operatorname{sen} t, \cos 3t, t\rangle$ en $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{\pi}{2}$ (f gura 16).

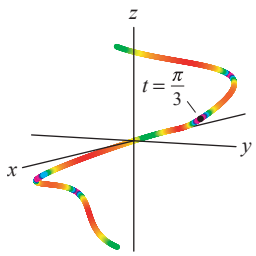


FIGURA 16 La curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2\operatorname{sen} t, \cos 3t, t\rangle$.

20. GU Halle la función de curvatura $\kappa(x)$ para $y = \operatorname{sen} x$. Use un programa informático de cálculo simbólico para representar $\kappa(x)$ para $0 \le x \le 2\pi$. Demuestre que la curvatura es máxima en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $\frac{3\pi}{2}$. *Indicación:* para encontrar el máximo de forma más directa observe que el máximo del numerador y el mínimo del denominador de $\kappa(x)$ ocurren en los mismos puntos.

21. Pruebe que la función de curvatura de la tractriz $\mathbf{r}(t) = \langle t - \tanh t, \operatorname{sech} t\rangle$ es $\kappa(t) = \operatorname{sech} t$.

22. Pruebe que la curvatura en un punto de inf exión de una curva plana $y = f(x)$ es cero.

23. Halle el valor de α para el que la curvatura de $y = e^{\alpha x}$ en $x = 0$ sea lo mayor posible.

24. Halle el punto de máxima curvatura sobre $y = e^x$.

25. Pruebe que la función de curvatura de la parametrización $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, b\operatorname{sen} t\rangle$ de la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ es:

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(b^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t)^{3/2}} \qquad \boxed{9}$$

26. Use un gráf co para estimar los puntos de mayor y menor curvatura para una elipse. A continuación, use la ec. (9) para conf rmar o rechazar su estimación.

27. En la notación del problema 25, suponga que $a \ge b$. Pruebe que $b/a^2 \le \kappa(t) \le a/b^2$ para todo t.

28. Use la ec. (3) para demostrar que para una curva plana $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \qquad \boxed{10}$$

En los problemas 29-32, use la ec. (10) para calcular la curvatura en el punto que se indica.

29. $\langle t^2, t^3\rangle, \quad t = 2$

30. $\langle \cosh s, s\rangle, \quad s = 0$

31. $\langle t\cos t, \operatorname{sen} t\rangle, \quad t = \pi$

32. $\langle \operatorname{sen} 3s, 2\operatorname{sen} 4s\rangle, \quad s = \frac{\pi}{2}$

33. Considere $s(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \|\mathbf{r}'(u)\|\, du$ para la espiral de Bernoulli $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos 4t, e^t\operatorname{sen} 4t\rangle$ (vea el problema 29 de la sección 14.3. Pruebe que el radio de curvatura es proporcional a $s(t)$.

34. La **espiral de Cornu** es la curva plana $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$, donde:

$$x(t) = \int_0^t \operatorname{sen}\frac{u^2}{2}\, du, \qquad y(t) = \int_0^t \cos\frac{u^2}{2}\, du$$

Compruebe que $\kappa(t) = |t|$. Como la curvatura aumenta linealmente, la espiral de Cornu se utiliza en el diseño de las autovías para crear transiciones entre los segmentos rectos y los curvados de la carretera (f gura 17).

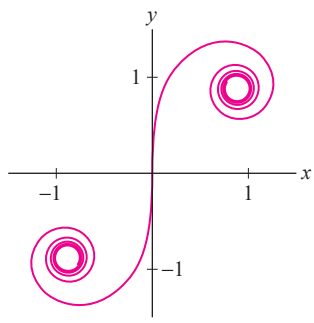


FIGURA 17 Espiral de Cornu.

35. SAC Represente y calcule la curvatura $\kappa(t)$ de la **clotoide** $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$, donde:

$$x(t) = \int_0^t \operatorname{sen} \frac{u^3}{3}\, du, \qquad y(t) = \int_0^t \cos \frac{u^3}{3}\, du$$

36. Halle el vector normal unitario $\mathbf{N}(\theta)$ a $\mathbf{r}(\theta) = R\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$, la circunferencia de radio R. ¿En qué dirección apunta $\mathbf{N}(\theta)$, hacia dentro o hacia fuera de la circunferencia? Dibuje $\mathbf{N}(\theta)$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$ con $R = 4$.

37. Halle el vector normal unitario $\mathbf{N}(t)$ a $\mathbf{r}(t) = \langle 4, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\rangle$.

38. Dibuje la gráfica de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^3\rangle$. Como $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 3t^2\rangle$, el vector normal unitario $\mathbf{N}(t)$ apunta en uno de los dos sentidos $\pm\langle -3t^2, 1\rangle$. ¿Qué signo es el correcto en $t = 1$? ¿Qué signo es el correcto en $t = -1$?

39. Halle los vectores normales a $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t\rangle$ en $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{3\pi}{4}$.

40. Halle el vector normal unitario a la espiral de Cornu (problema 34) en $t = \sqrt{\pi}$.

41. Halle el vector normal unitario a la clotoide (problema 35) en $t = \pi^{1/3}$.

42. Método para calcular N Sea $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$. Pruebe que:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{v(t)\mathbf{r}''(t) - v'(t)\mathbf{r}'(t)}{\|v(t)\mathbf{r}''(t) - v'(t)\mathbf{r}'(t)\|} \qquad \boxed{11}$$

Indicación: **N** es el vector normal unitario en la dirección de $\mathbf{T}'(t)$. Derive $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/v(t)$ para probar que $v(t)\mathbf{r}''(t) - v'(t)\mathbf{r}'(t)$ es un múltiplo positivo de $\mathbf{T}'(t)$.

En los problemas 43-48, use la ec. (11) para hallar **N** *en el punto que se indica.*

43. $\langle t^2, t^3\rangle, \quad t = 1$

44. $\langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t\rangle, \quad t = \pi$

45. $\langle t^2/2, t^3/3, t\rangle, \quad t = 1$

46. $\langle t^{-1}, t, t^2\rangle, \quad t = -1$

47. $\langle t, e^t, t\rangle, \quad t = 0$

48. $\langle \cosh t, \operatorname{senh} t, t^2\rangle, \quad t = 0$

49. Sea $f(x) = x^2$. Pruebe que el centro de la circunferencia osculatriz en (x_0, x_0^2) viene dado por $\left(-4x_0^3, \frac{1}{2} + 3x_0^2\right)$.

50. Use la ec. (8) para hallar el centro de curvatura a $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3\rangle$ en $t = 1$.

En los problemas 51-58, halle una parametrización de la circunferencia osculatriz en el punto que se indica.

51. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle, \quad t = \frac{\pi}{4}$

52. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t\rangle, \quad t = 0$

53. $y = x^2, \quad x = 1$

54. $y = \operatorname{sen} x, \quad x = \frac{\pi}{2}$

55. $\langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t\rangle, \quad t = \pi$

56. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2/2, t^3/3, t\rangle, \quad t = 0$

57. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\rangle, \quad t = 0$

58. $\mathbf{r}(t) = \langle \cosh t, \operatorname{senh} t, t\rangle, \quad t = 0$

59. La figura 18 muestra la gráfica de la semi-elipse $y = \pm\sqrt{2rx - px^2}$, donde r y p son constantes positivas. Pruebe que el radio de curvatura en el origen es igual a r. *Indicación:* una manera de proceder es expresar la elipse en la forma del problema 25 y aplicar la ec. (9).

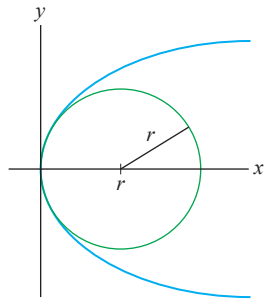


FIGURA 18 La curva $y = \pm\sqrt{2rx - px^2}$ y la circunferencia osculatriz en el origen.

60. En un estudio reciente sobre cirugía ocular con láser realizado por Gatinel, Hoang-Xuan y Azar, se modela una sección vertical de la córnea por medio de la semi-elipse del problema 59. Pruebe que la semi-elipse se puede expresar de la forma $x = f(y)$, donde $f(y) = p^{-1}(r - \sqrt{r^2 - py^2})$. En la intervención, se retira tejido hasta una profundidad $t(y)$ a altura y para $-S \le y \le S$, donde $t(y)$ viene dado por la ecuación de Munnerlyn (para algún $R > r$):

$$t(y) = \sqrt{R^2 - S^2} - \sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{r^2 - S^2} + \sqrt{r^2 - y^2}$$

Después de la intervención, la forma de la sección transversal de la córnea viene dada por $x = f(y) + t(y)$ (figura 19). Pruebe que, después de la intervención, el radio de curvatura del punto P (donde $y = 0$) es R.

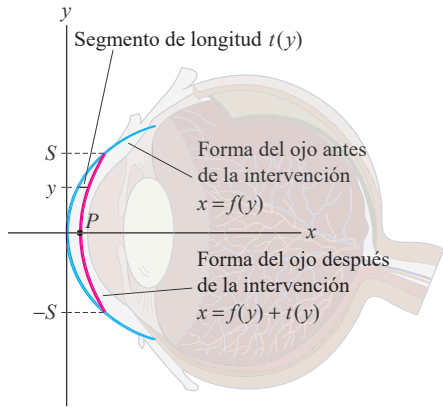


FIGURA 19 Contorno de la córnea antes y después de la intervención.

61. El **ángulo de inclinación** en un punto P sobre una curva plana es el ángulo θ entre el vector tangente unitario **T** y el eje x (figura 20). Suponga que $\mathbf{r}(s)$ es una parametrización por la longitud de arco y sea $\theta = \theta(s)$ el ángulo de inclinación en $\mathbf{r}(s)$. Demuestre que:

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\theta}{ds}\right| \qquad \boxed{12}$$

Indicación: Observe que $\mathbf{T}(s) = \langle \cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)\rangle$.

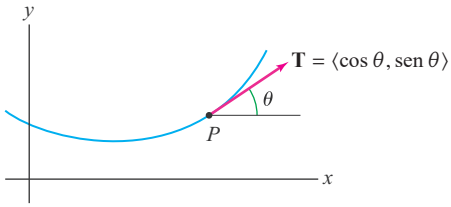


FIGURA 20 La curvatura en P es la cantidad $|d\theta/ds|$.

62. Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria $y = x^3$ con celeridad unitaria. ¿Con qué rapidez está cambiando la tangente (es decir, ¿con qué rapidez está cambiando el ángulo de inclinación?) cuando la partícula pasa por el punto $(2, 8)$?

63. Sea $\theta(x)$ el ángulo de inclinación en un punto de la gráf ca de $y = f(x)$ (vea el problema 61).

(a) Use la relación $f'(x) = \tan\theta$ para demostrar que:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)}.$$

(b) Use la integral de la longitud de arco para probar que:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

(c) Ahora demuestre la ec. (5) usando la ec. (12).

64. Use la parametrización $\mathbf{r}(\theta) = \langle f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\,\text{sen}\,\theta\rangle$ para probar que la curva $r = f(\theta)$, en coordenadas polares, tiene curvatura:

$$\kappa(\theta) = \frac{|f(\theta)^2 + 2f'(\theta)^2 - 2f(\theta)f''(\theta)|}{(f(\theta)^2 + f'(\theta)^2)^{3/2}} \qquad \boxed{13}$$

En los problemas 65-67, use la ec. (13) para hallar la curvatura de la curva dada en forma polar.

65. $f(\theta) = 2\cos\theta$ **66.** $f(\theta) = \theta$ **67.** $f(\theta) = e^{\theta}$

68. Use la ec. (13) para hallar la curvatura de la espiral general de Bernoulli $r = ae^{b\theta}$ en forma polar (a y b son constantes).

69. Pruebe que tanto $\mathbf{r}'(t)$ como $\mathbf{r}''(t)$ se encuentran en el plano osculador de $\mathbf{r}(t)$. *Indicación:* derive $\mathbf{r}'(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$.

70. Pruebe que:

$$\gamma(s) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa}\mathbf{N} + \frac{1}{\kappa}((\text{sen}\,\kappa s)\mathbf{T} - (\cos\kappa s)\mathbf{N})$$

es una parametrización por la longitud de arco de la circunferencia osculatriz en $\mathbf{r}(t_0)$.

71. Se dice que dos funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(s)$ y $\mathbf{r}_2(s)$ *coinciden hasta orden 2* en s_0 si:

$$\mathbf{r}_1(s_0) = \mathbf{r}_2(s_0), \quad \mathbf{r}_1'(s_0) = \mathbf{r}_2'(s_0), \quad \mathbf{r}_1''(s_0) = \mathbf{r}_2''(s_0)$$

Sean $\mathbf{r}(s)$ una parametrización por la longitud de arco de una trayectoria $\mathcal{C}$ y sea P el punto terminal de $\mathbf{r}(0)$. Sea $\gamma(s)$ una parametrización por la longitud de arco de la circunferencia osculatriz dada en el problema 70. Pruebe que tanto $\mathbf{r}(s)$ como $\gamma(s)$ coinciden hasta orden 2 en $s = 0$ (en realidad, la circunferencia osculatriz es la única circunferencia que aproxima a $\mathcal{C}$ hasta orden 2 en P).

72. Sea $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ una trayectoria de curvatura $\kappa(t)$ y def na la trayectoria reescalada como $\mathbf{r}_1(t) = \langle \lambda x(t), \lambda y(t), \lambda z(t)\rangle$, donde $\lambda \neq 0$ es una constante. Demuestre que la trayectoria varía de forma inversamente proporcional al factor de escala. Es decir, demuestre que la curvatura $\kappa_1(t)$ de $\mathbf{r}_1(t)$ es $\kappa_1(t) = \lambda^{-1}\kappa(t)$. Esto explica por qué la curvatura de una circunferencia de radio R es proporcional a $1/R$ (en realidad es igual a $1/R$). *Indicación:* use la ec. (3).

Problemas avanzados

73. Pruebe que la curvatura de la curva de Viviani dada por $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + \cos t, \text{sen}\,t, 2\,\text{sen}(t/2)\rangle$, es:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{13 + 3\cos t}}{(3 + \cos t)^{3/2}}$$

74. Sea $\mathbf{r}(s)$ una parametrización por la longitud de arco de una curva cerrada $\mathcal{C}$ de longitud L. Se dice que $\mathcal{C}$ es un **óvalo** si $d\theta/ds > 0$ (vea el problema 61). Observe que $-\mathbf{N}$ apunta hacia *fuera* de $\mathcal{C}$. Si $k > 0$, la curva $\mathcal{C}_1$ def nida como $\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{r}(s) - k\mathbf{N}$ se denomina una expansión de $c(s)$ en la dirección normal.

(a) Pruebe que $\|\mathbf{r}_1'(s)\| = \|\mathbf{r}'(s)\| + k\kappa(s)$.

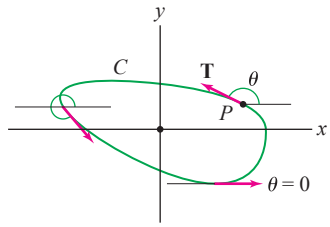
(b) Cuando P se mueve alrededor del óvalo en el sentido contrario al de las agujas del reloj, θ aumenta en 2π [f gura 21(A)]. Use este resultado y un cambio de variables para demostrar que $\displaystyle\int_0^L \kappa(s)\,ds = 2\pi$.

(c) Pruebe que la longitud de $\mathcal{C}_1$ es $L + 2\pi k$.

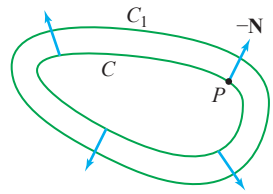
En los problemas 75-82, $\mathbf{B}$ *denota el* **vector binormal** *en un punto de una curva en el espacio* $\mathcal{C}$*, que se def ne como* $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

75. Pruebe que $\mathbf{B}$ es un vector unitario.

76. Siga los pasos (a)-(c) para demostrar que existe un número τ (letra griega minúscula "tau") denominado **torsión** tal que:



(A) Óvalo



(B) C_1 es la expansión de C en la dirección normal

FIGURA 21 Cuando P se mueve alrededor del óvalo, θ aumenta en 2π.

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \qquad \boxed{14}$$

(a) Pruebe que $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T} \times \dfrac{d\mathbf{N}}{ds}$ y deduzca que $d\mathbf{B}/ds$ es ortogonal a $\mathbf{T}$.

(b) Derive $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = 1$ respecto a s para demostrar que $d\mathbf{B}/ds$ es ortogonal a $\mathbf{B}$.

(c) Deduzca que $d\mathbf{B}/ds$ es un múltiplo de $\mathbf{N}$.

77. Pruebe que si una curva $\mathcal{C}$ está contenida en un plano $\mathcal{P}$, entonces $\mathbf{B}$ es un vector unitario normal a $\mathcal{P}$. Deduzca que $\tau = 0$ para una curva plana.

78. Torsión significa "giro." ¿Se trata de un nombre apropiado para τ? Explique por qué interpretando τ geométricamente.

79. Use la identidad:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

para demostrar:

$$\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T} \qquad \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N} \tag{15}$$

80. Siga los pasos (a)-(b) para demostrar:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \tag{16}$$

(a) Pruebe que $d\mathbf{N}/ds$ es ortogonal a $\mathbf{N}$. Deduzca que $d\mathbf{N}/ds$ se encuentra en el plano generado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$ y, en consecuencia, $d\mathbf{N}/ds = a\mathbf{T} + b\mathbf{B}$ para algunos escalares a, b.

(b) Use $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ para probar que $\mathbf{T} \cdot \dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = -\mathbf{N} \cdot \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ y calcule a. Calcule b de forma similar. Las ecuaciones (14) y (16) junto con $d\mathbf{T}/dt = \kappa\mathbf{N}$ se denominan las **fórmulas de Frenet** y fueron descubiertas por el geómetra francés Jean Frenet (1816-1900).

81. Pruebe que $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ es un múltiplo de $\mathbf{B}$. Deduzca que:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|} \tag{17}$$

82. El vector $\mathbf{N}$ se puede calcular usando que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ [ec. (15)] siendo $\mathbf{B}$, como en la ec. (17). Use este método para hallar $\mathbf{N}$ en los siguientes casos:

(a) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, t, t^2 \rangle$ en $t = 0$

(b) $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^{-1}, t \rangle$ en $t = 1$

FIGURA 1 El vuelo del transbordador espacial se analiza usando cálculo vectorial.

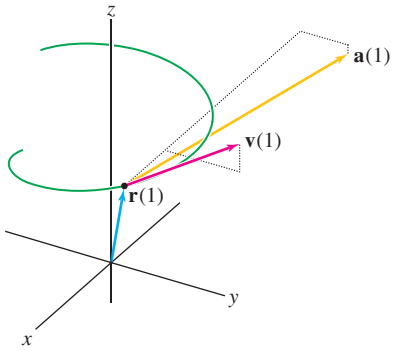


FIGURA 2

14.5 Movimiento en el espacio tridimensional

En esta sección se estudia el movimiento de una partícula que describe una trayectoria $\mathbf{r}(t)$. Recuerde que el vector velocidad es la derivada:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

Tal y como se ha visto, $\mathbf{v}(t)$ apunta en la dirección y sentido del movimiento (si ésta es no nula) y su norma $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ es la celeridad de la partícula. El **vector aceleración** es la segunda derivada $\mathbf{r}''(t)$, que se denotará $\mathbf{a}(t)$. En resumen:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \qquad v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$$

EJEMPLO 1 Calcule y represente los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$ para $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} 2t, -\cos 2t, \sqrt{t+1} \rangle$. A continuación, halle la celeridad en $t = 1$ (figura 2).

Solución

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left\langle 2\cos 2t, 2\operatorname{sen} 2t, \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2} \right\rangle \qquad \mathbf{v}(1) \approx \langle -0{,}83, 0{,}84, 0{,}35 \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left\langle -4\operatorname{sen} 2t, 4\cos 2t, -\frac{1}{4}(t+1)^{-3/2} \right\rangle \qquad \mathbf{a}(1) \approx \langle -3{,}64, 0{,}54, -0{,}089 \rangle$$

La celeridad en $t = 1$ es:

$$\|\mathbf{v}(1)\| \approx \sqrt{(-0{,}83)^2 + (0{,}84)^2 + (0{,}35)^2} \approx 1{,}23$$

Si la aceleración de un objeto viene dada, se puede obtener $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{r}(t)$ integrando dos veces:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\, dt + \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t)\, dt + \mathbf{r}_0$$

donde $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}_0$ vienen determinados por las condiciones iniciales.

EJEMPLO 2 Halle $\mathbf{r}(t)$ si:

$$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 12t\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}(0) = 7\mathbf{i} \qquad \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$$

Solución Se tiene:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt + \mathbf{v}_0 = 2t\mathbf{i} + 6t^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Según la condición inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = 7\mathbf{i}$ se tiene que $\mathbf{v}(t) = 2t\mathbf{i} + 6t^2\mathbf{j} + 7\mathbf{i}$. Entonces:

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt + \mathbf{r}_0 = t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + 7t\mathbf{i} + \mathbf{r}_0$$

La condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$ da lugar a:

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + 7t\mathbf{i} + (2\mathbf{i} + 9\mathbf{k}) = (t^2 + 7t + 2)\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$$

La segunda ley del movimiento de Newton se suele enunciar de forma escalar $F = ma$, pero un enunciado más general es la formulación vectorial $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $\mathbf{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre el objeto y $\mathbf{a}$ es el vector de aceleración. Cuando la fuerza varía de una posición a otra, se indica que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ es la fuerza que actúa sobre una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t)$ en el instante t. Entonces la segunda ley de Newton se lee como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{a}(t) \qquad \text{o} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t) \tag{1}$$

EJEMPLO 3 Se lanza un proyectil formando un ángulo de 60° por encima de la horizontal del suelo. ¿A qué velocidad inicial v_0 se debe lanzar el proyectil para alcanzar un punto que se encuentra a 150 m de altura sobre una torre que está a 250 m de distancia (ignore la resistencia del aire)?

Solución Sitúe el cañón en el origen y sea $\mathbf{r}(t)$ el vector de posición del proyectil (figura 3).

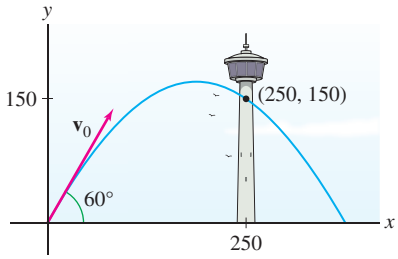


FIGURA 3 Trayectoria del proyectil.

Etapa 1. **Use la ley de Newton**

La gravedad ejerce una fuerza hacia abajo de magnitud mg, donde m es la masa del proyectil y $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. En forma vectorial:

$$\mathbf{F} = \langle 0, -mg\rangle = m\langle 0, -g\rangle$$

Según la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''(t)$ con lo que $m\langle 0, -g\rangle = m\mathbf{r}''(t)$ o $\mathbf{r}''(t) = \langle 0, -g\rangle$. Se obtiene $\mathbf{r}(t)$ integrando dos veces:

$$\mathbf{r}'(t) = \int_0^t \mathbf{r}''(u)\,du = \int_0^t \langle 0, -g\rangle\,du = \langle 0, -gt\rangle + \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{r}'(u)\,du = \int_0^t (\langle 0, -gu\rangle + \mathbf{v}_0)\,du = \left\langle 0, -\frac{1}{2}gt^2\right\rangle + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0$$

Etapa 2. **Use las condiciones iniciales**

Para la elección de coordenadas realizada, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$. La norma v_0 de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ es desconocida pero se sabe que el vector velocidad apunta en la dirección del vector unitario $\langle \cos 60°, \operatorname{sen} 60° \rangle$. Por tanto:

$$\mathbf{v}_0 = v_0\langle \cos 60°, \operatorname{sen} 60° \rangle = v_0 \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle 0, -\frac{1}{2}gt^2 \right\rangle + tv_0 \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

Etapa 3. **Determine v_0**

El proyectil alcanza el punto $\langle 250, 150 \rangle$ sobre la torre si existe un instante t tal que $\mathbf{r}(t) = \langle 250, 150 \rangle$; es decir si:

$$\left\langle 0, -\frac{1}{2}gt^2 \right\rangle + tv_0 \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \langle 250, 150 \rangle$$

Igualando componentes, se obtiene:

$$\frac{1}{2}tv_0 = 250 \qquad -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}tv_0 = 150$$

La primera ecuación conduce a $t = 500/v_0$. Ahora, sustituya en la segunda ecuación y resuelva usando que $g = 9{,}8$:

$$-4{,}9\left(\frac{500}{v_0}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{500}{v_0}\right)v_0 = 150$$

$$\left(\frac{500}{v_0}\right)^2 = \frac{250\sqrt{3} - 150}{4{,}9}$$

$$\left(\frac{v_0}{500}\right)^2 = \frac{4{,}9}{250\sqrt{3} - 150} \approx 0{,}0173$$

Se obtiene que $v_0 \approx 500\sqrt{0{,}0173} \approx 66$ m/s. ■

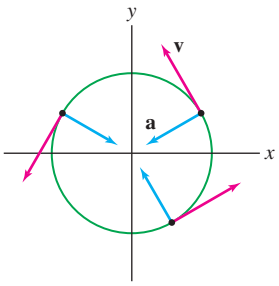


FIGURA 4 En un movimiento circular uniforme, la longitud de $\mathbf{v}$ es constante pero éste gira de forma continua. La aceleración $\mathbf{a}$ es centrípeta, apuntando hacia el centro de la circunferencia.

En un movimiento lineal, la aceleración es la tasa a la que un objeto está acelerando o desacelerando. La aceleración es cero si la celeridad es constante. Por el contrario, en dos o en tres dimensiones, la aceleración puede no ser cero cuando la celeridad del objeto es constante. Esto pasa cuando $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ es constante pero la *dirección* de $\mathbf{v}(t)$ está cambiando. El ejemplo más sencillo es el **movimiento circular uniforme**, en que un objeto se desplaza siguiendo una trayectoria circular a celeridad constante (f gura 4).

■ **EJEMPLO 4 Movimiento circular uniforme** Halle $\mathbf{a}(t)$ y $\|\mathbf{a}(t)\|$ para el movimiento sobre la circunferencia de radio R a celeridad constante v.

Solución Suponga que la partícula describe una trayectoria circular $\mathbf{r}(t) = R\langle \cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t \rangle$ para alguna constante ω. Entonces la velocidad y la celeridad de la partícula son:

$$\mathbf{v}(t) = R\omega\langle -\operatorname{sen} \omega t, \cos \omega t \rangle \qquad v = \|\mathbf{v}(t)\| = R|\omega|$$

La constante ω (letra griega minúscula "omega") se denomina la celeridad o rapidez angular *porque el ángulo de la partícula a lo largo de la circunferencia cambia a razón de ω radianes por unidad de tiempo.*

Entonces $|\omega| = v/R$ y por tanto:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -R\omega^2\langle \cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t\rangle \qquad \|\mathbf{a}(t)\| = R\omega^2 = R\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{v^2}{R}$$

El vector $\mathbf{a}(t)$ se denomina la **aceleración centrípeta**: tiene norma v^2/R y apunta hacia el origen [pues $\mathbf{a}(t)$ es un múltiplo negativo del vector de posición $\mathbf{r}(t)$], como en la f gura 4. ■

Entendiendo el vector aceleración

Tal y como se ha mencionado, $\mathbf{v}(t)$ puede variar de dos maneras: en norma y en dirección. Para entender de qué manera $\mathbf{a}(t)$ "codif ca" ambos tipos de cambio, se descompone $\mathbf{a}(t)$ como suma de componentes normal y tangencial.

Recuerde la def nición de vector tangente y de vector normal unitarios:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Por tanto, $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$, donde $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ y, por la regla del producto:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}v(t)\mathbf{T}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

Además, $\mathbf{T}'(t) = v(t)\kappa(t)\mathbf{N}(t)$ por la ec. (7) de la sección 14.4, donde $\kappa(t)$ es la curvatura. Así, se puede expresar:

$$\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}(t)\,\mathbf{N} \qquad a_{\mathbf{T}}(t) = v'(t) \quad a_{\mathbf{N}}(t) = \kappa(t)v(t)^2 \qquad \boxed{2}$$

El coef ciente $a_{\mathbf{T}}(t)$ se denomina la **componente tangencial** y $a_{\mathbf{N}}(t)$ la **componente normal** de la aceleración (f gura 5).

Cuando gira un automóvil que viaja a velocidad constante hacia la izquierda, su aceleración tangencial es cero (pues $v'(t) = 0$) y no se le empuja contra el asiento. Sin embargo, el asiento del coche (a través de la fricción) le empuja a la izquierda, hacia la puerta del coche, con lo que acelera en la dirección normal. Debido a la inercia, se siente como si le empujaran a la derecha, hacia el asiento del pasajero. Esta fuerza es proporcional a κv^2, por lo que un giro pronunciado (κ grande) o a alta velocidad (v grande) produce una fuerza normal intensa.

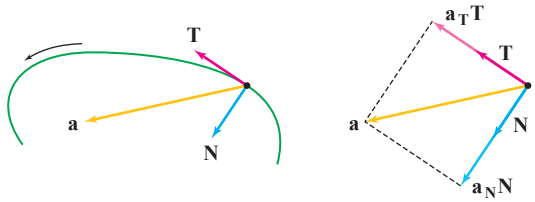


FIGURA 5 Descomposición de **a** en sus componentes normal y tangencial.

La componente normal $a_{\mathbf{N}}$ se suele denominar la ***aceleración centrípeta****, especialmente en el caso del movimiento circular donde su dirección es hacia el centro de la circunferencia.*

UN APUNTE CONCEPTUAL La componente tangencial $a_{\mathbf{T}} = v'(t)$ es la tasa a la que la *celeridad* $v(t)$ cambia mientras que la componente normal $a_{\mathbf{N}} = \kappa(t)v(t)^2$ describe el cambio en $\mathbf{v}$ debido a la variación en la *dirección*. Estas interpretaciones resultan más claras al considerar los siguientes casos extremos:

- Un partícula se desplaza en línea recta. Entonces su dirección no cambia [$\kappa(t) = 0$] y $\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}$ es paralela a la dirección del movimiento.
- Un partícula se desplaza a celeridad constante a lo largo de una trayectoria curvada. Entonces $v'(t) = 0$ y el vector de aceleración $\mathbf{a}(t) = \kappa(t)v(t)^2\mathbf{N}$ es normal a la dirección del movimiento.

Un movimiento genérico combina tanto la aceleración tangencial como la normal.

FIGURA 6 La noria gigante en Viena, Austria, fue construida en 1897 para celebrar el 50 aniversario de la coronación del Emperador Franz Joseph I.

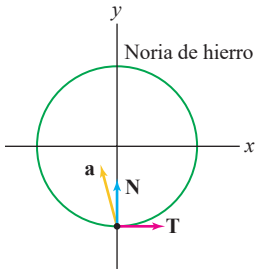


FIGURA 7

■ **EJEMPLO 5** La noria gigante en Viena tiene un radio de $R = 30$ m (figura 6). Suponga que en el instante $t = t_0$, la noria gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj con una celeridad de 40 m/min y que se va parando a razón de 15 m/min^2. Halle el vector de aceleración $\mathbf{a}$ para una persona que está sentada en la cesta de la noria que está en el punto más bajo de ésta.

Solución En el punto más bajo de la noria, $\mathbf{T} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{N} = \langle 0, 1\rangle$. Se sabe que $a_{\mathbf{T}} = v' = -15$ en el instante t_0. La curvatura de la noria es $\kappa = 1/R = 1/30$, por lo que la componente normal es $a_{\mathbf{N}} = \kappa v^2 = v^2/R = (40)^2/30 \approx 53{,}3$. Por tanto (figura 7):

$$\mathbf{a} \approx -15\mathbf{T} + 53{,}3\mathbf{N} = \langle -15, 53{,}3\rangle \text{ m/min}^2$$

■

El siguiente teorema proporciona fórmulas útiles para las componentes normal y tangencial.

TEOREMA 1 Componentes normal y tangencial de la aceleración En la descomposición $\mathbf{a} = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}$, se tiene

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \qquad a_{\mathbf{N}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - |a_{\mathbf{T}}|^2} \tag{3}$$

y

$$a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\right)\mathbf{v} \qquad \mathbf{a}_{\mathbf{N}}\mathbf{N} = \mathbf{a} - a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{a} - \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\right)\mathbf{v} \tag{4}$$

Demostración Se tiene que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ y $\mathbf{N}\cdot\mathbf{T} = 0$. Por tanto:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = (a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N})\cdot\mathbf{T} = a_{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{N} = (a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N})\cdot\mathbf{N} = a_{\mathbf{N}}$$

y como $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, se tiene:

$$a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{T})\mathbf{T} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$$

y

$$a_{\mathbf{N}}\mathbf{N} = \mathbf{a} - a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{a} - \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right)\mathbf{v}$$

Por último, los vectores $a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$ y $a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}$ son los lados de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\mathbf{a}$, como en la figura 5, luego por el teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{a}\|^2 = |a_{\mathbf{T}}|^2 + |a_{\mathbf{N}}|^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - |a_{\mathbf{T}}|^2}$$

■

Recuerde que $a_{\mathbf{N}} \geq 0$ pero $a_{\mathbf{T}}$ es positiva o negativa, en función de si el objeto está acelerando o decelerando.

■ **EJEMPLO 6** Descomponga el vector aceleración $\mathbf{a}$ de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t\rangle$ en sus componentes normal y tangencial en $t = \frac{1}{2}$ (figura 8).

Solución En primer lugar, se calcularán las componentes tangenciales $\mathbf{T}$ y $a_{\mathbf{T}}$. Se tiene que:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, 2, t^{-1}\rangle, \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \langle 2, 0, -t^{-2}\rangle$$

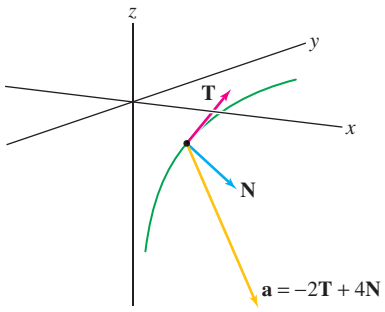


FIGURA 8 Los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{a}$ en $t = \frac{1}{2}$ sobre la curva $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t\rangle$.

En $t = \frac{1}{2}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'\left(\frac{1}{2}\right) = \left\langle 2\left(\frac{1}{2}\right), 2, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \right\rangle = \langle 1, 2, 2 \rangle$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}''\left(\frac{1}{2}\right) = \left\langle 2, 0, -\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \right\rangle = \langle 2, 0, -4 \rangle$$

Así:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle 1, 2, 2 \rangle}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$$

y por la ec. (3):

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \langle 2, 0, -4 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle = -2$$

Ahora, por la ec. (4):

$$a_{\mathbf{N}}\mathbf{N} = \mathbf{a} - a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \langle 2, 0, -4 \rangle - (-2)\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle = \left\langle \frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3} \right\rangle$$

La norma de este vector es:

$$a_{\mathbf{N}} = \|a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\| = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{9}} = 4$$

y, por tanto:

$$\mathbf{N} = \frac{a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}}{a_{\mathbf{N}}} = \frac{\left\langle \frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3} \right\rangle}{4} = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle$$

Por último, se obtiene la descomposición:

$$\mathbf{a} = \langle 2, 0, -4 \rangle = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N} = -2\mathbf{T} + 4\mathbf{N}$$

Resumen de los pasos en el ejemplo 6:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$$

$$a_{\mathbf{N}}\mathbf{N} = \mathbf{a} - a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}$$

$$a_{\mathbf{N}} = \|a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}\|$$

$$\mathbf{N} = \frac{a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}}{a_{\mathbf{N}}}$$

EJEMPLO 7 Movimiento circular no uniforme La figura 9 ilustra los vectores de aceleración de tres partículas que se mueven *en el sentido contrario al de las agujas del reloj* sobre una circunferencia. En cada caso, establezca si la celeridad de la partícula v es creciente, decreciente o, momentáneamente, constante.

Solución La tasa de variación de la celeridad depende del ángulo θ entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{T}$:

$$v' = a_{\mathbf{T}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{T}\| \cos\theta = \|\mathbf{a}\| \cos\theta$$

- En (A), θ es obtuso por lo que $\cos\theta < 0$ y $v' < 0$. La celeridad de la partícula está decreciendo.
- En (B), $\theta = \frac{\pi}{2}$ por lo que $\cos\theta = 0$ y $v' = 0$. La celeridad de la partícula es, momentáneamente, constante.
- En (C), θ es agudo con $\cos\theta > 0$ y $v' > 0$. La celeridad de la partícula está creciendo.

RECORDATORIO

- *Según la ec. (3),* $v' = a_{\mathbf{T}} = \mathrm{a} \cdot \mathbf{T}$
- $\mathrm{v} \cdot \mathrm{w} = \|\mathrm{v}\|\,\|\mathrm{w}\| \cos\theta$

donde θ *es el ángulo entre* v *y* w.

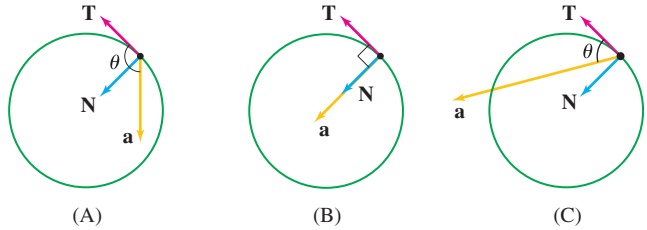


FIGURA 9 Vectores de aceleración de partículas que se mueven en el sentido contrario al de las agujas del reloj (en la dirección de $\mathbf{T}$) sobre una circunferencia.

■ **EJEMPLO 8** Halle la curvatura $\kappa(\frac{1}{2})$ para la trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t \rangle$ del ejemplo 6.

Solución Por la ec. (2), la componente normal es:

$$a_{\mathbf{N}} = \kappa v^2$$

En el ejemplo 6 se probó que $a_{\mathbf{N}} = 4$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 2 \rangle$ en $t = \frac{1}{2}$. Por tanto, $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 9$ y la curvatura es $\kappa(\frac{1}{2}) = a_{\mathbf{N}}/v^2 = \frac{4}{9}$. ■

14.5 RESUMEN

- Para un objeto cuya trayectoria se describe por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \qquad v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| \qquad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$$

- El *vector velocidad* $\mathbf{v}(t)$ apunta en la dirección y sentido del movimiento. Su longitud $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$ es la celeridad o rapidez del objeto.
- El *vector aceleración* $\mathbf{a}$ es la suma de una componente tangencial (ref ejando el cambio en celeridad) y una componente normal (ref ejando el cambio en la dirección):

$$\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}(t)\mathbf{N}(t)$$

Vector tangente unitario	$\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}$
Vector normal unitario	$\mathbf{N}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$
Componente tangencial	$a_{\mathbf{T}} = v'(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$
	$a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$
Componente normal	$a_{\mathbf{N}} = \kappa(t)v(t)^2 = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{a}_{\mathbf{T}}\|^2}$
	$a_{\mathbf{N}}\,\mathbf{N} = \mathbf{a} - a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{a} - \left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$

14.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Si una partícula se desplaza a celeridad constante, ¿debe ser igual a cero su vector aceleración? Explique por qué.

2. Si una partícula describe un movimiento circular uniforme sobre una circunferencia, ¿cuál de los vectores $\mathbf{v}(t)$ o $\mathbf{a}(t)$ siempre apunta hacia el centro de la circunferencia?

3. Dos objetos se desplazan hacia la derecha sobre la parábola $y = x^2$ con celeridad no nula. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones debe ser cierta?

(a) Sus vectores velocidad apuntan en la misma dirección.

(b) Sus vectores velocidad tiene la misma longitud.

(c) Sus vectores aceleración apuntan en la misma dirección.

4. Use la descomposición de la aceleración en componentes normal y tangencial para explicar la siguiente af rmación: si la celeridad es constante, entonces los vectores aceleración y velocidad son ortogonales.

5. Si una partícula se desplaza sobre una línea recta, entonces los vectores aceleración y velocidad son (elija la descripción correcta):

(a) Ortogonales **(b)** Paralelos

6. ¿Cuál es la longitud del vector aceleración de una partícula que se desplaza sobre una circunferencia de radio 2 cm con velocidad constante de 4 cm/s?

7. Dos coches están compitiendo por una pista circular. Si, en un cierto instante, sus velocímetros marcan 110 mph, entonces los dos coches tienen la misma (elija una):

(a) $a_{\mathbf{T}}$ **(b)** $a_{\mathbf{N}}$

Problemas

1. Use la siguiente tabla para calcular los cocientes incrementales $\dfrac{\mathbf{r}(1+h)-\mathbf{r}(1)}{h}$ para $h = -0{,}2,\ -0{,}1,\ 0.1,\ 0.2$. A continuación estime la velocidad y la celeridad en $t = 1$.

$\mathbf{r}(0{,}8)$	$\langle 1{,}557,\ 2{,}459,\ -1{,}970\rangle$
$\mathbf{r}(0{,}9)$	$\langle 1{,}559,\ 2{,}634,\ -1{,}740\rangle$
$\mathbf{r}(1)$	$\langle 1{,}540,\ 2{,}841,\ -1{,}443\rangle$
$\mathbf{r}(1{,}1)$	$\langle 1{,}499,\ 3{,}078,\ -1{,}035\rangle$
$\mathbf{r}(1{,}2)$	$\langle 1{,}435,\ 3{,}342,\ -0{,}428\rangle$

2. Dibuje los vectores $\mathbf{r}(2+h)-\mathbf{r}(2)$ y $\dfrac{\mathbf{r}(2+h)-\mathbf{r}(2)}{h}$ para $h = 0{,}5$ y la trayectoria de la figura 10. Dibuje $\mathbf{v}(2)$ (usando una estimación aproximada de su longitud).

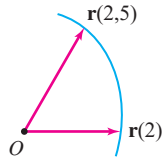


FIGURA 10

En los problemas 3-6, calcule los vectores velocidad y aceleración y la celeridad en el instante que se indica.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, 1-t, 4t^2\rangle, \quad t = 1$

4. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{j} - \cos(2t)\mathbf{k}, \quad t = 0$

5. $\mathbf{r}(\theta) = \langle \operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \cos 3\theta\rangle, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

6. $\mathbf{r}(s) = \left\langle \dfrac{1}{1+s^2}, \dfrac{s}{1+s^2}\right\rangle, \quad s = 2$

7. Halle $\mathbf{a}(t)$ para una partícula que se mueve sobre una circunferencia de radio 8 cm a celeridad constante de $v = 4$ cm/s (vea el ejemplo 4). Dibuje la trayectoria y el vector aceleración en $t = \frac{\pi}{4}$.

8. Represente la trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle 1-t^2, 1-t\rangle$ para $-2 \le t \le 2$, indicando la dirección del movimiento. Dibuje los vectores velocidad y aceleración en $t = 0$ y $t = 1$.

9. Represente la trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3\rangle$ junto con el vector velocidad y aceleración en $t = 1$.

10. Las trayectorias $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3\rangle$ y $\mathbf{r}_1(t) = \langle t^4, t^6\rangle$ describen la misma curva y $\mathbf{r}_1(1) = \mathbf{r}(1)$. ¿Espera que, o bien los vectores velocidad o bien los vectores aceleración de estas trayectorias en $t = 1$, apunten en la misma dirección? Calcule estos vectores y represéntelos sobre la curva.

En los problemas 11-14, halle $\mathbf{v}(t)$ dada $\mathbf{a}(t)$ y la velocidad inicial.

11. $\mathbf{a}(t) = \langle t, 4\rangle, \quad \mathbf{v}(0) = \langle \frac{1}{3}, -2\rangle$

12. $\mathbf{a}(t) = \langle e^t, 0, t+1\rangle, \quad \mathbf{v}(0) = \langle 1, -3, \sqrt{2}\rangle$

13. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$

14. $\mathbf{a}(t) = t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

En los problemas 15-18, halle $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ dada $\mathbf{a}(t)$ y la velocidad y posición iniciales.

15. $\mathbf{a}(t) = \langle t, 4\rangle, \quad \mathbf{v}(0) = \langle 3, -2\rangle, \quad \mathbf{r}(0) = \langle 0, 0\rangle$

16. $\mathbf{a}(t) = \langle e^t, 2t, t+1\rangle, \quad \mathbf{v}(0) = \langle 1, 0, 1\rangle, \quad \mathbf{r}(0) = \langle 2, 1, 1\rangle$

17. $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = \cos t\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

En los problemas 19-24, recuerde que $g = 9{,}8$ m/s^2 es la aceleración debida a la gravedad en la superf cie de la Tierra.

19. Se dispara un proyectil desde el suelo con un ángulo de 45°. ¿qué velocidad inicial debe tener el proyectil para alcanzar la parte superior de una torre de 120 m que se encuentra a 180 m de distancia?

20. Halle el vector de velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de un proyectil que se dispara con celeridad de 100 m/s y que alcanza altura máxima de 300 m.

21. Pruebe que un proyectil que se dispara a un ángulo θ con celeridad inicial v_0 recorre una distancia total de $(v_0^2/g)\operatorname{sen} 2\theta$ antes de tocar el suelo. Deduzca que la distancia máxima (para v_0 dado) se alcanza en $\theta = 45°$.

22. Un jugador lanza una bola de béisbol a otro jugador que está a 25 m de distancia con una celeridad de 18 m/s. Use el resultado del problema 21 para hallar dos ángulos θ con los que la bola se puede lanzar. ¿Para qué ángulo llega la bola antes a su destino?

23. Se dispara un proyectil con un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ hacia una torre situada a $d = 600$ m de distancia, con celeridad inicial $v_0 = 120$ m/s. Halle la altura H a la que el proyectil alcanza la torre.

24. Pruebe que un proyectil que se dispara a un ángulo θ alcanzará la parte superior de una torre de h metros situada a d metros de distancia si su celeridad inicial es:

$$v_0 = \frac{\sqrt{g/2}\, d \sec\theta}{\sqrt{d\tan\theta - h}}$$

25. Una fuerza constante $\mathbf{F} = \langle 5, 2\rangle$ (en newtons) actúa sobre una masa de 10 kg. Halle la posición de la masa en $t = 10$ s, si en $t = 0$ ésta se encuentra en el origen y tiene velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = \langle 2, -3\rangle$ (en metros por segundo).

26. Una fuerza $\mathbf{F} = \langle 24t, 16-8t\rangle$ (en newtons) actúa sobre una masa de 4 kg. Halle la posición de la masa en $t = 3$ s, si se encuentra en $(10, 12)$ para $t = 0$ y tiene velocidad inicial cero.

27. Una partícula describe la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ para $0 \le t \le T$, empezando en el origen O. El vector $\overline{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \mathbf{r}'(t)\,dt$ se denomina el vector **velocidad media**. Suponga que $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Responda y explique lo siguiente:

(a) ¿Dónde está situada la partícula en el instante T si $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$?

(b) ¿La celeridad media de la partícula es necesariamente igual a cero?

28. En un cierto momento, la velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v} = \langle 2, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{a} = \langle 0, 4, 3\rangle$. Halle $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y la descomposición de $\mathbf{a}$ en componentes normal y tangencial.

29. En un cierto momento, la velocidad de una partícula en movimiento siguiendo una determinada trayectoria es $\mathbf{v} = \langle 12, 20, 20\rangle$ y su aceleración es $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -3\rangle$. ¿La partícula está acelerando o decelerando?

En los problemas 30-33, use la ec. (3) para hallar los coef cientes $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ como función de t (o en el valor especif cado de t).

30. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t^{-1}, \ln t, t^2 \rangle, \quad t = 1$

33. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, t, e^{-t} \rangle, \quad t = 0$

En los problemas 34-41, halle la descomposición de $\mathbf{a}(t)$ en componentes tangencial y normal en el punto que se indica, como en el ejemplo 6.

34. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, 1 - t \rangle, \quad t = 0$

35. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{3}t^3, 1 - 3t \right\rangle, \quad t = -1$

36. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3 \right\rangle, \quad t = 1$

37. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3 \right\rangle, \quad t = 4$

38. $\mathbf{r}(t) = \langle 4 - t, t + 1, t^2 \rangle, \quad t = 2$

39. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, te^t \rangle, \quad t = 0$

40. $\mathbf{r}(\theta) = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \theta \rangle, \quad \theta = 0$

41. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, t \operatorname{sen} t \rangle, \quad t = \frac{\pi}{2}$

42. Sea $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 4t - 3 \rangle$. Halle $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ y pruebe que la descomposición de $\mathbf{a}(t)$ en componentes normal y tangencial es:

$$\mathbf{a}(t) = \left(\frac{2t}{\sqrt{t^2 + 4}} \right) \mathbf{T} + \left(\frac{4}{\sqrt{t^2 + 4}} \right) \mathbf{N}$$

43. Halle las componentes $a_{\mathbf{T}}$ y $a_{\mathbf{N}}$ del vector aceleración de una partícula que describe una trayectoria circular de radio $R = 100$ cm con velocidad constante $v_0 = 5$ cm/s.

44. En la notación del ejemplo 5, halle el vector aceleración de una persona sentada en uno de los coches en (a) el punto más alto de la noria y (b) los dos puntos que están al mismo nivel que el centro de la noria.

45. Suponga que la noria del ejemplo 5 gira en el sentido de las agujas del reloj y que el punto P en el ángulo de 45° tiene vector aceleración $\mathbf{a} = \langle 0, -50 \rangle$ m/min^2 apuntando hacia abajo, como en la f gura 11. Determine la celeridad y la aceleración tangencial de la noria.

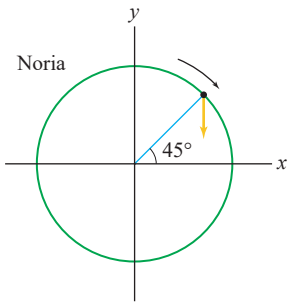


FIGURA 11

46. En el instante t_0, el vector velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}$ y el vector aceleración es $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 18\mathbf{k}$. Determine la curvatura $\kappa(t_0)$ de la trayectoria de la partícula en t_0.

47. Un transbordador espacial está en órbita alrededor de la Tierra, a una altitud 400 km de la superf cie de la Tierra, con velocidad constante $v = 28\ 000$ km/h. Halle la magnitud de la aceleración del transbordador (en km/h^2), suponiendo que el radio de la Tierra es 6378 km (f gura 12).

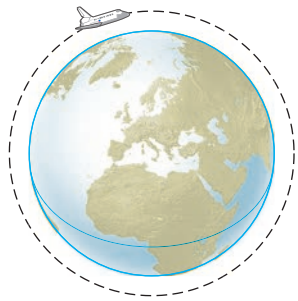


FIGURA 12 Órbita espacial del transbordador.

48. Un coche describe una trayectoria circular de radio $R = 300$ m y centro en el origen. Empieza parado, y su celeridad aumenta a razón de t m/s^2. Halle el vector de aceleración $\mathbf{a}$ en el instante $t = 3$ s y determine su descomposición en componentes normal y tangencial.

49. Un corredor corre sobre la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle$. Cuando se encuentra en la posición $\mathbf{r}(\frac{\pi}{2})$, su celeridad es 3 m/s y está acelerando a razón de $\frac{1}{2}$ m/s^2. Halle su vector de aceleración $\mathbf{a}$ en este momento. *Nota:* el vector de aceleración del corredor no coincide con el vector de aceleración de $\mathbf{r}(t)$.

50. Explique por qué el vector $\mathbf{w}$ de la f gura 13 no puede ser el vector aceleración de la partícula en movimiento sobre la circunferencia. *Indicación:* Considere el signo de $\mathbf{w} \cdot \mathbf{N}$.

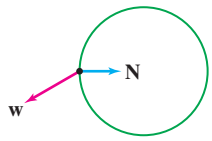


FIGURA 13

51. La f gura 14 muestra vectores aceleración de una partícula que se mueve en el sentido de las agujas del reloj sobre una circunferencia. En cada caso, determine si la partícula está acelerando, decelerando o, momentáneamente, a velocidad constante. Justif que su respuesta.

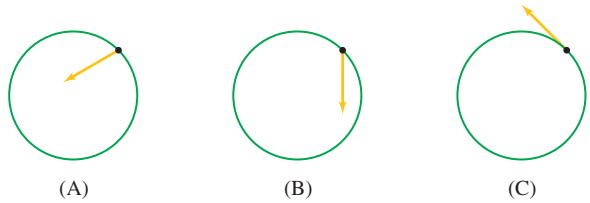


FIGURA 14

52. Demuestre que $a_{\mathbf{N}} = \dfrac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$.

53. Suponga que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ está situada sobre una esfera de radio R para todo t. Sea $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'$. Pruebe que $\mathbf{r}' = (\mathbf{J} \times \mathbf{r})/\|\mathbf{r}\|^2$. *Indicación:* Observe que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son perpendiculares.

Problemas avanzados

54. La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco. La fuerza gravitacional del Sol actúa sobre la recta radial del planeta al Sol (las líneas punteadas de la f gura 15) y, por la segunda ley de Newton, el vector de aceleración apunta en la misma dirección. Suponiendo que la órbita tiene excentricidad positiva (la órbita no es una circunferencia), explique por qué el planeta debe reducir la velocidad en la mitad superior de la órbita (ya que se aleja de la sol) y aumentar la velocidad en la mitad inferior. La segunda Ley de Kepler, que se trata en la siguiente sección, es una versión exacta de esta conclusión cualitativa. *Indicación:* Considere la descomposición de **a** en sus componentes normal y tangencial.

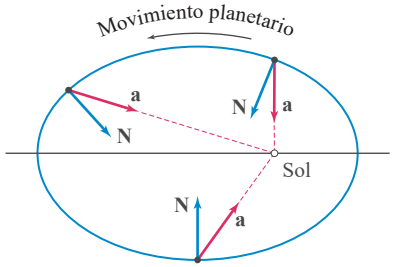


FIGURA 15 Órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol.

En los problemas 55-59, considere un un automóvil de masa m circulando por una carretera de curvas, sin desniveles. Para evitar el derrapar, la carretera debe ejercer una fuerza de fricción $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$*, donde* $\mathbf{a}$ *es el vector de aceleración del automóvil. La magnitud máxima de la fuerza de fricción es* μmg*, donde* μ *es el coef ciente de fricción y* $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$*. Sea* v *la celeridad del automóvil en metros por segundo.*

55. Pruebe que el automóvil no derrapará si la curvatura κ de la carretera cumple (siendo $R = 1/\kappa$):

$$(v')^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 \le (\mu g)^2 \qquad \boxed{5}$$

Observe que frenar ($v' < 0$) y acelerar ($v' > 0$) contribuyen de igual manera a derrapar.

56. Suponga que el radio máximo de curvatura sobre una carretera con curvas es $R = 180$ m. ¿Cuánto es lo más rápido que puede uno viajar en automóvil (a velocidad constante) por esa carretera sin derrapar, si el coef ciente de fricción es $\mu = 0{,}5$?

57. Partiendo del reposo, un automóvil se desplaza alrededor de una pista circular de radio R = 300 m, acelerando a un ritmo de 0,3 m/s^2. ¿Después de cuántos segundos el coche comienza a derrapar si el coef - ciente de fricción es de $\mu = 0, 6$?

58. Usted quiere invertir su dirección en el menor tiempo posible conduciendo en torno a una curva semicircular (f gura 16). Si usted viaja a la máxima *celeridad constante* v a la que no derrapa, ¿es más rápido considerar la curva interior (radio r) o la curva exterior (radio R)? *Indicación:* use la ec. (5) para probar que, a celeridad máxima, el tiempo necesario para conducir por la semicircunferencia es proporcional a la raíz cuadrada del radio.

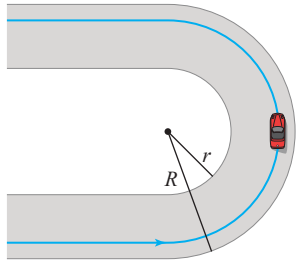


FIGURA 16 Automóvil que va por la curva.

59. ¿Cuál es el menor radio R para el que un automóvil pueda girar, sin derrapar, yendo a 100 km/h si $\mu = 0{,}75$ (un valor típico)?

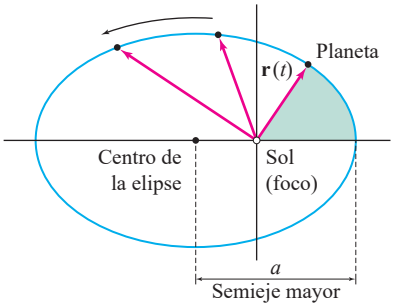


FIGURA 1 El planeta viaja a lo largo de una elipse con el Sol en uno de los focos.

14.6 Movimiento planetario según Kepler y Newton

En esta sección, se obtienen las leyes de Kepler del movimiento planetario, una primera hazaña realizada por Isaac Newton y publicada por él en el año 1687. Ningún otro suceso de la revolución científ ca fue más emblemático. Demostró el poder de las matemáticas para hacer comprensible el mundo natural y condujo a generaciones venideras de científ cos a buscar y descubrir leyes matemáticas que rigen otros fenómenos, como la electricidad y el magnetismo, la termodinámica y los procesos atómicos.

Según Kepler, las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de sus focos. Además, si se imagina un vector radial $\mathbf{r}(t)$ apuntando desde el Sol al planeta, como en la f gura 1, entonces este vector radial barre un área a razón constante o, como Kepler enunció en su segunda ley, el vector radial barre áreas iguales en tiempos iguales (f gura 2). La tercera ley de Kepler determina el **periodo** T de la órbita, que se def ne como el tiempo necesario para completar una revolución. Estas leyes son ciertas no sólo para planetas que se encuentran en órbita alrededor del Sol sino también para cualquier otro cuerpo en órbita alrededor de otro cuerpo según la ley cuadrática inversa de gravitación.

La versión de Kepler de la tercera ley sólo enunció que T^2 es proporcional a a^3. Newton descubrió que la constante de proporcionalidad es igual a $4\pi^2/(GM)$ y observó que si se puede medir T y a mediante observación directa, entonces se puede utilizar la tercera ley para obtener la masa M. Este método se usa por los astrónomos para hallar las masas de los planetas (midiendo T y a para satélites en órbita alrededor de un planeta) y también las masas de estrellas binarias y galaxias. Vea los problemas 2-5.

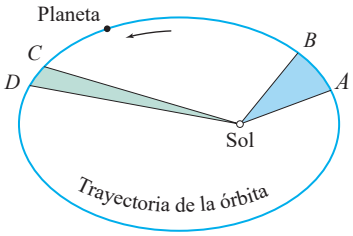


FIGURA 2 El área de las dos regiones sombreadas es la misma y, por la segunda ley de Kepler, el planeta las barre en tiempos iguales. Para hacerlo, el planeta debe viajar más rápido de A a B que de C a D.

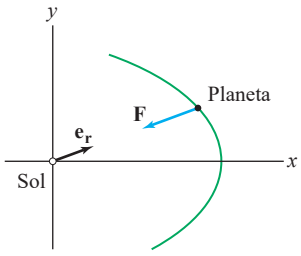


FIGURA 3 La fuerza gravitacional $\mathbf{F}$, dirigida desde el planeta al Sol, es un múltiplo negativo de $\mathbf{e}_r$.

Tres Leyes de Kepler

(i) Ley de las elipses: La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco.

(ii) Ley de igual área en igual tiempo: el vector de posición que apunta desde el Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

(iii) Ley del periodo de movimiento: $T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{GM}\right)a^3$, donde:

- a es el semieje mayor de la elipse (figura 1).
- G es la constante de gravitación universal: $6{,}673 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$.
- M es la masa del Sol, aproximadamente $1{,}989 \times 10^{30}$ kg.

Nuestra derivación se realiza bajo unas hipótesis simplificadoras del problema. Se considera al Sol y al planeta como masas puntuales y se ignora la atracción gravitacional de los planetas sobre ellos. Y aunque tanto el Sol como el planeta giran alrededor de su centro de masas mutuo, se ignora el movimiento del Sol y se supone que el planeta gira respecto al centro del Sol. Esto se justifica porque la masa del Sol es mucho mayor que la del planeta.

Sitúe al Sol en el origen del sistema de coordenadas. Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ el vector de posición de un planeta de masa m, como en la figura 1 y sea (figura 3):

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}$$

el vector radial unitario en el instante t ($\mathbf{e}_r$ es el vector unitario que apunta hacia el planeta cuando éste se mueve alrededor del Sol). Según la ley de la gravitación universal de Newton (la ley cuadrática inversa), el Sol atrae al planeta con una fuerza gravitacional dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -\left(\frac{km}{\|\mathbf{r}(t)\|^2}\right)\mathbf{e}_r$$

donde $k = GM$ (figura 3). Combinando la ley de la gravitación con la segunda ley del movimiento de Newton $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$, se obtiene:

$$\mathbf{r}''(t) = -\frac{k}{\|\mathbf{r}(t)\|^2}\,\mathbf{e}_r \qquad \boxed{1}$$

Las leyes de Kepler se deducen de esta *ecuación diferencial*.

Segunda ley de Kepler

El punto clave para deducir la segunda ley de Kepler es que el siguiente producto vectorial es un vector constante (incluso si tanto $\mathbf{r}(t)$ como $\mathbf{r}'(t)$ cambian con el tiempo):

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$$

*En física, $\mathbf{J}$ se denomina el vector **momento angular**. En situaciones para las que $\mathbf{J}$ es constante, se dice que el momento se* conserva. *Esta ley de conservación es cierta incluso cuando la fuerza actúa en la dirección radial.*

TEOREMA 1 El vector $\mathbf{J}$ es constante, es decir:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{0} \qquad \boxed{2}$$

RECORDATORIO

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *es ortogonal tanto a* $\mathbf{a}$ *como a* $\mathbf{b}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ *si* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *son paralelos, es decir, si uno es un múltiplo del otro.*

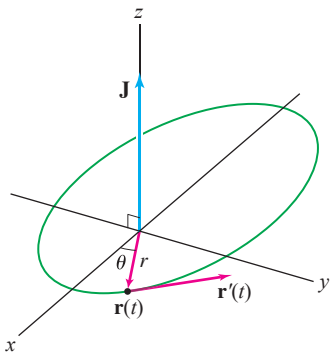


FIGURA 4 La órbita está contenida en el plano ortogonal a $\mathbf{J}$. Sin embargo, todavía no se ha demostrado que esta órbita es una elipse.

Demostración Según la regla del producto para el producto vectorial (teorema 3 de la sección 14.2)

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t)$$

El producto vectorial de vectores paralelos es cero, por lo que el segundo término es efectivamente cero. El primer término también es cero porque $\mathbf{r}''(t)$ es un múltiplo de $\mathbf{e}_r$ según la ec. (1) y, por tanto, también de $\mathbf{r}(t)$. ■

¿De qué manera se puede usar la ec. (2)? En primer lugar, el producto vectorial $\mathbf{J}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{r}(t)$ como a $\mathbf{r}'(t)$. Como $\mathbf{J}$ es constante, $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}'(t)$ se encuentran confinados en el plano ortogonal a $\mathbf{J}$. Esto demuestra que el *movimiento de un planeta alrededor del Sol tiene lugar en un plano*.

Se pueden escoger coordenadas de manera que el Sol se encuentre en el origen y que el planeta se mueva en la dirección contraria a la de las agujas del reloj (figura 4). Sea (r, θ) las coordenadas polares del planeta, donde $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$ son funciones del tiempo. Observe que $r(t) = \|\mathbf{r}(t)\|$.

Recuerde, de la sección 12.4 (teorema 1) que el área barrida por el vector radial del planeta es:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} r^2\, d\theta$$

La segunda ley de Kepler afirma que esta área es barrida a razón constante. Pero esta razón, es simplemente dA/dt. Por el teorema fundamental del cálculo, $\dfrac{dA}{d\theta} = \dfrac{1}{2}r^2$ y por la regla de la cadena,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\theta'(t)r(t)^2 = \frac{1}{2}r(t)^2\theta'(t)$$

Por tanto, la segunda ley de Kepler se obtiene a partir del siguiente teorema, según el cual dA/dt es constante y de valor $\frac{1}{2}\|\mathbf{J}\|$.

TEOREMA 2 Sea $J = \|\mathbf{J}\|$ ($\mathbf{J}$ es constante por el teorema 1). Entonces:

$$r(t)^2\theta'(t) = J \qquad \boxed{3}$$

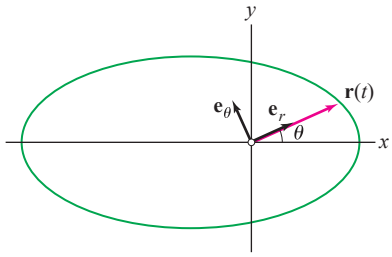


FIGURA 5 Los vectores unitarios $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ son ortogonales y giran alrededor del origen junto con el planeta.

Demostración Observe que en coordenadas polares, $\mathbf{e}_r = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$. Considere también el vector unitario $\mathbf{e}_\theta = \langle -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta \rangle$ que es ortogonal a $\mathbf{e}_r$ (figura 5). En resumen:

$$r(t) = \|\mathbf{r}(t)\|, \quad \mathbf{e}_r = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle, \quad \mathbf{e}_\theta = \langle -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta \rangle, \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$$

Las derivadas de $\mathbf{e}_r$ y $\mathbf{e}_\theta$ respecto a θ son:

$$\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \qquad \frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r \qquad \boxed{4}$$

La derivada respecto al tiempo de $\mathbf{e}_r$ se calcula usando la regla de la cadena:

$$\mathbf{e}_r' = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d}{d\theta}\mathbf{e}_r\right) = \theta'(t)\,\mathbf{e}_\theta \qquad \boxed{5}$$

Ahora aplique la regla del producto a $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$:

$$\mathbf{r}' = \frac{d}{dt}r\mathbf{e}_r = r'\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_r' = r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta$$

Para calcular el producto vectorial de vectores en el plano, como $\mathbf{r}$, $\mathbf{e}_r$ *y* $\mathbf{e}_\theta$, *se tratan como vectores en el espacio tridimensional con su componente z igual a cero. El producto vectorial resulta, por tanto, un múltiplo de* $\mathbf{k}$.

Como $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0}$, se obtiene que:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{e}_r \times (r'\mathbf{e}_r + r\theta'\mathbf{e}_\theta) = r^2\theta'(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta)$$

Es inmediato comprobar que $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$, y como $\mathbf{k}$ es un vector unitario, $J = \|\mathbf{J}\| = |r^2\theta'|$. Sin embargo, $\theta' > 0$ pues el planeta se mueve en la dirección contraria a la de las agujas del reloj, con lo que $J = r^2\theta'$. De esta manera, queda demostrado el teorema 2. ■

Demostración de la ley de las elipses

RECORDATORIO *Según la ec. (1):*

$$\mathbf{r}''(t) = -\frac{k}{r(t)^2}\,\mathbf{e}_r$$

donde $\mathbf{r}(t) = \|\mathbf{r}(t)\|$.

Sea $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$ el vector velocidad. Entonces $\mathbf{r}'' = \mathbf{v}'$ y la ec. (1) se puede expresar como:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{k}{r(t)^2}\,\mathbf{e}_r \qquad \boxed{6}$$

Por otra parte, según la regla de la cadena y la relación $r(t)^2\theta'(t) = J$ de la ec. (3),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = \theta'(t)\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = \frac{J}{r(t)^2}\frac{d\mathbf{v}}{d\theta}$$

Junto con la ec. (6), esto conduce a $J\dfrac{d\mathbf{v}}{d\theta} = -k\mathbf{e}_r$, o, lo que es lo mismo:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = -\frac{k}{J}\mathbf{e}_r = -\frac{k}{J}\langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$$

Se trata de una ecuación diferencial de primer orden que no involucra el tiempo t. Se puede resolver integrando:

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{J}\int \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle\, d\theta = \frac{k}{J}\langle -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta\rangle + \mathbf{c} = \frac{k}{J}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{c} \qquad \boxed{7}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector arbitrario constante.

Se puede rotar nuestro sistema de coordenadas en el plano de movimiento, de tal manera que se puede suponer que $\mathbf{c}$ apunta en la dirección del eje y. Así, se puede expresar $\mathbf{c} = \langle 0, (k/J)e\rangle$ para alguna constante e. La demostración f naliza calculando $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\mathbf{e}_r \times \left(\frac{k}{J}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{c}\right) = \frac{k}{J}r(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_r \times \langle 0, e\rangle)$$

Por cálculo directo se obtiene:

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k} \qquad \mathbf{e}_r \times \langle 0, e\rangle = (e\cos\theta)\mathbf{k}$$

de manera que nuestra ecuación resulta $\mathbf{J} = \dfrac{k}{J}r(1 + e\cos\theta)\mathbf{k}$. Como $\mathbf{k}$ es un vector unitario:

$$J = \|\mathbf{J}\| = \frac{k}{J}r(1 + e\cos\theta)$$

RECORDATORIO *La ecuación de una sección cónica en coordenadas polares se trata en la sección 12.5.*

Aislando r, se obtiene la ecuación polar de una sección cónica de excentricidad e (una elipse, parábola o hipérbola):

$$r = \frac{J^2/k}{1 + e\cos\theta}$$

Este resultado prueba que si un planeta se mueve alrededor del Sol siguiendo una órbita acotada, entonces ésta debe ser una elipse. Existen también "órbitas abiertas" que son, o bien parabólicas o bien hiperbólicas. Describen cometas que pasan cerca del Sol y que continúan por el espacio sin volver. En nuestra deducción, se supuso implícitamente que $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$. Si $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, entonces $\theta'(t) = 0$. En tal caso, la órbita es una línea recta y el planeta se precipita directamente hacia el Sol.

La tercera ley de Kepler se comprueba en los problemas 23 y 24.

UN APUNTE CONCEPTUAL Se ha utilizado que **J** es constante para demostrar la ley de las elipses sin ni siquiera determinar una fórmula para el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ del planeta como función del tiempo t. De hecho, $\mathbf{r}(t)$ no se puede expresar en términos de funciones elementales. Esto ilustra un principio importante: en algunas ocasiones se puede describir las soluciones de una ecuación diferencial incluso aunque no sea posible expresarlas de forma explícita.

El telescopio espacial Hubble obtuvo esta imagen de las galaxias Antennae, dos galaxias que empezaron a unirse hace cientos de millones de años.

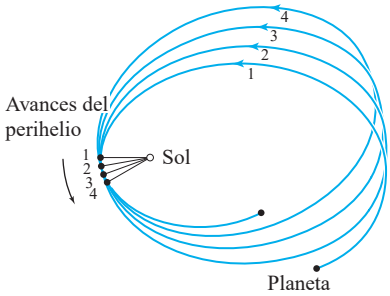


FIGURA 6 El perihelio de una órbita cambia lentamente con el tiempo. Para Mercurio, el semieje mayor realiza una revolución completa una vez cada 24 000 años.

Constantes:

- *Constante gravitacional:*

$$G \approx 6{,}673 \times 10^{-11}\ \text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$$

- *Masa del Sol:*

$$M \approx 1{,}989 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

- $k = GM \approx 1{,}327 \times 10^{20}$

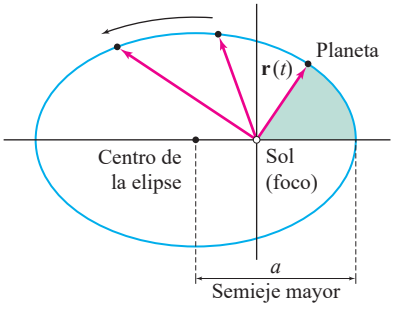


FIGURA 7 Órbita planetaria.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Los astrónomos del mundo antiguo (Babilonia, Egipto y Grecia) realizaron un mapa del cielo nocturno con una precisión impresionante, pero sus modelos del movimiento planetario estaban basados en el supuesto erróneo de que los planetas giraban alrededor de la Tierra. Aunque el astrónomo griego Aristarco (310-230 a.C.) sugirió que la Tierra giraba alrededor del Sol, esta idea se rechazó y olvidó durante casi diecinueve siglos, hasta que el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) introdujo un conjunto de ideas revolucionarias sobre el sistema solar, incluyendo la hipótesis de que los planetas giraban alrededor del Sol. Copérnico allanó el camino a la siguiente generación, sobre todo a Tycho Brahe (1546-1601), Galileo Galilei (1564-1642) y Johannes Kepler (1571-1630).

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue el hijo de un soldado mercenario que aparentemente dejó a su familia cuando Johannes tenía 5 años y pudo haber muerto en la guerra. Fue criado por su madre en la posada de su abuelo. La brillantez matemática de Kepler le valió una beca en la Universidad de Tübingen y a la edad de 29 años, fue a trabajar para el astrónomo danés Tycho Brahe, que había recopilado la más completa y precisa colección de datos sobre el movimiento planetario de aquellos tiempos. Cuando murió en 1601, Kepler lo sucedió como "Matemático Imperial" del Emperador del Sacro Imperio Romano Germánico y en 1609 formuló las dos primeras de sus leyes del movimiento planetario en una obra titulada *Astronomia Nova* (*Nueva Astronomía*).

En los siglos que han transcurrido desde la muerte de Kepler, al aumentar la capacidad de observación, los astrónomos observaron que las órbitas de los planetas no eran exactamente elípticas. Además, el perihelio (el punto sobre la órbita más cercano al Sol) se desplaza lentamente al transcurrir el tiempo (f gura 6). La mayoría de estas desviaciones pueden explicarse por la atracción mutua de los planetas, pero el cambio del perihelio de Mercurio es más grande que el que puede ser explicado por las leyes de Newton. El 18 de noviembre de 1915, Albert Einstein hizo un descubrimiento sobre el que más tarde escribió a un amigo, "Estuve extasiado durante días". Había estado trabajando durante una década en la **Teoría de la Relatividad General**, una teoría que reemplazaría la ley de la gravitación de Newton por un conjunto de ecuaciones más complicadas llamadas las ecuaciones del campo de Einstein. En aquel 18 de noviembre, Einstein probó que el cambio en el perihelio de Mercurio quedaba explicado con precisión por su nueva teoría. En aquel momento, fue la única evidencia importante de que la Teoría de la Relatividad General era correcta.

14.6 RESUMEN

- Tres leyes de Kepler para el movimiento planetario:
  - Ley de las elipses.
  - Ley de igual área en igual tiempo.
  - Ley del periodo $T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{GM}\right)a^3$, donde T es el periodo (tiempo necesario para completar una revolución completa) y a es el semieje mayor (f gura 7).
- Según la ley de la gravitación universal de Newton y la segunda ley del movimiento de Newton, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de un planeta cumple la ecuación diferencial:

$$\mathbf{r}''(t) = -\frac{k}{r(t)^2}\mathbf{e}_r \qquad \text{donde } r(t) = \|\mathbf{r}(t)\| \quad y \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}$$

- Propiedades de $\mathbf{J} = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$:
  - $\mathbf{J}$ es una constante del movimiento planetario.
  - Sea $J = \|\mathbf{J}\|$. Entonces $J = r(t)^2\theta'(t)$.
  - El planeta barre el área a razón $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}J$.
- Una órbita planetaria tiene ecuación polar $r = \dfrac{J^2/k}{1 + e\cos\theta}$, donde e es la excentricidad de la órbita.

14.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Describa la relación entre el vector $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ y la tasa a la que el vector radial barre el área.

2. La ecuación (1) muestra que $\mathbf{r}''$ es proporcional a $\mathbf{r}$. Explique de qué manera este resultado se utiliza para demostrar la segunda ley de Kepler.

3. ¿Cuál es el cambio en el periodo T si el semieje mayor a se cuadruplica?

Problemas

1. La tercera ley de Kepler afirma que T^2/a^3 tiene el mismo valor para cualquier órbita planetaria. Los datos de la siguiente tabla, ¿corroboran esta conclusión? Estime la longitud del periodo de Júpiter, suponiendo que $a = 77{,}8 \times 10^{10}$ m.

Planeta	Mercurio	Venus	Tierra	Marte
a (10^{10} m)	5,79	10,8	15,0	22,8
T (años)	0,241	0,615	1,00	1,88

2. Hallar la masa de una estrella Usando la tercera ley de Kepler, pruebe que si un planeta gira alrededor de una estrella con periodo T y semieje mayor a, entonces la masa de la estrella es $M = \left(\dfrac{4\pi^2}{G}\right)\left(\dfrac{a^3}{T^2}\right)$.

3. Ganímedes, uno de los satélites de Júpiter descubierto por Galileo, tiene un periodo orbital de 7,154 días y un semieje mayor de $1{,}07\times$ $\times 10^9$ m. Use el problema 2 para estimar la masa de Júpiter.

4. Un astrónomo observa un planeta en órbita alrededor de una estrella cuyo periodo es de 9,5 años y su semieje mayor es de 3×10^8 km. Halle la masa de la estrella usando el problema 2.

5. Masa de la Vía Láctea El Sol gira alrededor del centro de la Vía Láctea en una órbita que es aproximadamente circular, de radio $a \approx$ $\approx 2{,}8 \times 10^{17}$ km y velocidad $v \approx 250$ km/s. Use el resultado del problema 2 para estimar la masa de la porción de la Vía Láctea que se encuentra en el interior de la órbita del Sol (sitúe toda esta masa en el centro de la órbita).

6. Un satélite en órbita por encima del ecuador terrestre es **geoestacionario** si su periodo es de $T = 24$ horas (en tal caso, el satélite se mantiene en un punto fijo en el ecuador). Use la tercera ley de Kepler para demostrar que en una órbita geoestacionaria circular, la distancia desde el centro de la Tierra es $R \approx 42\ 246$ km. A continuación, calcule la altitud h de la órbita por encima de la superficie de la Tierra. La masa de la Tierra es $M \approx 5{,}974 \times 10^{24}$ kg y su radio es $R \approx 6371$ km.

7. Pruebe que un planeta cuya órbita es circular se desplaza a celeridad constante. *Indicación:* use que $\mathbf{J}$ es constante y que $\mathbf{r}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t)$ para una órbita circular.

8. Compruebe que la órbita circular:

$$\mathbf{r}(t) = \langle R\cos\omega t, R\,\text{sen}\,\omega t\rangle$$

cumple la ecuación diferencial, ec. (1), siempre que $\omega^2 = kR^{-3}$. A continuación, deduzca la tercera ley de Kepler $T^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{k}\right)R^3$ para esta órbita.

9. Demuestre que si una órbita planetaria es circular de radio R, entonces $vT = 2\pi R$, donde v es la celeridad del planeta (constante según el problema 7) y T es el periodo. A continuación aplique la tercera ley de Kepler para demostrar que $v = \sqrt{\dfrac{k}{R}}$.

10. Halle la velocidad de un planeta en órbita geoestacionaria alrededor de la Tierra. *Indicación:* aplique los problemas 6 y 9.

11. La posición inicial de un satélite de comunicaciones en órbita alrededor de la Tierra es $\mathbf{r} = \langle 29\ 000, 20\ 000, 0\rangle$ (en km) y su velocidad inicial es $\mathbf{r}' = \langle 1, 1, 1\rangle$ (en km/s), siendo el origen el centro de la Tierra. Halle la ecuación del plano que contiene la órbita del satélite. *Indicación:* este plano es ortogonal a $\mathbf{J}$.

12. Suponga que la órbita de la Tierra es circular de radio $R = 150\times 10^6$ km (es prácticamente circular, con excentricidad $e = 0{,}017$). Halle la razón a la que el vector radial de la Tierra barre área en unidades de km^2/s. ¿Cuál es la magnitud del vector $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ para la Tierra (en unidades de km^2 por segundo)?

Para los problemas 13-19: el perihelio y el afelio son los puntos de la órbita más cercano y más lejano al Sol, respectivamente (figura 8). La distancia del Sol al perihelio se denota como r_{per} y la celeridad en este punto se denota como v_{per}. De manera análoga, sean r_{ap} y v_{ap}

la distancia y la celeridad en el afelio. El semieje mayor se denota como a.

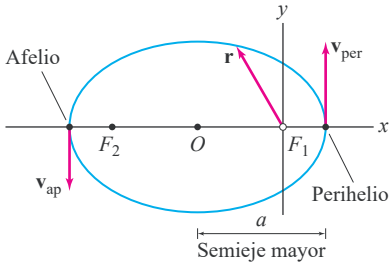


FIGURA 8 **r** y **v** = **r**′ son perpendiculares en el perihelio y en el afelio.

13. Use la ecuación polar de una elipse:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

para demostrar que $r_{per} = a(1 - e)$ y $r_{ap} = a(1 + e)$. *Indicación:* use que $r_{per} + r_{ap} = 2a$.

14. Aplique el resultado del problema 13 para demostrar las fórmulas

$$e = \frac{r_{ap} - r_{per}}{r_{ap} + r_{per}} \qquad p = \frac{2r_{ap}r_{per}}{r_{ap} + r_{per}}$$

15. Use que $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}'$ es constante para demostrar:

$$v_{per}(1 - e) = v_{ap}(1 + e)$$

Indicación: **r** es perpendicular a **r**′ en el perihelio y en el afelio.

16. Calcule r_{per} y r_{ap} para la órbita de Mercurio, cuya excentricidad es $e = 0{,}244$ (vea la tabla del problema 1 para el semieje mayor).

17. Conservación de la energía La energía mecánica total (energía cinética más energía potencial) de un planeta de masa m en órbita alrededor de un sol de masa M cuya posición y celeridad son respectivamente **r** y $v = \|\mathbf{r}'\|$, es:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|} \qquad \boxed{8}$$

(a) Demuestre las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2 = \mathbf{v}\cdot(m\mathbf{a}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|} = \mathbf{v}\cdot\left(-\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}\right)$$

(b) A continuación, use la ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y la ec. (1) para demostrar que la energía se conserva, es decir que $\frac{dE}{dt} = 0$.

18. Pruebe que la energía total [ec. (8)] de un planeta en una órbita circular de radio R es $E = -\frac{GMm}{2R}$. *Indicación:* aplique el problema 9.

19. Demuestre que $v_{per} = \sqrt{\left(\frac{GM}{a}\right)\frac{1+e}{1-e}}$ de la siguiente manera:

(a) Use la conservación de la energía (problema 17) para probar que:

$$v_{per}^2 - v_{ap}^2 = 2GM(r_{per}^{-1} - r_{ap}^{-1})$$

(b) Pruebe que $r_{per}^{-1} - r_{ap}^{-1} = \frac{2e}{a(1 - e^2)}$ utilizando el problema 13.

(c) Pruebe que $v_{per}^2 - v_{ap}^2 = 4\frac{e}{(1+e)^2}v_{per}^2$ utilizando el problema 15. A continuación, aísle v_{per} utilizando (a) y (b).

20. Pruebe que la energía mecánica total de un planeta en órbita elíptica es $E = -\frac{GMm}{2a}$, donde a es el semieje mayor. *Indicación:* aplique el problema 19 para calcular la energía total en el perihelio.

21. Demuestre que $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ en cualquier punto de una órbita elíptica, donde $r = \|\mathbf{r}\|$, v es la celeridad y a es el semieje mayor de la órbita.

22. Dos transbordadores espaciales A y B orbitan alrededor de la Tierra describiendo la trayectoria sólida de la f gura 9. Intentando alcanzar a B, la piloto de A se impulsa hacia adelante aumentando su energía cinética. Use el problema 20 para probar que el transbordador A se desplazará hacia una órbita mayor, tal y como se indica en la f gura. A continuación, use la tercera ley de Kepler para probar que el periodo orbital T de A, aumentará y ¡se alejará cada vez más y más de B)!

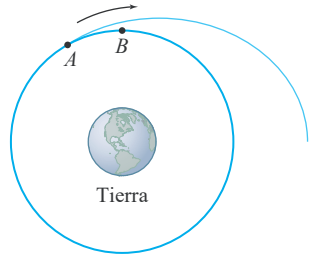


FIGURA 9

Problemas avanzados

En los problemas 23 y 24 se demuestra la tercera ley de Kepler. La f gura 10 muestra una órbita elíptica de ecuación

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

donde $p = J^2/k$. El origen de las coordenadas polares se encuentra en F_1. Sean a y b los semiejes mayor y menor, respectivamente.

23. En este problema se prueba que $b = \sqrt{pa}$.

(a) Muestre que $CF_1 = ae$. *Indicación:* $r_{per} = a(1 - e)$ según el problema 13.

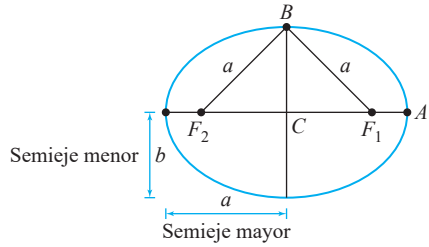


FIGURA 10

(b) Pruebe que $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$.

(c) Pruebe que $F_1A + F_2A = 2a$. Deduzca que $F_1B + F_2B = 2a$ y por tanto $F_1B = F_2B = a$.

(c) Use el teorema de Pitágoras para demostrar que $b = \sqrt{pa}$.

24. El área A de la elipse es $A = \pi ab$.

(a) Demuestre, aplicando la primera ley de Kepler, que $A = \frac{1}{2}JT$, donde T es el periodo de la órbita.

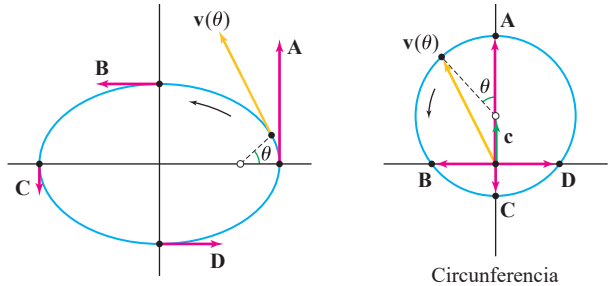
(b) Use el problema 23 para probar que $A = (\pi\sqrt{p})a^{3/2}$.

(c) Deduzca la tercera ley de Kepler: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}a^3$.

25. Según la ec. (7) el vector velocidad de un planeta como función del ángulo θ es:

$$\mathbf{v}(\theta) = \frac{k}{J}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{c}$$

Use este resultado para explicar la siguiente af rmación: cuando un planeta gira alrededor del Sol, su vector velocidad describe una circunferencia de radio k/J cuyo centro está en el punto terminal de $\mathbf{c}$ (f gura 11). Esta hermosa pero oculta propiedad de las órbitas fue descubierta por William Rowan Hamilton en 1847.



Órbita planetaria — Circunferencia descrita por la velocidad

FIGURA 11 El vector velocidad describe una circunferencia cuando el planeta se desplaza sobre su órbita.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Determine los dominios de las siguientes funciones a valores vectoriales.

(a) $\mathbf{r}_1(t) = \langle t^{-1}, (t+1)^{-1}, \operatorname{sen}^{-1} t\rangle$

(b) $\mathbf{r}_2(t) = \langle \sqrt{8 - t^3}, \ln t, e^{\sqrt{t}}\rangle$

2. Dibuje las trayectorias $\mathbf{r}_1(\theta) = \langle \theta, \cos\theta\rangle$ y $\mathbf{r}_2(\theta) = \langle \cos\theta, \theta\rangle$ en el plano xy.

3. Halle una parametrización vectorial para la intersección de las superf cies $x^2 + y^4 + 2z^3 = 6$ y $x = y^2$ en $\mathbb{R}^3$.

4. Halle una parametrización vectorial usando funciones trigonométricas para la intersección del plano $x + y + z = 1$ y el cilindro elíptico $\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{8}\right)^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$.

En los problemas 5-10, calcule la derivada indicada.

5. $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}(t) = \langle 1 - t, t^{-2}, \ln t\rangle$

6. $\mathbf{r}'''(t)$, $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, 4t^2, 7t\rangle$

7. $\mathbf{r}'(0)$, $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-4t^2}, e^{6t}\rangle$

8. $\mathbf{r}''(-3)$, $\mathbf{r}(t) = \langle t^{-2}, (t+1)^{-1}, t^3 - t\rangle$

9. $\dfrac{d}{dt}e^t\langle 1, t, t^2\rangle$

10. $\dfrac{d}{d\theta}\mathbf{r}(\cos\theta)$, $\mathbf{r}(s) = \langle s, 2s, s^2\rangle$

En los problemas 11-14, calcule la derivada en $t = 3$, suponiendo que:

$$\boldsymbol{r}_1(3) = \langle 1, 1, 0\rangle \quad \boldsymbol{r}_2(3) = \langle 1, 1, 0\rangle$$

$$\boldsymbol{r}_1'(3) = \langle 0, 0, 1\rangle \quad \boldsymbol{r}_2'(3) = \langle 0, 2, 4\rangle$$

11. $\dfrac{d}{dt}(6\mathbf{r}_1(t) - 4\cdot\mathbf{r}_2(t))$

12. $\dfrac{d}{dt}\left(e^t\mathbf{r}_2(t)\right)$

13. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t))$

14. $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t))$

15. Calcule $\displaystyle\int_0^3 \langle 4t + 3, t^2, -4t^3\rangle\, dt$.

16. Calcule $\displaystyle\int_0^\pi \langle \operatorname{sen}\theta, \theta, \cos 2\theta\rangle\, d\theta$.

17. Una partícula situada en $(1, 1, 0)$ en el instante $t = 0$ sigue una trayectoria cuyo vector velocidad es $\mathbf{v}(t) = \langle 1, t, 2t^2\rangle$. Halle la situación de la partícula en $t = 2$.

18. Halle la función a valores vectoriales $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ que cumple $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{r}(t)$ con las condiciones iniciales $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 2\rangle$.

19. Calcule $\mathbf{r}(t)$ suponiendo que:

$$\mathbf{r}''(t) = \langle 4 - 16t, 12t^2 - t\rangle \qquad \mathbf{r}'(0) = \langle 1, 0\rangle \qquad \mathbf{r}(0) = \langle 0, 1\rangle$$

20. Resuelva $\mathbf{r}''(t) = \langle t^2 - 1, t + 1, t^3\rangle$ sujeto a las condiciones iniciales $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $\mathbf{r}'(0) = \langle -1, 1, 0\rangle$

21. Calcule la longitud de la trayectoria:

$$\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} 2t, \cos 2t, 3t - 1\rangle \quad \text{para } 1 \le t \le 3$$

22. SAC Exprese la longitud de la trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle \ln t, t, e^t\rangle$ para $1 \le t \le 2$ como una integral def nida y use un programa informático de cálculo simbólico para calcular su valor con dos decimales de precisión.

23. Halle una parametrización por la longitud de arco de una hélice de altura 20 cm que realiza cuatro rotaciones completas respecto a una circunferencia de radio 5 cm.

24. Halle la celeridad mínima de una partícula de trayectoria $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^{t-3}, e^{4-t}\rangle$.

25. Un proyectil que se dispara con un ángulo de 60° alcanza el suelo a 400 m de donde se ha disparado. ¿Cuál fue su celeridad inicial?

26. Un ratón que se ha entrenado especialmente para esta tarea corre en el sentido contrario al de las agujas del reloj sobre una circunferencia de radio 0,6 m sobre el suelo de un ascensor con una rapidez de 0,3 m/s mientras que el ascensor se encuentra ascendiendo desde el nivel del suelo (sobre el eje z) a una rapidez de 12 m/s. Halle el vector aceleración del ratón como función del tiempo. Suponga que la circunferencia está centrada en el origen del plano xy y que el ratón está en $(2, 0, 0)$ en $t = 0$.

27. Durante un corto intervalo de tiempo [0,5, 1,5], la trayectoria de un avión espía no tripulado queda descrita por:

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle -\frac{100}{t^2}, 7 - t, 40 - t^2 \right\rangle$$

Se dispara un láser (en la dirección tangencial) hacia el plano yz en el instante $t = 1$. ¿Qué punto del plano yz alcanza el rayo del láser?

28. Una fuerza $\mathbf{F} = \langle 12t + 4, 8 - 24t \rangle$ (en newtons) actúa sobre una masa de 2 kg. Halle la posición de la masa en $t = 2$ s si se encuentra en $(4, 6)$ en $t = 0$ y tiene velocidad inicial $\langle 2, 3 \rangle$ en m/s.

29. Halle el vector tangente unitario a $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t, \cos t \rangle$ en $t = \pi$.

30. Halle el vector tangente unitario a $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \tan^{-1} t, t \rangle$ en $t = 1$.

31. Calcule $\kappa(1)$ para $\mathbf{r}(t) = \langle \ln t, t \rangle$.

32. Calcule $\kappa(\frac{\pi}{4})$ para $\mathbf{r}(t) = \langle \tan t, \sec t, \cos t \rangle$.

En los problemas 33 y 34, exprese el vector aceleración $\mathbf{a}$ *en el punto que se indica como la suma de sus componentes tangencial y normal.*

33. $\mathbf{r}(\theta) = \langle \cos\theta, \operatorname{sen} 2\theta \rangle, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

34. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t - t^2, t \rangle, \quad t = 2$

35. En un cierto instante t_0, la trayectoria de una partícula en movimiento es tangente al eje y. La celeridad de la partícula en t_0 es 4 m/s, y su vector aceleración es $\mathbf{a} = \langle 5, 4, 12 \rangle$. Determine la curvatura de la trayectoria en t_0.

36. Parametrice la circunferencia osculatriz a $y = x^2 - x^3$ en $x = 1$.

37. Parametrice la circunferencia osculatriz a $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

38. Si un planeta tiene masa igual a cero ($m = 0$), entonces las leyes de Newton del movimiento se reducen a $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{0}$ y la órbita es una línea recta $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_0$, donde $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ y $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(0)$ (f gura 1). Pruebe que el área barrida por el vector radial en el instante t es $A(t) = \frac{1}{2}\|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0\| t$ y, por tanto, la segunda ley de Kepler continúa siendo cierta (la tasa es constante).

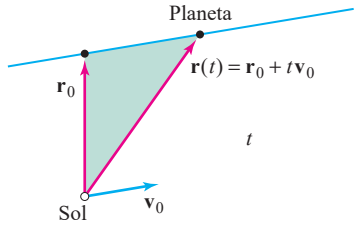


FIGURA 1

39. Suponga que la órbita de un planeta es una elipse de excentricidad $e = c/a$ y periodo T (f gura 2). Use la segunda ley de Kepler para mostrar que el tiempo necesario para viajar desde A' a B' es igual a:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{e}{2\pi}\right) T$$

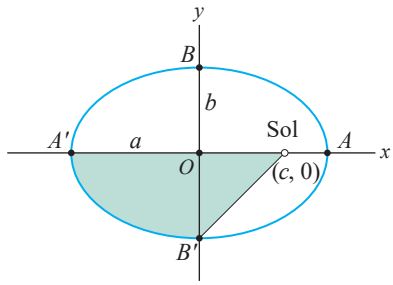


FIGURA 2

40. El periodo de Mercurio es aproximadamente de 88 días y la excentricidad de su órbita es 0,205. ¿Cuánto más tarda Mercurio en ir de A' a B' que de B' a A (f gura 2)?

Los tres famosos picos de los Alpes Suizos: Eiger, Monch y Jungfrau. La pendiente en un punto en una cordillera se mide por el gradiente, un concepto def nido en este capítulo.

15 DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES

En este capítulo se extienden los conceptos y técnicas del cálculo diferencial a funciones de varias variables. Tal y como se verá, una función f que depende de dos o más variables no tiene una sola derivada sino un conjunto de *derivadas parciales*, una para cada variable. Las derivadas parciales son las componentes del vector gradiente, que proporciona información relevante sobre el comportamiento de la función. En las dos últimas secciones, se aplican las herramientas que se han desarrollado a optimización en varias variables.

15.1 Funciones de dos o más variables

Un conocido ejemplo de una función de dos variables es el área A de un rectángulo, igual al producto xy de la base x por la altura y. Se escribe:

$$A(x, y) = xy$$

o $A = f(x, y)$, donde $f(x, y) = xy$. Un ejemplo en tres variables es la distancia de un punto $P = (x, y, z)$ al origen:

$$g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Un ejemplo importante, aunque menos conocido, es la densidad del agua del mar denotada como ρ y que es una función $\rho(S, T)$ de la salinidad S y de la temperatura T (f gura 1). Aunque no existe una fórmula simple para $\rho(S, T)$, los científ cos determinan valores de esta función de forma experimental (f gura 2). Según la tabla 1, si $S = 32$ (en partes por mil) y $T = 10\,^{\circ}\text{C}$, entonces:

$$\rho(32, 10) = 1{,}0246 \text{ kg/m}^3$$

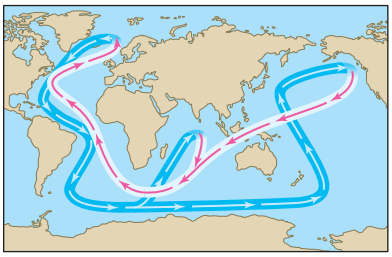


FIGURA 1 El clima mundial está inf uenciado por la "cinta transportadora" del océano, un sistema de corrientes profundas originado por las variaciones en la densidad del agua de mar.

TABLA 1 Densidad del agua del mar ρ (kg/m^3) como función de la temperatura y la salinidad.

	Salinidad (ppt)		
°C	32	32,5	33
5	1,0253	1,0257	1,0261
10	1,0246	1,0250	1,0254
15	1,0237	1,0240	1,0244
20	1,0224	1,0229	1,0232

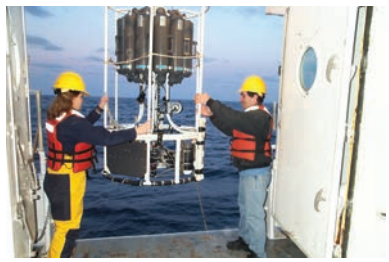


FIGURA 2 Se utiliza un instrumento de conductividad-temperatura-profundidad (depth, en inglés) (CDT) para medir variables del agua del mar como densidad, temperatura, presión y salinidad.

Una función de n variables es una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ que asigna un número real a cada n-pla $(x_1, \ldots, x_n)$ en un dominio en $\mathbb{R}^n$. En algunas ocasiones se escribe $f(P)$ el valor de f en un punto $P = (x_1, \ldots, x_n)$. Cuando f está def nida por una fórmula, se suele considerar como dominio el conjunto de todas las n-plas para las que $f(x_1, \ldots, x_n)$ está def nida. El rango de f es el conjunto de todos los valores $f(x_1, \ldots, x_n)$ para $(x_1, \ldots, x_n)$ del dominio. Como nos vamos a centrar en funciones de dos o tres variables, se va a utilizar con frecuencia las variables x, y y z (en lugar de x_1, x_2, x_3).

EJEMPLO 1 Dibuje los dominios de:

(a) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$ **(b)** $g(x,y,z) = x\sqrt{y} + \ln(z-1)$

¿Cuáles son los rangos de estas funciones?

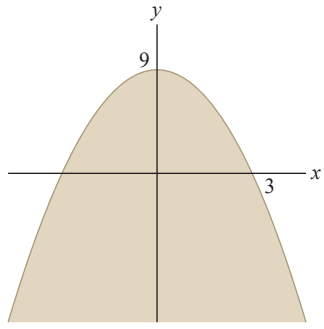
Solución

(a) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$ está definida únicamente cuando $9 - x^2 - y \geq 0$, o $y \leq 9 - x^2$. Por tanto, el dominio consiste en todos los puntos (x,y) que se encuentran por debajo de la parábola $y = 9 - x^2$ [figura 3(A)]:

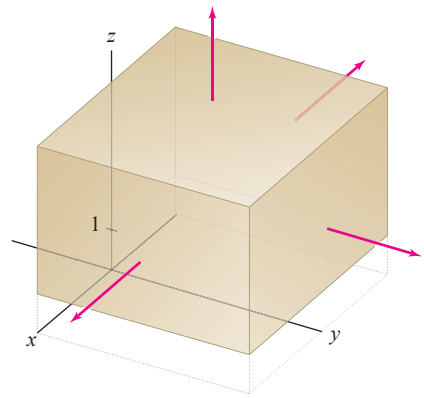
$$\mathcal{D} = \{(x,y) : y \leq 9 - x^2\}$$

Para determinar el rango, observe que f es una función no negativa y que $f(0,y) = \sqrt{9 - y}$. Como $9 - y$ puede ser cualquier número positivo, $f(0,y)$ alcanza todos los valores no negativos. En consecuencia, el rango de f es el intervalo infinito $[0, +\infty)$.

(b) $g(x,y,z) = x\sqrt{y} + \ln(z-1)$ está definida únicamente cuando tanto $\sqrt{y}$ como $\ln(z-1)$ estén definidos. Se debe exigir que $y \geq 0$ y que $z > 1$, por lo que el dominio es $\{(x,y,z) : y \geq 0, z > 1\}$ [figura 3(B)]. El rango de g es la recta real $\mathbb{R}$. De hecho, para las elecciones concretas de $y = 1$ y de $z = 2$, se tiene que $g(x,1,2) = x\sqrt{1} + \ln 1 = x$ y como x es arbitraria, se tiene que g alcanza cualquier valor real.



(A) El dominio de $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$ es el conjunto de todos los puntos (x, y) que se encuentran por debajo de la parábola $y = 9 - x^2$.



(B) El dominio de $g(x, y, z) = x\sqrt{y} + \ln(z - 1)$ es el conjunto de todos los puntos tales que $y \geq 0$ y $z > 1$. El dominio se extiende hasta infinito en las direcciones indicadas por las flechas.

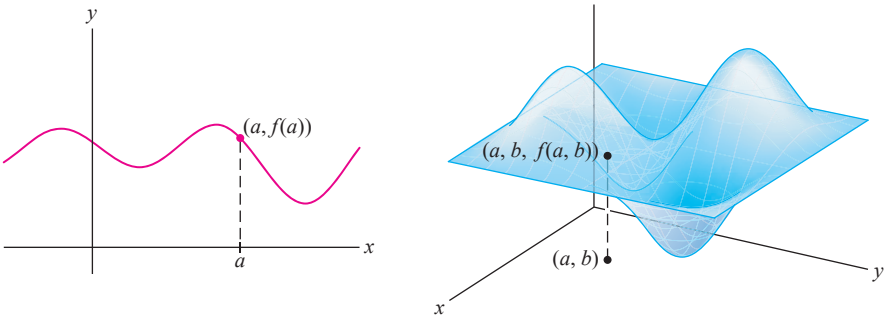
FIGURA 3

Representación de funciones de dos variables

En cálculo de una variable, se utilizaban las gráficas para visualizar los aspectos más relevantes de una función. Las gráficas desempeñan un papel similar para las funciones de dos variables. La gráfica de $f(x,y)$ está formada por el conjunto de todos los puntos $(a, b, f(a,b))$ en $\mathbb{R}^3$ para (a,b) en el dominio $\mathcal{D}$ de f. Suponiendo que f es continua (según la definición de la siguiente sección), la gráfica es una superficie cuya *altura* por encima o por debajo del plano xy en (a,b) es el valor de la función $f(a,b)$ [figura 4]. Se suele expresar $z = f(x,y)$ para enfatizar el hecho que la coordenada z de un punto de la gráfica es una función de x y de y.

EJEMPLO 2 Dibuje la gráfica de $f(x,y) = 2x^2 + 5y^2$.

Solución La gráfica es un paraboloide (figura 5), que se vieron en la sección 13.6. Se puede dibujar la gráfica utilizando el hecho de que la sección transversal horizontal (llamada "traza" horizontal, más adelante) a la altura z es la elipse $2x^2 + 5y^2 = z$.



(A) Gráfica de $y = f(x)$ (B) Gráfica de $z = f(x, y)$

FIGURA 4

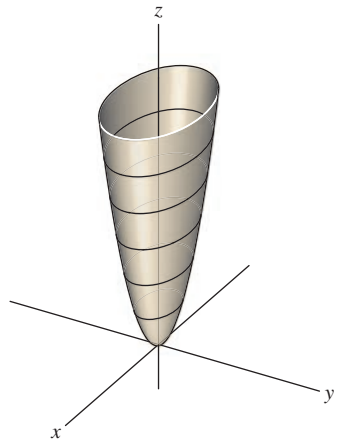


FIGURA 5 Gráf ca de $f(x,y) = 2x^2 + 5y^2$.

La representación a mano de gráf cas más complicadas puede ser dif cultoso. Afortunadamente, los programas informáticos de cálculo simbólico ahorran trabajo y mejoran en gran medida nuestra capacidad para explorar las funciones gráf camente. Los gráf cos se pueden girar y verse desde diferentes perspectivas (f gura 6).

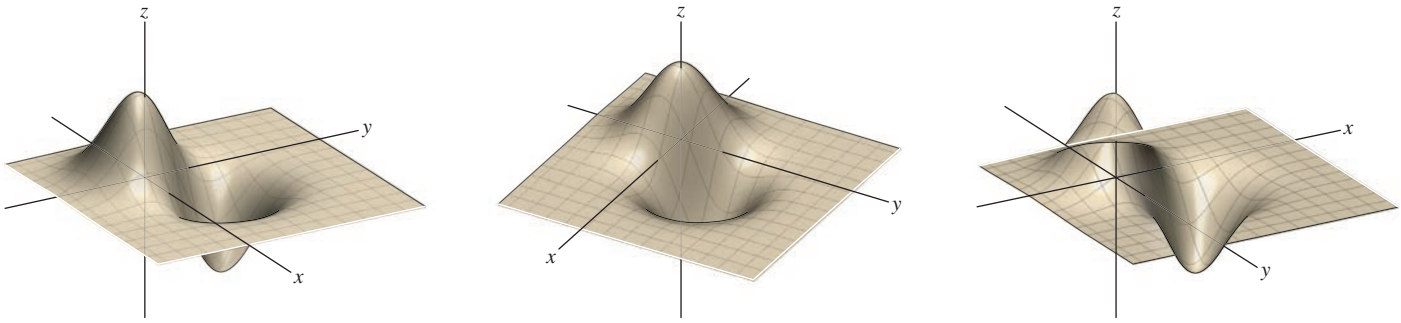


FIGURA 6 Diferentes perspectivas de $z = e^{-x^2-y^2} - e^{-(x-1)^2-(y-1)^2}$.

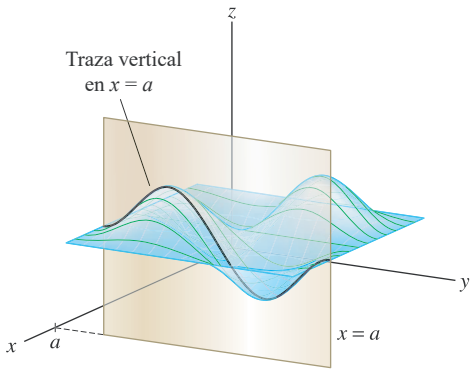
Trazas y curvas de nivel

Una manera de analizar la gráf ca de una función $f(x,y)$ es bloquear la coordenada x considerando $x = a$ y examinar la curva resultante $z = f(a,y)$. De manera análoga, se puede considerar $y = b$ y estudiar la curva $z = f(x,b)$. Las curvas de este tipo se denominan **trazas verticales**. Se obtienen intersecando la gráf ca con planos paralelos a un plano coordenado vertical (f gura 7):

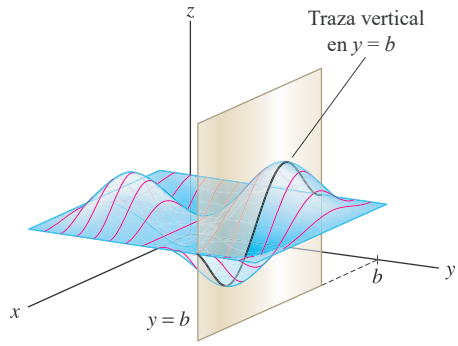
- **Traza vertical en el plano $x = a$:** intersección de la gráf ca con el plano vertical $x = a$, formada por todos los puntos $(a, y, f(a,y))$.
- **Traza vertical en el plano $y = b$:** intersección de la gráf ca con el plano vertical $y = b$, formada por todos los puntos $(x, b, f(x,b))$.

EJEMPLO 3 Describa las trazas verticales de $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$.

Solución Cuando se bloquea la coordenada x considerando $x = a$, se obtiene la traza $z = a \operatorname{sen} y$ (vea la f gura 8). Se trata de la curva correspondiente al seno, pero situada en el plano $x = a$. Si se considera $y = b$, se obtiene una recta $z = (\operatorname{sen} b)y$ de pendiente $\operatorname{sen} b$, situada en el plano $y = b$. ■

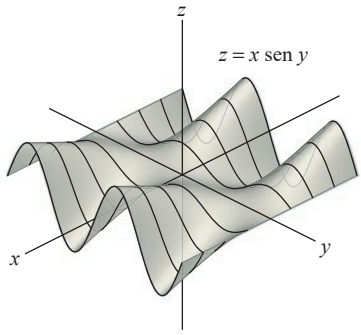


(A) Trazas verticales paralelas al plano yz

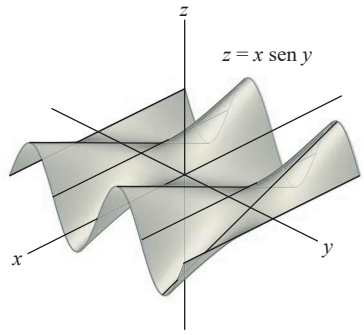


(B) Trazas verticales paralelas al plano xz

FIGURA 7



(A) Las trazas en los planos $x = a$ son las curvas $z = a$ (sen y).



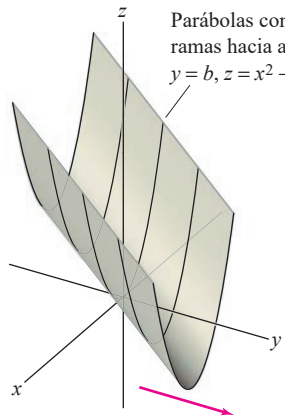
(B) Las trazas en los planos $y = b$ son las rectas $z =$ (sen b) y.

FIGURA 8 Trazas verticales de $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

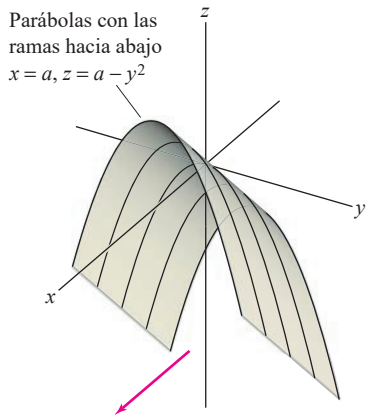
EJEMPLO 4 Identificando características de una gráfica Relacione las gráficas de la figura 9 con las siguientes funciones:

(i) $f(x, y) = x - y^2$ (ii) $g(x, y) = x^2 - y$

Solución Comparemos las trazas verticales. Las trazas verticales de $f(x, y) = x - y^2$ en el plano $x = a$ son parábolas *con las ramas hacia abajo* $z = a - y^2$. Esto concuerda con (B).



(A)



(B)

FIGURA 9

Por otra parte, la traza vertical de $g(x,y)$ en el plano $y = b$ es una parábola *con las ramas hacia arriba* $z = x^2 - b$, lo que concuerda con (A).

Observe también que $f(x,y) = x - y^2$ es una función creciente de x (es decir, $f(x,y)$ crece cuando x crece) como ocurre en (B), mientras que $g(x,y) = x^2 - y$ es una función decreciente de y, como en (A). ■

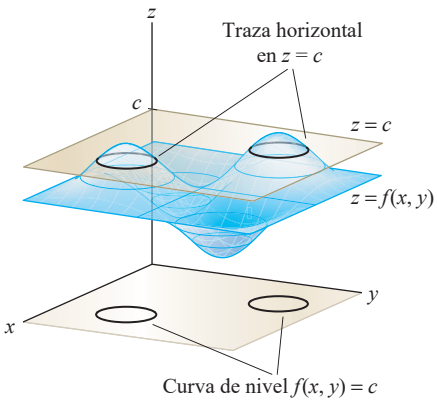


FIGURA 10 La curva de nivel está formada por todos los puntos (x,y) en los que la función alcanza el valor c.

Curvas de nivel y mapas de contorno

Además de las trazas verticales, la gráfica de $f(x,y)$ tiene también trazas horizontales. Estas trazas y sus curvas de nivel son especialmente importantes al analizar el comportamiento de la función (figura 10):

- **Traza horizontal a la altura c:** intersección de la gráfica con el plano horizontal $z = c$, formada por todos los puntos $(x, y, f(x,y))$ tales que $f(x,y) = c$.
- **Curva de nivel:** la curva $f(x,y) = c$ en el plano xy.

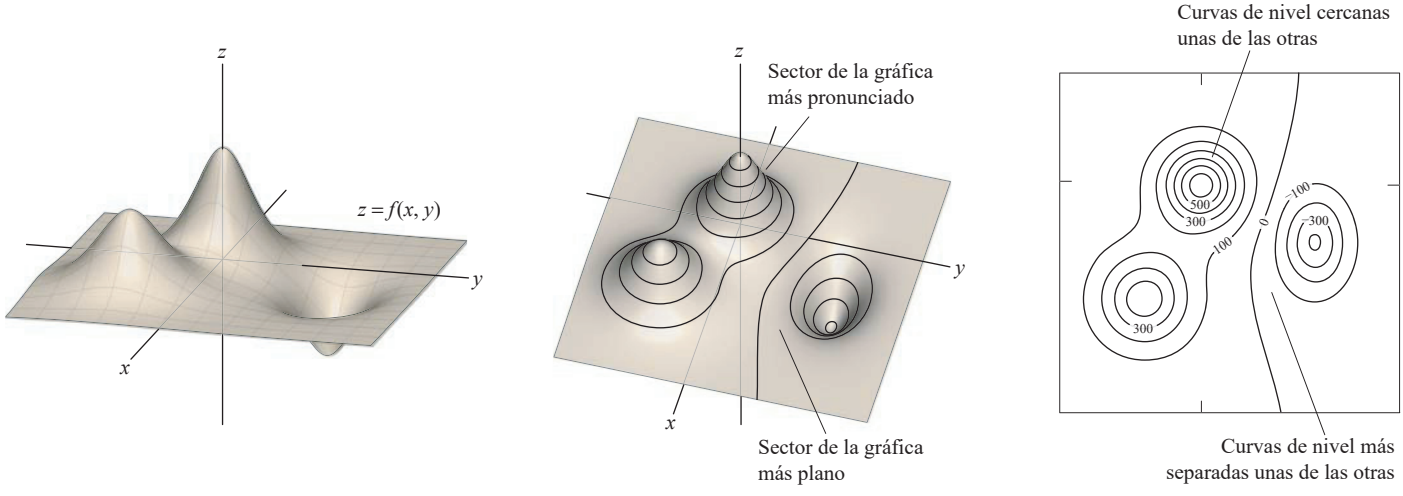
Por tanto, la curva de nivel está formada por todos los puntos (x,y) en el plano para los que la función alcanza el valor c. Cada curva de nivel es la proyección sobre el plano xy de la traza horizontal sobre la gráfica que se encuentra por encima de ella.

Un **mapa de contorno** es una representación en el plano xy que muestra las curvas de nivel $f(x,y) = c$ para valores equiespaciados de c. El intervalo m entre los valores se denomina el **intervalo de contorno**. Cuando se desplaza de una curva de nivel a la siguiente, el valor de $f(x,y)$ (y por tanto la altura de la gráfica) cambia en $\pm m$.

La figura 11 compara la gráfica de una función $f(x,y)$ en (A) y sus trazas horizontales en (B) con el mapa de contorno en (C). El mapa de contorno de (C) tiene intervalo de contorno $m = 100$.

En los mapas de contorno, se suele mencionar a las curvas de nivel como las ***líneas de contorno****.*

Es importante entender de qué manera el mapa de contorno informa sobre la inclinación o pendiente de una gráfica. Si las curvas de nivel están cerca unas de las otras, entonces un pequeño movimiento en el plano xy da lugar a un gran cambio en la altura. Dicho de otro modo, *las curvas de nivel están cerca unas de las otras si la gráfica es muy pronunciada* (figura 11). De manera análoga, la gráfica es más plana cuando las curvas de nivel están más separadas unas de las otras.



(A) (B) Trazas horizontales (C) Mapa de contorno

FIGURA 11

■ **EJEMPLO 5** **Paraboloide elíptico** Dibuje el mapa de contorno de $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ y comente la separación entre las curvas de nivel.

Solución La ecuación de las curvas de nivel es $f(x,y) = c$, o:

$$x^2 + 3y^2 = c$$

- Para $c > 0$, la curva de nivel es una elipse.
- Para $c = 0$, la curva de nivel es únicamente el punto $(0, 0)$, pues $x^2 + 3y^2 = 0$ sólo si $(x, y) = (0, 0)$.
- La curva de nivel no está formada por ningún punto si $c < 0$, pues $f(x, y)$ nunca es negativa.

La gráfica de $f(x, y)$ es un paraboloide elíptico (figura 13). Al alejarnos del origen, $f(x, y)$ aumenta más rápidamente. La gráfica resulta más pronunciada y las curvas de nivel están más cercanas unas de las otras. ■

EJEMPLO 6 Paraboloide hiperbólico Dibuje el mapa de contorno de $g(x, y) = x^2 - 3y^2$.

Solución Las ecuaciones de las curvas de nivel son $g(x, y) = c$, o:

$$x^2 - 3y^2 = c$$

- Para $c \neq 0$, la curva de nivel es la hipérbola $x^2 - 3y^2 = c$.
- Para $c = 0$, la curva de nivel está formada por dos rectas $x = \pm\sqrt{3}y$, pues la ecuación $g(x, y) = 0$ se puede factorizar de la siguiente manera:

$$x^2 - 3y^2 = 0 = (x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y) = 0$$

La gráfica de $g(x, y)$ es un paraboloide hiperbólico (figura 13). Empezando en el origen, $g(x, y)$ crece al desplazarse en ambas direcciones sobre el eje x y decrece al moverse por el eje y en cualquier dirección. Además, la gráfica es más pronunciada al alejarse del origen, pues las curvas de nivel se encuentran más cerca unas de las otras. ■

RECORDATORIO *El paraboloide hiperbólico de la figura 13 se denomina a menudo "silla" o "superficie en forma de silla".*

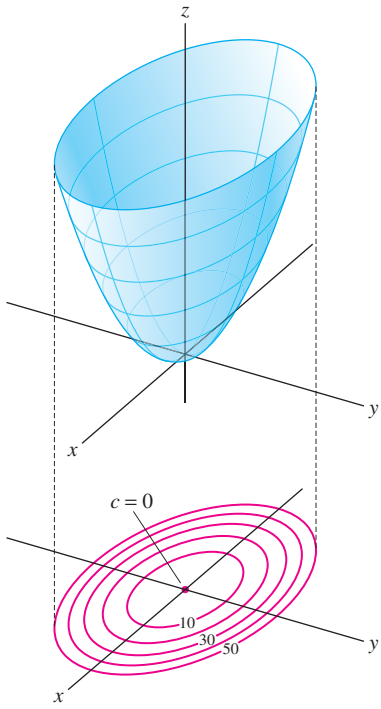


FIGURA 12 $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.
Intervalo de contorno $m = 10$.

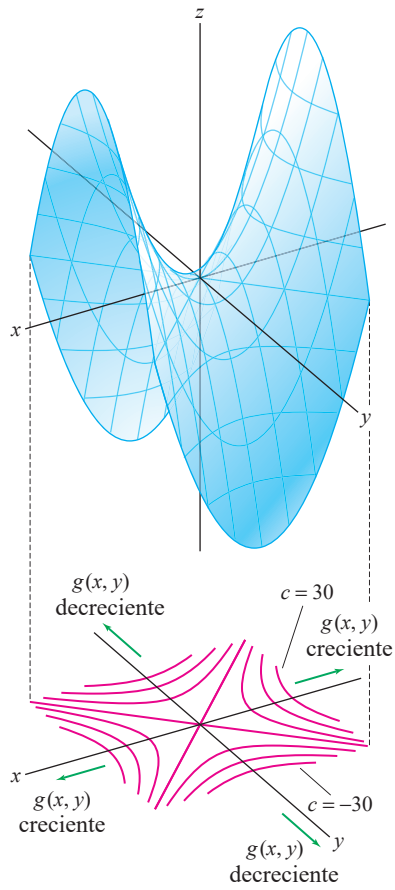


FIGURA 13 $g(x, y) = x^2 - 3y^2$.
Intervalo de contorno $m = 10$.

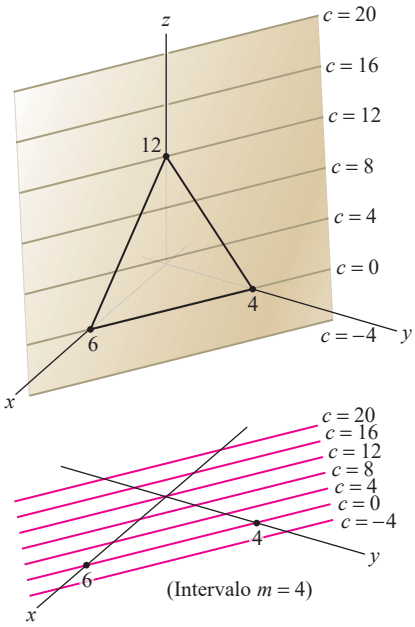


FIGURA 14 Gráf ca y mapa de contorno de $f(x,y) = 12 - 2x - 3y$.

EJEMPLO 7 Mapa de contorno de una función lineal Dibuje la gráf ca de $f(x,y) = = 12 - 2x - 3y$ y el mapa de contorno asociado, considerando como intervalo de contorno $m = 4$.

Solución Para representar la gráf ca, que es un plano, se determinan los puntos de intersección con los ejes (f gura 14). La gráf ca corta el eje z en $z = f(0,0) = 12$. Para hallar la intersección con el eje x, considere $y = z = 0$, obteniendo $12 - 2x - 3 \cdot 0 = 0$, o $x = 6$. De manera análoga, resolviendo $12 - 3y = 0$ se obtiene la intersección con el eje y, que es $y = 4$. La gráf ca es el plano determinado por los tres puntos de intersección.

En general, las curvas de nivel de una función lineal $f(x,y) = qx + ry + s$ son las rectas de ecuación $qx + ry + s = c$. Por tanto, *el mapa de contorno de una función lineal está formado por rectas paralelas a distancia constante*. En el caso que nos ocupa, las curvas de nivel son las rectas $12 - 2x - 3y = c$, o $2x + 3y = 12 - c$ (f gura 14). ■

¿Cómo se puede medir el pronunciamiento de forma cuantitativa? Imagine la super- f cie $z = f(x,y)$ como una cordillera montañosa. En realidad, los mapas de contorno (también llamados mapas topográf cos) son ampliamente utilizados para describir el terreno (f gura 15). Considere el plano xy a nivel del mar de tal manera que $f(a,b)$ es la altura (también llamada altitud o elevación) de la montaña por encima del nivel del mar en el punto (a,b) del plano.

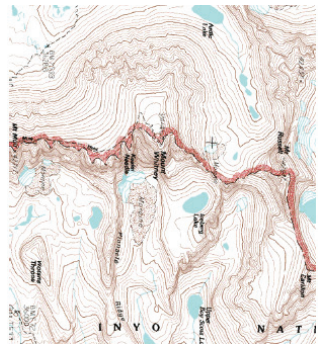


FIGURA 15 Cordillera del monte Whitney en California, con mapa de contorno.

La f gura 16 muestra dos puntos P y Q en el plano xy, junto con los puntos $\widetilde{P}$ y $\widetilde{Q}$ sobre la gráf ca, que se encuentran por encima de ellos. Se def ne la **tasa media de cambio**:

$$\text{Tasa media de cambio de } P \text{ a } Q = \frac{\Delta \text{ altitud}}{\Delta \text{ horizontal}}$$

donde

Δ altitud = cambio en la altura de $\widetilde{P}$ a $\widetilde{Q}$

Δ horizontal = distancia de P a Q

EJEMPLO 8 Calcule la tasa media de cambio de $f(x,y)$ de P a Q para la función cuyo gráf co se muestra en la f gura 16.

Solución El segmento $\overline{PQ}$ abarca tres curvas de nivel y el intervalo de contorno es de 0,8 km, por lo que el cambio en altitud de $\widetilde{P}$ a $\widetilde{Q}$ es $3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ km. Según la escala horizontal del mapa de contorno, se tiene que la distancia horizontal de PQ es de 2 km y, por tanto:

$$\text{Tasa media de cambio de } P \text{ a } Q = \frac{\Delta \text{ altitud}}{\Delta \text{ horizontal}} = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2$$

En media, la ganancia en la altitud es de 1,2 veces la distancia horizontal recorrida, cuando se asciende desde $\tilde{P}$ a $\tilde{Q}$. ■

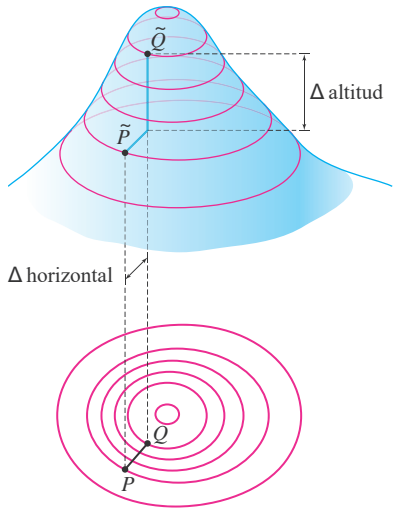


FIGURA 16

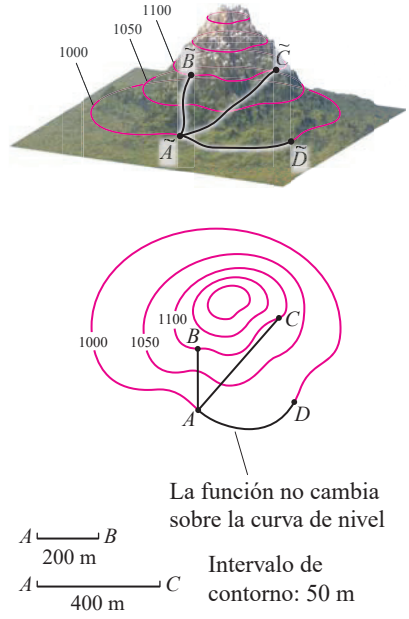


FIGURA 17

UN APUNTE CONCEPTUAL Se examinará la idea de que la tasa de cambio depende de la dirección cuando se traten las derivadas direccionales en la sección 15.5. En cálculo de una variable se mide la tasa de cambio mediante la derivada $f'(a)$. En el caso multivariante, no hay una sola tasa pues el cambio en $f(x, y)$ depende de la dirección: la tasa de cambio sobre una curva de nivel es cero (pues $f(x, y)$ es constante sobre las curvas de nivel), y la tasa es diferente de cero en las direcciones que apuntan de una curva de nivel a la siguiente (f gura 17).

EJEMPLO 9 La tasa de cambio depende de la dirección Calcule la tasa media de cambio desde A a los puntos B, C y D de la f gura 17.

Solución El intervalo de contorno de la f gura 17 es $m = 50$ m. Los dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ abarcan dos curvas de nivel por lo que el cambio en la altitud es de 100 m en ambos casos. La escala horizontal muestra que $\overline{AB}$ corresponde a un cambio horizontal de 200 m y que $\overline{AC}$ corresponde a un cambio horizontal de 400 m. Por otra parte, no hay cambio en la altitud de A a D. Así:

$$\text{Tasa media de cambio de } A \text{ a } B = \frac{\Delta \text{ altitud}}{\Delta \text{ horizontal}} = \frac{100}{200} = 0{,}5$$

$$\text{Tasa media de cambio de } A \text{ a } C = \frac{\Delta \text{ altitud}}{\Delta \text{ horizontal}} = \frac{100}{400} = 0{,}25$$

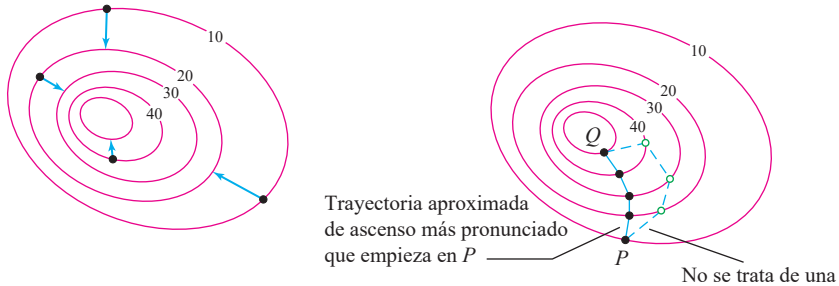
$$\text{Tasa media de cambio de } A \text{ a } D = \frac{\Delta \text{ altitud}}{\Delta \text{ horizontal}} = 0$$

Aquí se puede observar de forma explícita que la tasa media varía según la dirección.

Cuando se sube una montaña, la inclinación en cada momento depende del camino que se escoja. Si se camina "alrededor" de la montaña, nuestra altitud no cambia. Por otra parte, en cada punto hay una dirección de *máximo pronunciamiento* en la que la altitud crece más rápidamente.

Una trayectoria de descenso más pronunciado *es lo mismo que una trayectoria de ascenso más pronunciado pero en sentido opuesto. El agua que desciende por una montaña sigue una trayectoria de descenso más pronunciado.*

En un mapa de contorno, la dirección de máximo pronunciamiento es aproximadamente la dirección que lleva hacia el punto más cercano de la siguiente curva de nivel más alta [f gura 18(A)]. Se utiliza el término "aproximadamente" porque el terreno puede sufrir variaciones entre dos curvas de nivel. Una **trayectoria de ascenso más pronunciado** es una trayectoria que empieza en un punto P y en todo su recorrido apunta en la dirección de máximo pronunciamiento. Se puede aproximar la trayectoria de ascenso más pronunciado dibujando una sucesión de segmentos que van de una curva de nivel a la siguiente, lo más directamente posible. La f gura 18(B) muestra dos trayectorias de P a Q. La trayectoria sólida es la de ascenso más pronunciado pero la trayectoria discontinua no lo es, pues no va de una curva de nivel a la siguiente por medio del segmento más corto.



(A) Vectores que apuntan aproximadamente en la dirección de ascenso más pronunciado

(B)

FIGURA 18

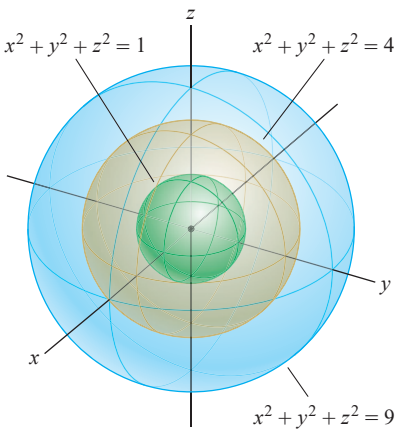


FIGURA 19 Las superf cies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ son esferas.

Más de dos variables

No es posible obtener la gráf ca de una función de más de dos variables. La gráf ca de una función $f(x, y, z)$ estaría formada por el conjunto de puntos $(x, y, z, f(x, y, z))$ en el espacio de cuatro dimensiones $\mathbb{R}^4$. Sin embargo, es posible obtener las **superf cies de nivel** de una función de tres variables $f(x, y, z)$. Se trata de las superf cies de ecuación $f(x, y, z) = c$. Por ejemplo, las superf cies de nivel de:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

son esferas de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = c$ (f gura 19). Para funciones de cuatro o más variables, no es posible visualizar ni la gráf ca ni las superf cies de nivel. Se debe conf ar en la intuición desarrollada a través del estudio de funciones de dos y tres variables.

■ **EJEMPLO 10** Describa las superf cies de nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Solución La superf cie de nivel para $c = 0$ es el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Para $c \neq 0$, las superf cies de nivel son los hiperboloides $x^2 + y^2 - z^2 = c$. El hiperboloide es de una hoja si $c > 0$ y de dos hojas si $c < 0$ (f gura 20). ■

15.1 RESUMEN

- El dominio $\mathcal{D}$ de una función $f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables es el conjunto de las n-plas $(a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathbb{R}^n$ para las que $f(a_1, \ldots, a_n)$ está def nida. El rango de f es el conjunto de valores que f alcanza.
- La gráf ca de una función continua a valores reales $f(x, y)$ es la superf cie de $\mathbb{R}^3$ formada por los puntos $(a, b, f(a, b))$ para (a, b) en el dominio $\mathcal{D}$ de f.
- Una *traza vertical* es una curva que se obtiene mediante la intersección de la gráf ca con un plano vertical de la forma $x = a$ o $y = b$.

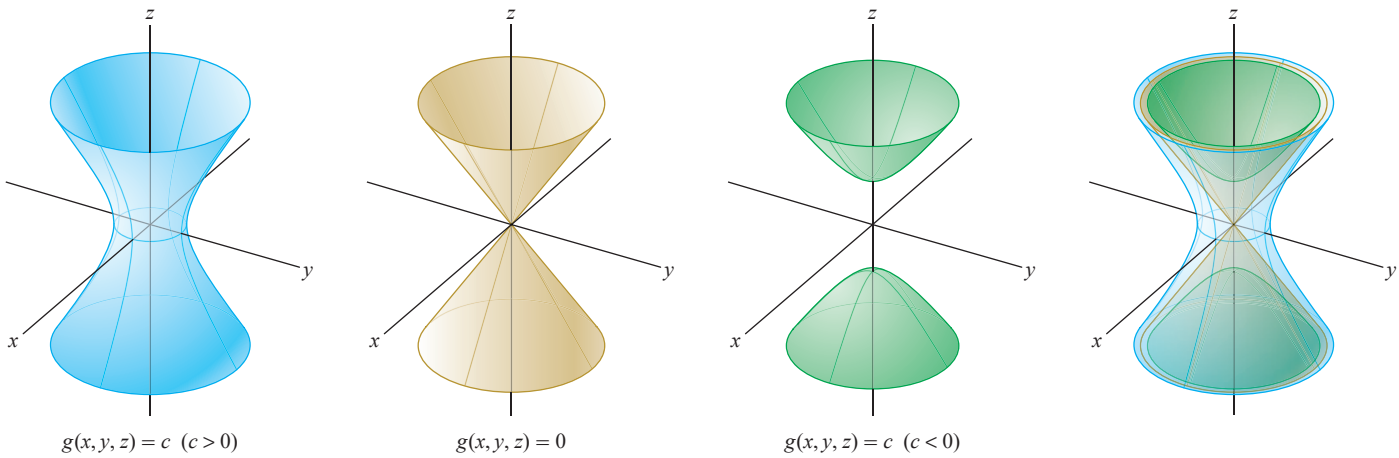


FIGURA 20 Superf cies de nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

- Una *curva de nivel* es una curva en el plano xy def nida mediante una ecuación $f(x, y) = c$. La curva de nivel $f(x, y) = c$ es la proyección sobre el plano xy de la curva traza horizontal, que se obtiene mediante la intersección de la gráf ca con un plano horizontal $z = c$.
- Un *mapa de contorno* muestra las curvas de nivel $f(x, y) = c$ para valores equiespaciados de c. El espacio m se denomina el *intervalo de contorno*.
- Cuando lea un mapa de contorno, tenga presente:
  - su altitud no cambia cuando camina sobre una curva de nivel.
  - su altitud aumenta o disminuye en m (el intervalo de contorno) cuando camina de una curva de nivel a la siguiente.
- El espacio entre curvas de nivel indica el pronunciamiento: las curvas están más cerca unas de las otras donde el gráf co es más pronunciado.
- La *tasa media de cambio* de P a Q es el cociente $\dfrac{\Delta \text{ altitud}}{\Delta \text{ horizontal}}$.
- Una dirección de ascenso más pronunciado P es una dirección sobre la que $f(x, y)$ crece más rápidamente. La dirección de ascenso más pronunciado se obtiene (aproximadamente) dibujando un segmento desde P al punto más cercano de la siguiente curva de nivel.

15.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la diferencia entre una traza horizontal y una curva de nivel? ¿Cuál es su relación?

2. Describa la traza de $f(x, y) = x^2 - \text{sen}(x^3 y)$ en el plano xz.

3. ¿Es posible que dos curvas de nivel diferentes de una función intersequen? Justif que su respuesta.

4. Describa el mapa de contorno de $f(x, y) = x$ con intervalo de contorno 1.

5. ¿Cuál es la diferencia entre los mapas de contorno de

$$f(x, y) = x \quad \text{y} \quad g(x, y) = 2x?$$

Considere el intervalo de contorno igual a 1.

Problemas

En los problemas 1-4, evalúe la función en los puntos que se indica.

1. $f(x, y) = x + yx^3, \quad (2, 2), (-1, 4)$

2. $g(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \quad (1, 3), (3, -2)$

3. $h(x, y, z) = xyz^{-2}, \quad (3, 8, 2), (3, -2, -6)$

4. $Q(y,z) = y^2 + y \operatorname{sen} z, \quad (y,z) = (2, \frac{\pi}{2}), (-2, \frac{\pi}{6})$

En los problemas 5-12, dibuje el dominio de la función.

5. $f(x,y) = 12x - 5y$

6. $f(x,y) = \sqrt{81 - x^2}$

7. $f(x,y) = \ln(4x^2 - y)$

8. $h(x,t) = \dfrac{1}{x+t}$

9. $g(y,z) = \dfrac{1}{z+y^2}$

10. $f(x,y) = \operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$

11. $F(I,R) = \sqrt{IR}$

12. $f(x,y) = \cos^{-1}(x+y)$

En los problemas 13-16, describa el dominio y rango de la función.

13. $f(x,y,z) = xz + e^y$

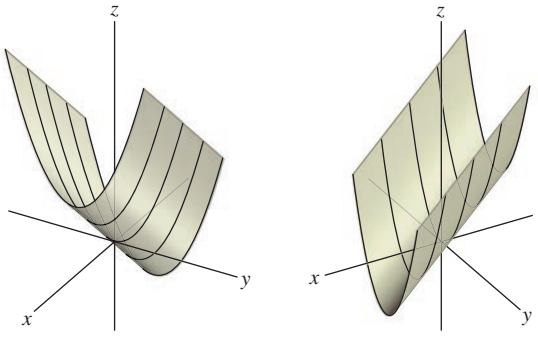
14. $f(x,y,z) = x\sqrt{y+z}e^{z/x}$

15. $P(r,s,t) = \sqrt{16 - r^2 s^2 t^2}$

16. $g(r,s) = \cos^{-1}(rs)$

17. Relacione las gráficas (A) y (B) en la figura 21 con las funciones:

(i) $f(x,y) = -x + y^2$ (ii) $g(x,y) = x + y^2$



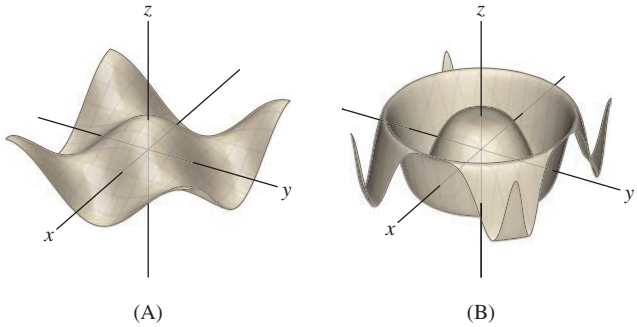
(A) (B)

FIGURA 21

18. Relacione cada uno de los gráficos (A) y (B) en la figura 22 con una de las siguientes funciones:

(i) $f(x,y) = (\cos x)(\cos y)$

(ii) $g(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$



(A) (B)

FIGURA 22

19. Relacione las funciones (a)-(f) con sus gráficas (A)-(F) en la figura 23.

(a) $f(x,y) = |x| + |y|$

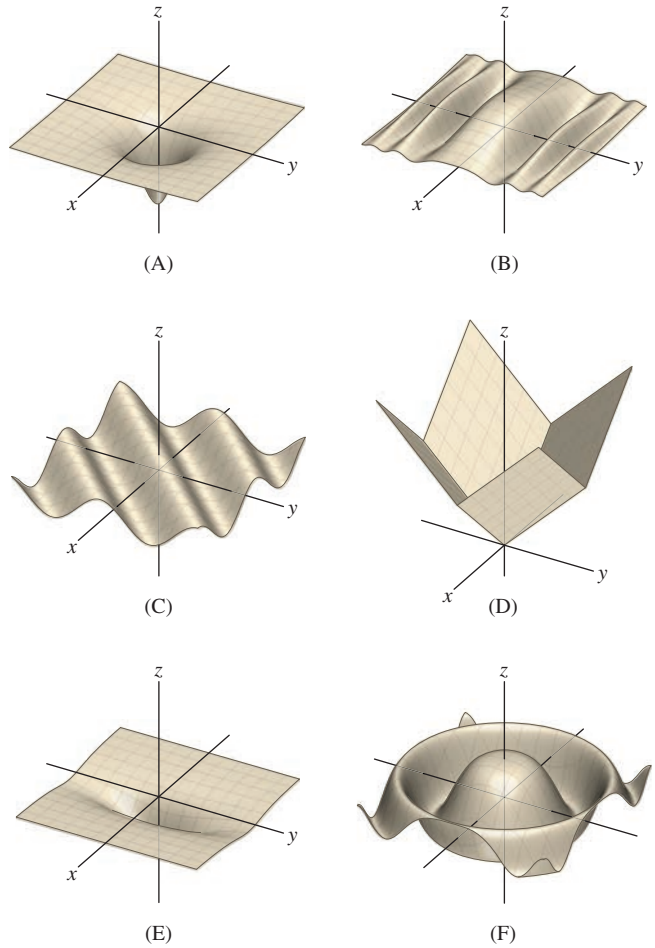
(b) $f(x,y) = \cos(x - y)$

(c) $f(x,y) = \dfrac{-1}{1 + 9x^2 + y^2}$

(d) $f(x,y) = \cos(y^2)e^{-0,1(x^2+y^2)}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{-1}{1 + 9x^2 + 9y^2}$

(f) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)e^{-0,1(x^2+y^2)}$



(A) (B) (C) (D) (E) (F)

FIGURA 23

20. Relacione las funciones (a)-(d) con sus mapas de contorno (A)-(D) en la figura 24.

(a) $f(x,y) = 3x + 4y$

(b) $g(x,y) = x^3 - y$

(c) $h(x,y) = 4x - 3y$

(d) $k(x,y) = x^2 - y$

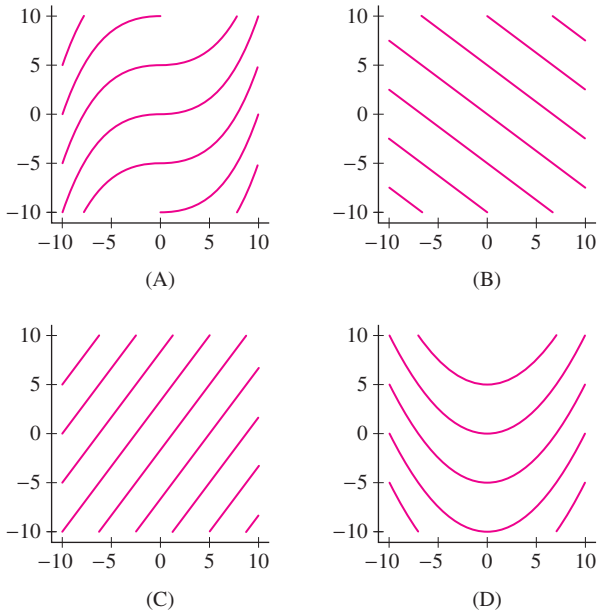


FIGURA 24

En los problemas 21-26, dibuje la gráf ca y describa las trazas horizontales y verticales.

21. $f(x,y) = 12 - 3x - 4y$

22. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

23. $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

24. $f(x,y) = y^2$

25. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x - y)$

26. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$

27. Dibuje mapas de contorno para $f(x,y) = x + y$ con intervalos de contorno $m = 1$ y 2.

28. Dibuje el mapa de contorno de $f(x,y) = x^2 + y^2$ con curvas de nivel $c = 0, 4, 8, 12, 16$.

En los problemas 29-36, dibuje un mapa de contorno para $f(x,y)$ con un intervalo de contorno apropiado, mostrando seis curvas de nivel como mínimo.

29. $f(x,y) = x^2 - y$

30. $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

31. $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

32. $f(x,y) = xy$

33. $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

34. $f(x,y) = x + 2y - 1$

35. $f(x,y) = x^2$

36. $f(x,y) = 3x^2 - y^2$

37. Halle la función lineal cuyo mapa de contorno (con intervalo de contorno $m = 6$) se muestra en la f gura 25. ¿Cuál es la función si $m = 3$ (y la curva etiquetada como $c = 6$ se le cambia la etiqueta a $c = 3$)?

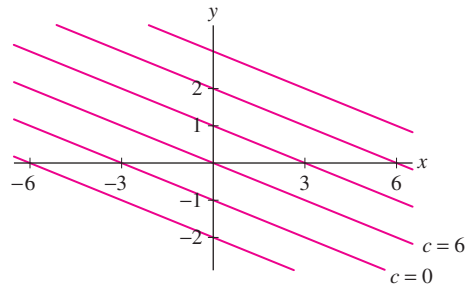


FIGURA 25 Mapa de contorno con intervalo de contorno $m = 6$.

38. Use el mapa de contorno de la f gura 26 para calcular la tasa media de cambio:

(a) de A a B.

(b) de A a C.

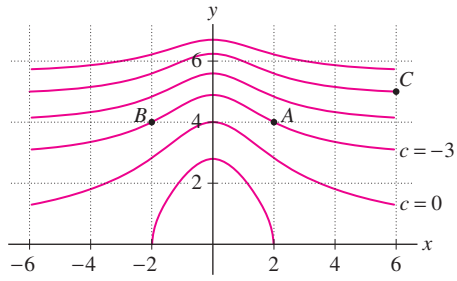


FIGURA 26

39. En referencia a la f gura 27, responda a las siguientes preguntas:

(a) ¿En qué punto entre (A)-(C) aumenta la presión en la dirección norte?

(b) ¿En qué punto entre (A)-(C) aumenta la presión en la dirección este?

(c) ¿En qué dirección en (B) aumenta la presión más rápidamente?

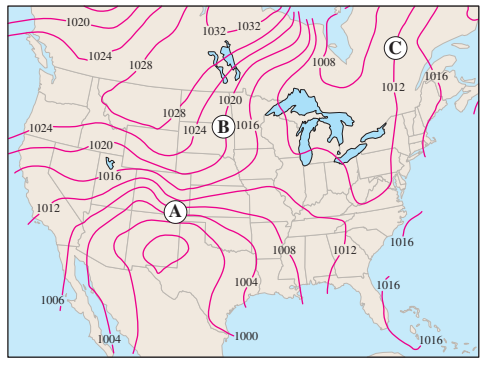


FIGURA 27 Presión atmosférica (en milibares) en los en los EE.UU. continentales el 26 de marzo de 2009.

En los problemas 40-43, $\rho(S,T)$ es la densidad del aguda del mar (kg/m^3) como función de la salinidad S (ppt) y de la temperatura T (°C). Utilice el mapa de contorno de la f gura 28.

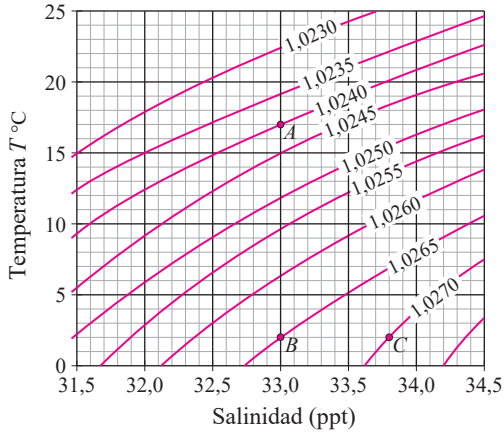


FIGURA 28 Mapa de contorno de la densidad del agua del mar $\rho(S,T)$ (kg/m^3).

40. Calcule la tasa media de cambio de ρ respecto a T desde B a A.

41. Calcule la tasa media de cambio de ρ respecto a S desde B a C.

42. Fijado un nivel de salinidad, ¿la densidad del agua del mar es una función creciente o decreciente de la temperatura?

43. En qué punto parece que la densidad sea más sensible a un cambio, ¿en A o en B?

En los problemas 44-47, utilice la f gura 29.

44. Halle el cambio en la elevación desde A a B.

45. Estime la tasa media de cambio desde A a B y desde A a C.

46. Estime la tasa media de cambio desde A a los puntos i, ii y iii.

47. Dibuje la trayectoria de ascenso más pronunciado que empieza en D.

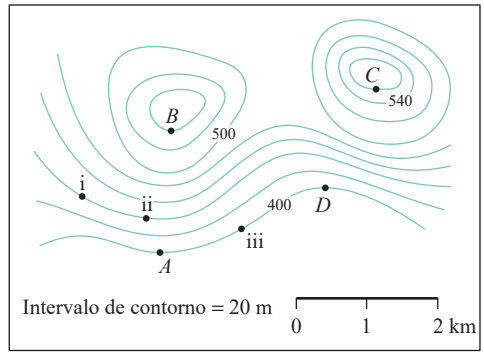


FIGURA 29

Problemas avanzados

48. La función $f(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/t}$, cuya gráf ca se muestra en la f gura 30, modela la temperatura de una barra de metal después de que se ha aplicado un intenso foco de calor en su punto central.

(a) Dibuje las trazas verticales en los instantes $t = 1, 2, 3$. ¿Qué información proporcionan estas trazas sobre la difusión del calor a través de la barra?

(b) Dibuje las trazas verticales $x = c$ para $c = \pm 0{,}2, \pm 0{,}4$. Describa de qué manera la temperatura cambia al transcurrir el tiempo en los puntos cerca del centro.

49. Sea:

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{para } (x,y) \neq (0,0)$$

Exprese f como una función $f(r,\theta)$ en coordenadas polares y use su resultado para hallar las curvas de nivel de f.

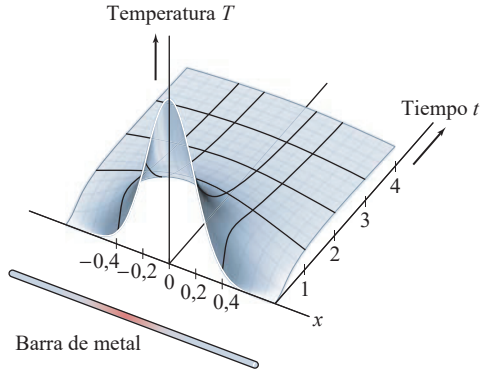


FIGURA 30 Gráf ca de $f(x,t) = t^{-1/2}e^{-x^2/t}$ empezando justo después de $t = 0$.

15.2 Límites y continuidad en varias variables

En esta sección se tratan los límites y la continuidad en el contexto multivariante. Nos centraremos en funciones de dos variables, pero def niciones análogas y resultados similares son también ciertos para funciones de tres o más variables.

Recuerde que un número x está cercano a a, si la distancia $|x-a|$ es pequeña. En el plano, un punto (x,y) está cerca de otro punto $P = (a,b)$ si la distancia entre ellos es pequeña.

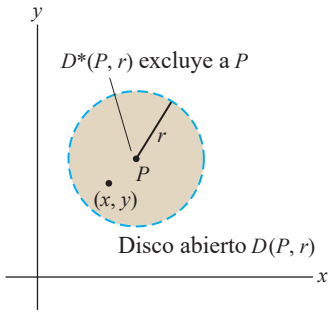


FIGURA 1 El disco abierto $D(P,r)$ está formado por todos los puntos (x,y) que se encuentran a distancia $< r$ de P. No incluye la circunferencia que forma la frontera.

Para expresar esta idea con precisión, se def ne el **disco abierto** de radio r y centro $P = (a,b)$ (f gura 1):

$$D(P,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$$

El **disco abierto perforado** $D^*(P,r)$ es el disco $D(P,r)$ pero sin su centro P. Por tanto $D^*(P,r)$ está formado por todos los puntos que están a distancia menor que r de P, excepto el propio punto P.

Suponga ahora que $f(x,y)$ está **def nida alrededor de** P pero no necesariamente en P. Dicho de otro modo, $f(x,y)$ está def nida para todo (x,y) en algún disco perforado $D^*(P,r)$ con $r > 0$. Se dice que el límite de $f(x,y)$ es L cuando (x,y) tiende a $P = (a,b)$, si $|f(x,y) - L|$ resulta arbitrariamente pequeño cuando (x,y) se encuentra en un disco perforado suf cientemente pequeño y centrado en P [f gura 2(C)]. En tal caso, se escribe:

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

He aquí la def nición formal.

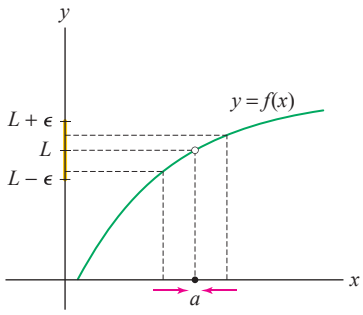
DEFINICIÓN Límite Suponga que $f(x,y)$ está def nida alrededor de $P = (a,b)$. Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x,y) = L$$

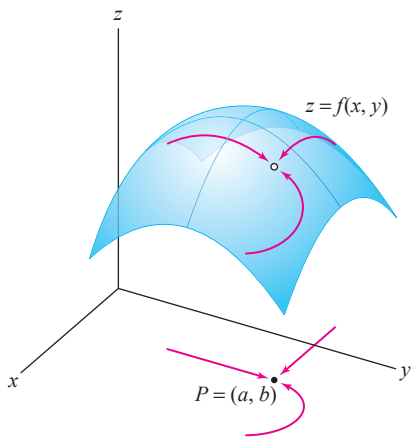
si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x,y) - L| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in D^*(P,\delta)$$

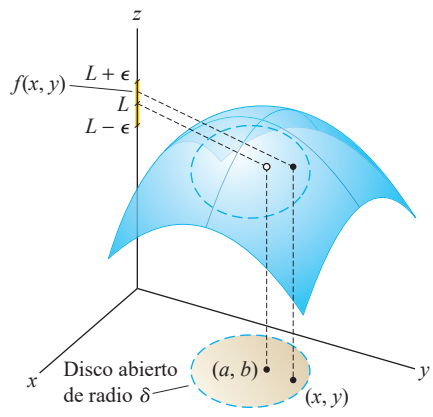
Es una def nición análoga a la de límite en una variable, pero existe una diferencia importante. En el límite en una variable, se exige que $f(x)$ tienda a L cuando x tiende a a tanto por la derecha como por la izquierda [f gura 2(A)]. En un límite en varias variables, $f(x,y)$ debe tender a L sin importar la manera en que (x,y) tiende a P [f gura 2(B)].



(A) En una variable, se puede tender a a únicamente desde dos posibles ubicaciones.



(B) En dos variables, (x,y) puede tender a $P = (a,b)$ por cualquier dirección o trayectoria.



(C) $|f(x,y) - L| < \epsilon$ para todo (x,y) en el disco

FIGURA 2

EJEMPLO 1 Pruebe que **(a)** $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ y **(b)** $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

Solución Sea $P = (a,b)$. Para comprobar (a), sea $f(x,y) = x$ y $L = a$. Se debe probar que para todo $\epsilon > 0$, es posible encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x,y) - L| = |x - a| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in D^*(P,\delta) \qquad 1$$

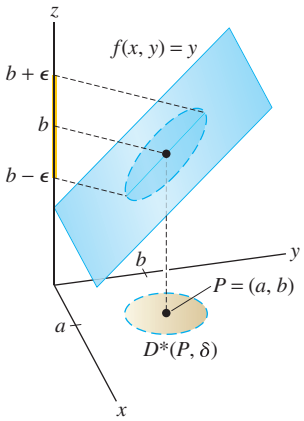


FIGURA 3 Se tiene que $|f(x,y) - b| < \epsilon$ si $|y - b| < \delta$ para $\delta = \epsilon$. Por tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$$

De hecho, se puede escoger $\delta = \epsilon$, pues si $(x,y) \in D^*(P,\epsilon)$, entonces:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 < \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad |x-a| < \epsilon$$

Dicho de otro modo, para cualquier $\epsilon > 0$:

$$|x-a| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in D^*(P,\epsilon)$$

Esto demuestra (a). El límite de (b) es análogo (vea la f gura 3). ■

El siguiente teorema enuncia las propiedades básicas de los límites. Se omiten las demostraciones, que son similares a las de las propiedades de los límites para funciones en una variable.

TEOREMA 1 Propiedades de los límites Suponga que $\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$ existen. Entonces:

(i) Propiedad de la suma:

$$\lim_{(x,y)\to P} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to P} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$$

(ii) Propiedad del múltiplo constante: para cualquier número k:

$$\lim_{(x,y)\to P} kf(x,y) = k \lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$$

(iii) Propiedad del producto:

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)\,g(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)\right)\left(\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)\right)$$

(iv) Propiedad del cociente: si $\lim_{(x,y)\to P} g(x,y) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{(x,y)\to P} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)}$$

Tal y como ocurría para una variable, se dice que f es continua en $P = (a,b)$ si $f(x,y)$ tiende al valor de la función $f(a,b)$ cuando $(x, y) \to (a, b)$.

DEFINICIÓN Continuidad Una función $f(x,y)$ es **continua** en $P = (a,b)$ si:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Se dice que f es continua si es continua en todo punto (a,b) de su dominio.

Según las propiedades de los límites, las sumas, múltiplos y productos de funciones continuas son continuas. Cuando se aplican a $f(x,y) = x$ y $g(x,y) = y$, que son continuas por el ejemplo 1, se obtiene que las funciones potenciales $f(x,y) = x^m y^n$ son continuas para cualesquiera número naturales m, n y que todos los polinomios son continuos. Además, una función racional $h(x,y)/g(x,y)$, donde h y g son polinomios, es continua en todos los puntos (a,b) en que $g(a,b) \neq 0$. Como en el caso de una variable, se pueden evaluar los límites de funciones continuas mediante sustitución.

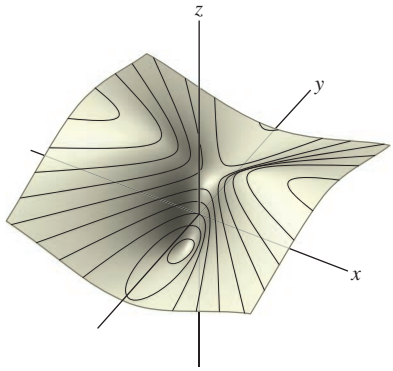


FIGURA 4 Vista superior de la gráf ca de $f(x,y) = \dfrac{3x+y}{x^2+y^2+1}$.

EJEMPLO 2 Evaluando límites por sustitución Pruebe que

$$f(x,y) = \frac{3x+y}{x^2+y^2+1}$$

es continua (f gura 4). A continuación, evalúe $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$.

Solución La función $f(x,y)$ es continua en todo (a,b) pues es una función racional cuyo denominador $Q(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ nunca se anula. Por tanto, se puede evaluar el límite por sustitución:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{3x+y}{x^2+y^2+1} = \frac{3(1)+2}{1^2+2^2+1} = \frac{5}{6}$$

Si $f(x,y)$ es un producto $f(x,y) = h(x)g(y)$, donde $h(x)$ y $g(y)$ son continuas, según la propiedad del producto, el límite es el producto de los límites:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} h(x)g(y) = \left(\lim_{x\to a} h(x)\right)\left(\lim_{y\to b} g(y)\right)$$

EJEMPLO 3 Funciones producto Evalúe $\lim_{(x,y)\to(3,0)} x^3 \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}$.

Solución El límite es igual al producto de límites

$$\lim_{(x,y)\to(3,0)} x^3 \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \left(\lim_{x\to 3} x^3\right)\left(\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right) = (3^3)(1) = 27$$

La composición es otra manera importante de obtener funciones. Si $f(x,y)$ es una función de dos variables y $G(u)$ es una función de una variable, entonces la composición $G \circ f$ es la función $G(f(x,y))$. Según el siguiente teorema, una composición de funciones continuas es también continua.

TEOREMA 2 Una composición de funciones continuas es continua Si $f(x,y)$ es continua en (a,b) y $G(u)$ es continua en $c = f(a,b)$, entonces la función compuesta $G(f(x,y))$ es continua en (a,b).

EJEMPLO 4 Exprese $H(x,y) = e^{-x^2+2y}$ como una función compuesta y evalúe:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} H(x,y)$$

Solución Se tiene que $H(x,y) = G \circ f$, donde $G(u) = e^u$ y $f(x,y) = -x^2 + 2y$. Tanto f como G son continuas, por lo que H es también continua y por tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} H(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,2)} e^{-x^2+2y} = e^{-(1)^2+2(2)} = e^3$$

Sabemos que si un límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe y es igual a L, entonces $f(x,y)$ tiende a L cuando (x,y) tiende a (a,b) a lo largo de cualquier trayectoria. En el siguiente ejemplo se demuestra que un límite *no existe* mostrando que $f(x,y)$ tiende a *diferentes límites* sobre rectas por el origen.

EJEMPLO 5 Probando que un límite no existe Examine $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ numéricamente. A continuación, demuestre que el límite no existe.

Solución Si el límite existiera, los valores de $f(x,y)$ en la tabla 1 deberían encontrarse cada vez más cercanos a un valor límite L cuando (x,y) está más cerca de $(0,0)$. Pero la tabla parece indicar que $f(x,y)$ alcanza cualquier valor entre 0 y 1, sin importar lo cerca que (x,y) esté de $(0,0)$. Por ejemplo,

$$f(0{,}1, 0) = 1, \qquad f(0{,}1, 0{,}1) = 0{,}5, \qquad f(0, 0{,}1) = 0$$

Así, $f(x,y)$ no parece que tienda a ningún valor límite L cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

A continuación se va a demostrar que el límite no existe probando que $f(x,y)$ tiende a diferentes valores límite sobre los ejes x e y (f gura 5):

$$\text{Límite sobre el eje } x\text{:} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\text{Límite sobre el eje } y\text{:} \qquad \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Estos dos límites son diferentes y, por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. ■

TABLA 1 Valores de $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

y \ x	−0,5	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,5	**0,5**	0,39	0,265	0,138	0,038	**0**	0,038	0,138	0,265	0,39	**0,5**
0,4	0,61	**0,5**	0,36	0,2	0,059	**0**	0,059	0,2	0,36	**0,5**	0,61
0,3	0,735	0,64	**0,5**	0,308	0,1	**0**	0,1	0,308	**0,5**	0,64	0,735
0,2	0,862	0,8	0,692	**0,5**	0,2	**0**	0,2	**0,5**	0,692	0,8	0,862
0,1	0,962	0,941	0,9	0,8	**0,5**	**0**	**0,5**	0,8	0,9	0,941	0,962
0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
−0,1	0,962	0,941	0,9	0,8	**0,5**	**0**	**0,5**	0,8	0,9	0,941	0,962
−0,2	0,862	0,8	0,692	**0,5**	0,2	**0**	0,2	**0,5**	0,692	0,8	0,862
−0,3	0,735	0,640	**0,5**	0,308	0,1	**0**	0,1	0,308	**0,5**	0,640	0,735
−0,4	0,610	**0,5**	0,360	0,2	0,059	**0**	0,059	0,2	0,36	**0,5**	0,61
−0,5	**0,5**	0,39	0,265	0,138	0,038	**0**	0,038	0,138	0,265	0,390	**0,5**

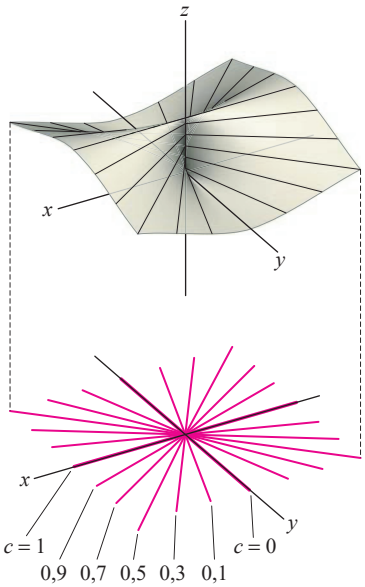


FIGURA 5 Gráf ca de $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

UN APUNTE GRÁFICO El mapa de contorno de la f gura 5 muestra claramente que la función $f(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$ no tiende a un límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Para valores de c diferentes de cero, la curva de nivel $f(x,y) = c$ es la recta $y = mx$ que pasa por el origen (con el origen eliminado) siendo $c = (m^2+1)^{-1}$:

$$f(x, mx) = \frac{x^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{1}{m^2+1} \quad (\text{para } x \neq 0)$$

La curva de nivel $f(x,y) = 0$ es el eje y (con el origen eliminado). Cuando la pendiente m cambia, f alcanza cualquier valor entre 0 y 1 en cualquier disco centrado en el origen $(0,0)$, sin importar lo pequeño que éste sea, por lo que f no puede tender a un límite.

No existe, un único método para calcular límites que siempre funcione. El siguiente ejemplo ilustra dos maneras de evaluar un límite cuando la sustitución no se puede utilizar.

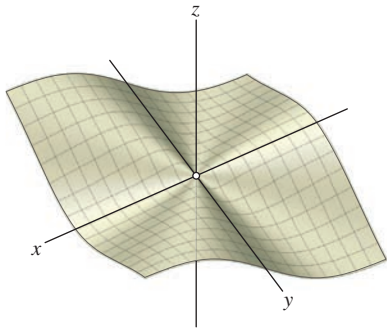


FIGURA 6 Gráfica de $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

EJEMPLO 6 Dos métodos para examinar un límite Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ donde $f(x,y)$ está definida para $(x,y) \neq (0,0)$ por (figura 6):

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Solución

Primer método Si $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene:

$$0 \leq \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq 1$$

pues el numerador no es mayor que el denominador. Multiplique por $|x|$:

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x|$$

y aplique el teorema de compresión (que también es cierto para límites en varias variables):

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, se deduce que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Segundo método Use coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces $x^2 + y^2 = r^2$ y para $r \neq 0$,

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{(r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta)^2}{r^2} \right| = r|\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta| \leq r$$

Cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, la variable r también tiende a 0 y, de nuevo, se concluye en base al teorema de compresión:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| \leq \lim_{r\to 0} r = 0$$

15.2 RESUMEN

- El *disco abierto* de radio r centrado en $P = (a,b)$ se define como:

$$D(P,r) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$$

El *disco perforado* $D^*(P,r)$ es $D(P,r)$ sin el punto P.

- Suponga que $f(x,y)$ está definida alrededor de $P = (a,b)$. Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x,y) - L| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in D^*(P,\delta)$$

- El límite de un producto $f(x,y) = h(x)g(y)$ es el producto de límites:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \left(\lim_{x\to a} h(x)\right)\left(\lim_{y\to b} g(y)\right)$$

- Una función $f(x,y)$ es *continua* en $P = (a,b)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

15.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la diferencia entre $D(P,r)$ y $D^*(P,r)$?

2. Suponga que $f(x,y)$ es continua en $(2,3)$ y que $f(2,y) = y^3$ para $y \neq 3$. ¿Cuál es el valor de $f(2,3)$?

3. Suponga que $Q(x,y)$ es una función tal que $1/Q(x,y)$ es continua para todo (x,y). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(a) $Q(x,y)$ es continua para todo (x,y).

(b) $Q(x,y)$ es continua para $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) $Q(x,y) \neq 0$ para todo (x,y).

4. Suponga que $f(x,0) = 3$ para todo $x \neq 0$ y $f(0,y) = 5$ para todo $y \neq 0$. ¿Qué puede deducir sobre $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Problemas

En los problemas 1-8, evalúe el límite aplicando continuidad.

1. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + y)$

2. $\lim_{(x,y)\to(\frac{4}{9},\frac{2}{9})} \dfrac{x}{y}$

3. $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} (xy - 3x^2y^3)$

4. $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \dfrac{2x^2}{4x+y}$

5. $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},0)} \tan x \cos y$

6. $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \tan^{-1}(x^2 - y)$

7. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{x^2} - e^{-y^2}}{x+y}$

8. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln(x-y)$

En los problemas 9-12, suponga que:

$$\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y) = 3, \qquad \lim_{(x,y)\to(2,5)} g(x,y) = 7$$

9. $\lim_{(x,y)\to(2,5)} (g(x,y) - 2f(x,y))$

10. $\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x,y)^2 g(x,y)$

11. $\lim_{(x,y)\to(2,5)} e^{f(x,y)^2 - g(x,y)}$

12. $\lim_{(x,y)\to(2,5)} \dfrac{f(x,y)}{f(x,y) + g(x,y)}$

13. ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$? Explíquelo.

14. Sea $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$. Pruebe que $f(x,y)$ tiende a cero sobre los ejes x e y. A continuación demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, mostrando que el límite sobre la recta $y = x$ es diferente de cero.

15. Demuestre que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

no existe considerando el límite sobre el eje x.

16. Sea $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$ y $g(x,y) = x^2/(x^2+y^2)$. Utilizando coordenadas polares, demuestre que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

y que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ no existe. *Indicación:* pruebe que $g(x,y) = \cos^2\theta$ y observe que $\cos\theta$ sólo puede alcanzar cualquier valor entre -1 y 1 cuando $(x,y) \to (0,0)$.

17. Aplique el teorema de compresión para evaluar:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} (x^2 - 16)\cos\left(\frac{1}{(x-4)^2+y^2}\right)$$

18. Evalúe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{|x|+|y|}\right)$.

En los problemas 19-32, evalúe el límite o bien establezca que éste no existe.

19. $\lim_{(z,w)\to(-2,1)} \dfrac{z^4\cos(\pi w)}{e^{z+w}}$

20. $\lim_{(z,w)\to(-1,2)} (z^2w - 9z)$

21. $\lim_{(x,y)\to(4,2)} \dfrac{y-2}{\sqrt{x^2-4}}$

22. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{1+y^2}$

23. $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

24. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

25. $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} e^{x-y}\ln(x-y)$

26. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|}{|x|+|y|}$

27. $\lim_{(x,y)\to(-3,-2)} (x^2y^3+4xy)$

28. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} e^{x^2-y^2}$

29. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan(x^2+y^2)\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

30. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y+2)e^{-1/(x^2+y^2)}$

31. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

32. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2+y^2-2}{|x-1|+|y-1|}$

Indicación: reescriba el límite en términos de $u = x-1$ y $v = y-1$.

33. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

(a) Pruebe que:

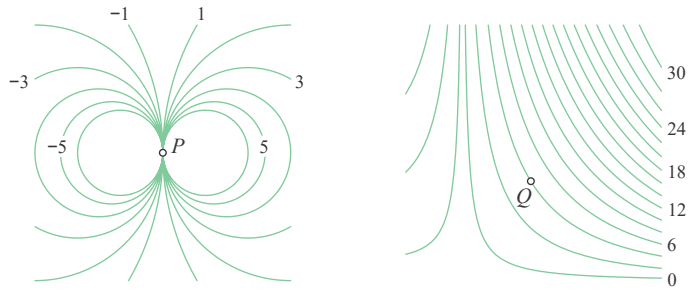
$$|x^3| \le |x|(x^2+y^2) \quad |y^3| \le |y|(x^2+y^2)$$

(b) Pruebe que $|f(x,y)| \le |x|+|y|$.

(c) Aplique el teorema de compresión para demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

34. Sean $a, b \ge 0$. Pruebe que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^a y^b}{x^2+y^2} = 0$ si $a+b>2$, y que el límite no existe si $a+b \le 2$.

35. La figura 7 muestra los mapas de contorno de dos funciones. Explique por qué $\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$ no existe. ¿Considera que existe $\lim_{(x,y)\to Q} g(x,y)$ en (B)? Si su respuesta es afirmativa, ¿cuál es el valor del límite?



(A) Mapa de contorno de $f(x,y)$ (B) Mapa de contorno de $g(x,y)$

FIGURA 7

Problemas avanzados

36. Evalúe $\lim_{(x,y)\to(0,2)} (1+x)^{y/x}$.

37. Indique si la siguiente función es continua:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 1 & \text{si } x^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$$

38. SAC La función $f(x,y) = \text{sen}(xy)/xy$ está definida para $xy \neq 0$.

(a) ¿Es posible extender el dominio de $f(x,y)$ a todo $\mathbb{R}^2$ de manera que el resultado sea una una función continua?

(b) Use un programa informático de cálculo simbólico para representar gráficamente $f(x,y)$. La gráfica que ha obtenido ¿corrobora su respuesta en (a)?

39. Demuestre que la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2^x-1)(\text{sen}\, y)}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ \ln 2 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

40. Demuestre que si $f(x)$ es continua en $x = a$ y $g(y)$ es continua en $y = b$, entonces $F(x,y) = f(x)g(y)$ es continua en (a,b).

41. La función $f(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$ proporciona un ejemplo interesante en que el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ no existe, incluso cuando el límite sobre cualquier recta $y = mx$ existe y es cero (figura 8).
(a) Pruebe que el límite sobre cualquier recta $y = mx$ existe y es igual a 0.

(b) Calcule $f(x,y)$ en los puntos $(10^{-1}, 10^{-2})$, $(10^{-5}, 10^{-10})$, $(10^{-20}, 10^{-40})$. No utilice una calculadora.

(c) Pruebe que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. *Indicación:* calcule el límite sobre la parábola $y = x^2$.

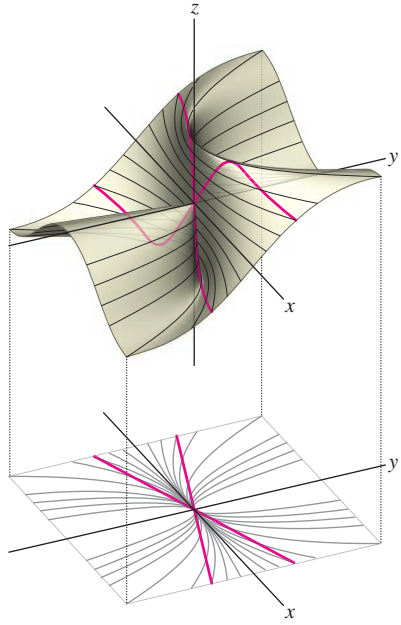


FIGURA 8 Gráfica de $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

15.3 Derivadas parciales

Se ha mencionado en repetidas ocasiones que una función f de dos o más variables no tiene una única tasa de variación pues cada variable puede afectar a f de diferentes formas. Por ejemplo, la corriente I en un circuito es una función tanto del voltaje V como de la resistencia R dada por la ley de Ohm:

$$I(V, R) = \frac{V}{R}$$

La corriente I es *creciente* como función de V pero *decreciente* como función de R.

Las **derivadas parciales** son las tasas de variación respecto a cada variable por separado. Una función $f(x, y)$ de dos variables tiene dos derivadas parciales, que se denotan como f_x y f_y, y definidas mediante los siguientes límites (siempre que existan):

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}, \qquad f_y(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

Por tanto, f_x es la derivada de $f(x, b)$ como función de x únicamente y f_y es la derivada de $f(a, y)$ como función de y únicamente. La notación de Leibniz para derivadas parciales es:

El símbolo de la derivada parcial ∂ es una "d" redondeada. Los símbolos $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se leen: "delta-efe delta-equis" y "delta-efe delta-i griega".

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a, b) \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a, b)$$

Si $z = f(x, y)$, también se escribe $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Las derivadas parciales se calculan como las derivadas ordinarias en una variable pero con la siguiente diferencia: para calcular f_x, considere y como una constante; y para calcular f_y, considere x como una constante.

EJEMPLO 1 Calcule las derivadas parciales de $f(x, y) = x^2y^5$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^5) = y^5 \frac{\partial}{\partial x}(x^2)}_{\text{Considere } y^5 \text{ como una constante}} = y^5(2x) = 2xy^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^5) = x^2 \frac{\partial}{\partial x}(y^5)}_{\text{Considere } x^2 \text{ como una constante}} = x^2(5y^4) = 5x^2y^4$$

UN APUNTE GRÁFICO Las derivadas parciales en $P = (a, b)$ son las pendientes de las rectas tangentes a las curvas de las trazas verticales por el punto $(a, b, f(a, b))$ en la figura 1(A). Para calcular $f_x(a, b)$, se considera $y = b$ y se deriva en la dirección de las x. Esto proporciona la pendiente de la recta tangente a la curva de la traza en el plano $y = b$ [figura 1(B)]. Análogamente, $f_y(a, b)$ es la pendiente de la curva correspondiente a la traza en el plano vertical $x = a$ [figura 1(C)].

Las reglas de derivación del cálculo en una variable (las reglas del producto, cociente y regla de la cadena) también son ciertas para derivadas parciales.

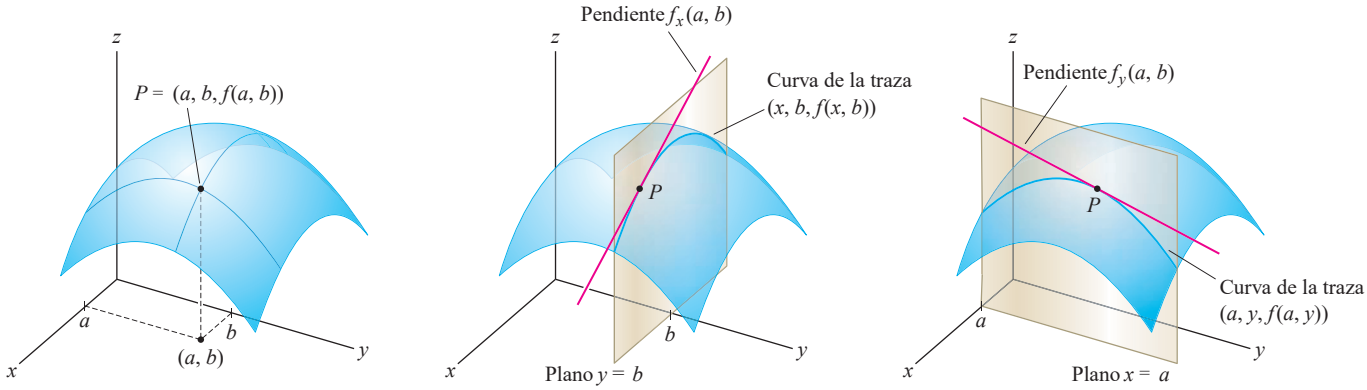


FIGURA 1 Las derivadas parciales son las pendientes de las curvas de las trazas verticales.

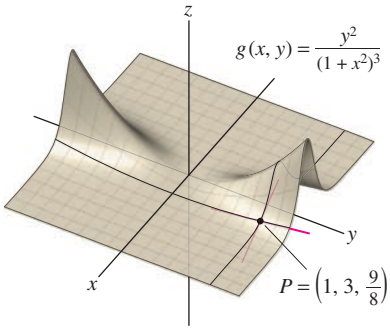


FIGURA 2 Las pendientes de las rectas tangentes a las curvas de la traza son $g_x(1, 3)$ y $g_y(1, 3)$.

ATENCIÓN *No es necesario aplicar la regla del cociente para calcular las derivadas parciales en la ec. (1). El denominador no depende de y, por lo que se trata como una constante al derivar respecto de y.*

EJEMPLO 2 Calcule $g_x(1, 3)$ y $g_y(1, 3)$, donde $g(x, y) = \dfrac{y^2}{(1 + x^2)^3}$.

Solución Para calcular g_x, trate y (y por tanto y^2) como una constante:

$$g_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{(1 + x^2)^3} = y^2\frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2)^{-3} = \frac{-6xy^2}{(1 + x^2)^4}$$

$$g_x(1, 3) = \frac{-6(1)3^2}{(1 + 1^2)^4} = -\frac{27}{8}$$

Para calcular g_y, trate x (y por tanto $1 + x^2$) como una constante:

$$g_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{1}{(1 + x^2)^3}\frac{\partial}{\partial y}y^2 = \frac{2y}{(1 + x^2)^3} \quad \boxed{1}$$

$$g_y(1, 3) = \frac{2(3)}{(1 + 1^2)^3} = \frac{3}{4}$$

Estas derivadas parciales son las pendientes de las curvas de las trazas por el punto $(1, 3, \frac{9}{8})$ que se muestra en la f gura 2.

Se utiliza la regla de la cadena para calcular las derivadas de una función compuesta $f(x, y) = F(g(x, y))$, donde $F(u)$ es una función de una variable y $u = g(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

EJEMPLO 3 Regla de la cadena para derivadas parciales Calcule $\dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}(x^2y^5)$.

Solución Exprese $\operatorname{sen}(x^2y^5) = F(u)$, donde $F(u) = \operatorname{sen} u$ y $u = x^2y^5$. Entonces, se tiene que $\dfrac{dF}{du} = \cos u$ y, según la regla de la cadena:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}(x^2y^5) = \frac{dF}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x^2y^5)\frac{\partial}{\partial x}x^2y^5}_{\text{Regla de la cadena}} = 2xy^5\cos(x^2y^5)$$

Las derivadas parciales se están def nidas para funciones de cualquier número de variables. Se calcula la derivada parcial respecto a cualquiera de las variables considerando el resto de las variables como una constante.

EJEMPLO 4 Más de dos variables Calcule $f_z(0, 0, 1, 1)$, donde:

$$f(x, y, z, w) = \frac{e^{xz+y}}{z^2 + w}$$

Solución Aplique la regla del cociente, considerando x, y y w como constantes:

$$f_z(x, y, z, w) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{xz+y}}{z^2 + w}\right) = \frac{(z^2 + w)\frac{\partial}{\partial z}e^{xz+y} - e^{xz+y}\frac{\partial}{\partial z}(z^2 + w)}{(z^2 + w)^2} =$$

$$= \frac{(z^2 + w)xe^{xz+y} - 2ze^{xz+y}}{(z^2 + w)^2} = \frac{(z^2x + wx - 2z)e^{xz+y}}{(z^2 + w)^2}$$

$$f_z(0, 0, 1, 1) = \frac{-2e^0}{(1^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2}$$

El cálculo en el ejemplo 4,

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{xz+y} = xe^{xz+y}$$

se obtiene a partir de la regla de la cadena, como:

$$\frac{d}{dz}e^{az+b} = ae^{az+b}$$

Como la derivada parcial $f_x(a, b)$ es la derivada $f(x, b)$, entendida como una función únicamente de x, se puede estimar la variación Δf cuando x pasa de a a $a + \Delta x$ como en el caso de una variable. Análogamente, se puede estimar el cambio cuando y cambia en Δy. Para Δx y Δy pequeñas (lo pequeñas que sean depende de f y de la precisión exigida):

$$f(a + \Delta x, b) - f(a, b) \approx f_x(a, b)\Delta x$$

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) \approx f_y(a, b)\Delta y$$

Esto es cierto para funciones f en cualquier número de variables. Por ejemplo, $\Delta f \approx f_w \Delta w$ si una de las variables w cambia en Δw y el resto de las variables se mantienen f jas.

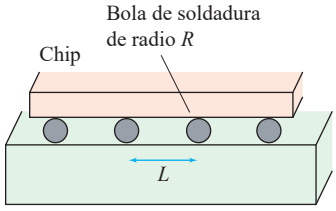


FIGURA 3 Una BGA. Las variaciones de la temperatura deforman la BGA y pueden hacer que falle debido a que el chip y la tarjeta se dilatan a diferente razón.

EJEMPLO 5 Comprobación de microchips Una **ball grid array** (BGA) es un microchip unido a una tarjeta de circuitos mediante pequeñas bolas de soldadura de radio R mm separadas por una distancia L mm (f gura 3). Los fabricantes realizan pruebas de f abilidad de las BGA sometiéndolas a ciclos repetidos en los que la temperatura varía desde 0 °C hasta 100 °C en un periodo de 40 minutos. Según un modelo, el número medio N de ciclos antes que el chip falle es:

$$N = \left(\frac{2200R}{Ld}\right)^{1,9}$$

donde d es la diferencia entre los coef cientes de expansión del chip y de la tarjeta de circuitos. Estime el cambio ΔN cuando $R = 0{,}12$, $d = 10$, y L pasa de 0,4 a 0,42.

Solución Se va a utilizar la aproximación:

$$\Delta N \approx \frac{\partial N}{\partial L}\Delta L$$

con $\Delta L = 0{,}42 - 0{,}4 = 0{,}02$. Como R y d son constantes, la derivada parcial es:

$$\frac{\partial N}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{2200R}{Ld}\right)^{1,9} = \left(\frac{2200R}{d}\right)^{1,9}\frac{\partial}{\partial L}L^{-1,9} = -1{,}9\left(\frac{2200R}{d}\right)^{1,9}L^{-2,9}$$

Ahora evalúe en $L = 0{,}4$, $R = 0{,}12$ y $d = 10$:

$$\left.\frac{\partial N}{\partial L}\right|_{(L,R,d)=(0{,}4,0{,}12,10)} = -1{,}9\left(\frac{2200(0{,}12)}{10}\right)^{1{,}9}(0{,}4)^{-2{,}9} \approx -13\ 609$$

La disminución en el número medio de ciclos antes que un chip falle es:

$$\Delta N \approx \frac{\partial N}{\partial L}\Delta L = -13\ 609(0{,}02) \approx -272 \text{ ciclos}$$

En el siguiente ejemplo, se estima la derivada parcial numéricamente. Como f_x y f_y son límites de cocientes incrementales, se tienen las siguientes aproximaciones cuando h y k son "pequeños":

$$f_x(a,b) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$f_y(a,b) \approx \frac{\Delta f}{\Delta y} = \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

Una aproximación similar es válida cuando se trabaja con cualquier número de variables.

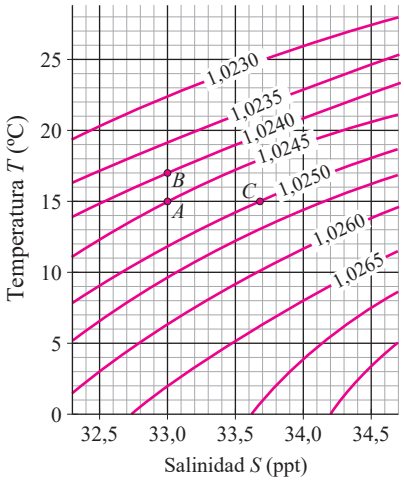


FIGURA 4 Mapa de contorno de la densidad del agua del mar como función de la temperatura y de la salinidad.

EJEMPLO 6 Estimación de las derivadas parciales utilizando mapas de contorno La densidad del agua del mar ρ (kg/m^3) depende de la salinidad S (ppt) y de la temperatura T (°C). Use la f gura 4 para estimar $\partial\rho/\partial T$ y $\partial\rho/\partial S$ en A.

Solución Las coordenadas del punto A son $(S, T) = (33, 15)$ y se encuentra en la curva de nivel $\rho = 1{,}0245$. La estimación de $\partial\rho/\partial T$ en A comprende dos etapas.

Etapa 1. **Desplácese verticalmente desde A**

Como T cambia en la dirección vertical, desplácese hacia arriba desde el punto A al B que se encuentra sobre la siguiente curva de nivel, donde $\rho = 1{,}0240$. Las coordenadas del punto B son $(S, T) = (33, 17)$. Observe que en el desplazamiento de A a B, se mantiene S constante pues la salinidad de ambos puntos es $S = 33$.

Etapa 2. **Calcule el cociente incremental**

$$\Delta\rho = 1{,}0240 - 1{,}0245 = -0{,}0005 \text{ kg/m}^3$$

$$\Delta T = 17 - 15 = 2\ ^\circ\text{C}$$

Se obtiene así la aproximación:

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right|_A \approx \frac{\Delta\rho}{\Delta T} = \frac{-0{,}0005}{2} = -0{,}00025 \text{ kg-m}^{-3}/^\circ\text{C}$$

La estimación de $\partial\rho/\partial S$ se lleva a cabo de manera similar, desplazándose hacia la derecha horizontalmente hacia el punto C cuyas coordenadas son $(S, T) \approx (33{,}7, 15)$ y $\rho = 1{,}0250$:

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial S}\right|_A \approx \frac{\Delta\rho}{\Delta S} = \frac{1{,}0250 - 1{,}0245}{33{,}7 - 33} = \frac{0{,}0005}{0{,}7} \approx 0{,}0007 \text{ kg-m}^{-3}/\text{ppt}$$

Para una precisión mayor, se puede estimar $f_x(a, b)$ considerando la media de los cocientes incrementales Δx y $-\Delta x$. Una observación similar es válida para $f_y(a, b)$.

Derivadas parciales de orden superior

Las derivadas parciales de orden superior son las derivadas parciales de las derivadas parciales. Las derivadas parciales de *segundo orden* de f son las derivadas parciales de f_x y f_y. La derivada respecto a x de f_x se denota como f_{xx} y la derivada respecto a y de f_y, f_{yy}, es decir:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Las derivadas parciales de segundo orden *cruzadas* o mixtas son:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Este proceso puede continuar. Por ejemplo, f_{xyx} es la derivada respecto a x de f_{xy} y f_{xyy} es la derivada respecto a y de f_{xy} (lleve a cabo la derivación en el orden de los subíndices, de izquierda a derecha). La notación de Leibniz para las derivadas parciales de orden superior es:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Las derivadas parciales de orden superior para funciones de tres o más variables se def nen de forma análoga.

EJEMPLO 7 Calcule las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y) = x^3 + y^2 e^x$.

Solución En primer lugar, calcule las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2 e^x) = 3x^2 + y^2 e^x, \qquad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^2 e^x) = 2ye^x$$

Ahora, calcule las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + y^2 e^x) = \qquad f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial}{\partial y} 2ye^x =$$

$$= 6x + y^2 e^x \qquad = 2e^x$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^2 e^x) = \qquad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} 2ye^x =$$

$$= 2ye^x \qquad = 2ye^x$$

EJEMPLO 8 Calcule f_{xyy} para $f(x, y) = x^3 + y^2 e^x$.

Recuerde la manera en que los subíndices se utilizan en las derivadas parciales. La notación f_{xyy} significa "primero derive respecto a x y después derive dos veces respecto a y."

Solución Según el ejemplo previo, $f_{xy} = 2ye^x$. Por tanto:

$$f_{xyy} = \frac{\partial}{\partial y} f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} 2ye^x = 2e^x$$

En el ejemplo 7 observe que f_{xy} y f_{yx} son ambas iguales a $2ye^x$. Es un resultado agradable que la igualdad $f_{xy} = f_{yx}$ es cierta, siempre que las derivadas parciales cruzadas sean continuas. En el apéndice D puede consultar una demostración del siguiente teorema, llamado así por el matemático francés Alexis Clairaut (f gura 5).

La hipótesis del teorema de Clairaut, de que f_{xy} y f_{yx} son continuas, casi siempre se cumple en la práctica; sin embargo en el problema 84 puede ver un ejemplo en que las parciales cruzadas no son iguales.

TEOREMA 1 Teorema de Clairaut: igualdad de las parciales cruzadas Si tanto f_{xy} como f_{yx} son funciones continuas en un disco D, entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ para todo $(a, b) \in D$. Dicho de otro modo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

EJEMPLO 9 Compruebe que $\dfrac{\partial^2 W}{\partial U \partial T} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial T \partial U}$ para $W = e^{U/T}$.

Solución Calculando ambas derivadas se puede observar que son iguales:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = e^{U/T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{U}{T}\right) = -UT^{-2}e^{U/T} \qquad \frac{\partial W}{\partial U} = e^{U/T}\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{U}{T}\right) = T^{-1}e^{U/T}$$

$$\frac{\partial}{\partial U}\frac{\partial W}{\partial T} = -T^{-2}e^{U/T} - UT^{-3}e^{U/T} \qquad \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial W}{\partial U} = -T^{-2}e^{U/T} - UT^{-3}e^{U/T}$$

FIGURA 5 Alexis Clairaut (1713-1765) fue un brillante matemático francés que presentó su primer trabajo a la Academia de las Ciencias de Paris a los 13 años. En 1752, Clairaut ganó un premio por un estudio sobre el movimiento lunar que Euler alabó (seguramente con exageración) como "el descubrimiento más importante y profundo que jamás se había realizado en las matemáticas."

Aunque el teorema de Clairaut está enunciado para f_{xy} y f_{yx}, implica, que la derivación parcial puede realizarse en cualquier orden siempre que las derivadas en cuestión sean continuas (vea el problema 75). Por ejemplo, se puede calcular f_{xyxy} derivado f dos veces respecto a x y dos respecto a y, en cualquier orden. Así:

$$f_{xyxy} = f_{xxyy} = f_{yyxx} = f_{yxyx} = f_{xyyx} = f_{yxxy}$$

EJEMPLO 10 Elección acertada del orden Calcule la derivada parcial g_{zzwx}, siendo $g(x, y, z, w) = x^3w^2z^2 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{xy}{z^2}\right)$.

Solución Vamos a aprovechar el hecho de que las derivadas se pueden calcular en cualquier orden. Si se deriva en primer lugar respecto a w, el segundo término desaparce porque no depende de w:

$$g_w = \frac{\partial}{\partial w}\left(x^3w^2z^2 + \operatorname{sen}\left(\frac{xy}{z^2}\right)\right) = 2x^3wz^2$$

Ahora, derive dos veces respecto a z y una respecto a x:

$$g_{wz} = \frac{\partial}{\partial z}2x^3wz^2 = 4x^3wz$$

$$g_{wzz} = \frac{\partial}{\partial z}4x^3wz = 4x^3w$$

$$g_{wzzx} = \frac{\partial}{\partial x}4x^3w = 12x^2w$$

Se obtiene que $g_{zzwx} = g_{wzzx} = 12x^2w$.

Una **ecuación en derivadas parciales** (EDP) es una ecuación diferencial que involucra funciones de varias variables y sus derivadas parciales. La ecuación del calor, que se trata en el siguiente ejemplo, es una EDP que modela la temperatura cuando el calor se propaga a través de un objeto. Hay inf nitas soluciones para esta ecuación, pero la función

particular del siguiente ejemplo describe la temperatura para los instantes $t > 0$ de una vara de metal a cuyo centro se le ha aplicado un impulso de calor en $t = 0$ (f gura 6).

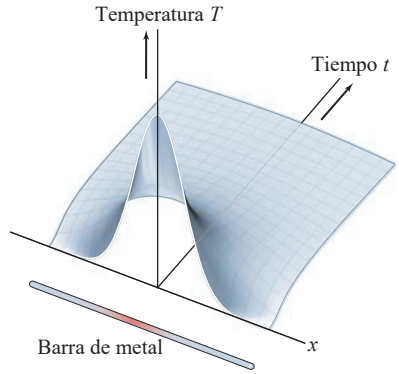


FIGURA 6 La gráf ca

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x^2/4t)}$$

ilustra la difusión de un impulso de calor al variar el tiempo.

EJEMPLO 11 La ecuación del calor Pruebe que $u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-(x^2/4t)}$, def nida para $t > 0$, cumple la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 2$$

Solución En primer lugar, calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-(x^2/4t)} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} x t^{-3/2} e^{-(x^2/4t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}} x t^{-3/2} e^{-(x^2/4t)}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-(x^2/4t)} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} x^2 t^{-5/2} e^{-(x^2/4t)}$$

Ahora, calcule $\partial u/\partial t$ y observe que es igual a $\partial^2 u/\partial x^2$ tal y como se quería demostrar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-(x^2/4t)}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-(x^2/4t)} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} x^2 t^{-5/2} e^{-(x^2/4t)}$$

15.3 RESUMEN

- Las derivadas parciales de $f(x,y)$ se def nen como los límites:

$$f_x(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$f_y(a,b) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

- Calcule f_x considerando y como una constante y calcule f_y considerando x una constante.
- $f_x(a,b)$ es la pendiente en $x = a$ de la recta tangente a la curva de la traza $z = f(x,b)$. Análogamente, $f_y(a,b)$ es la pendiente en $y = b$ de la recta tangente a la curva de la traza $z = f(a,y)$.
- Para pequeñas variaciones de Δx y de Δy:

$$f(a+\Delta x, b) - f(a,b) \approx f_x(a,b)\Delta x$$

$$f(a,b+\Delta y) - f(a,b) \approx f_y(a,b)\Delta y$$

De forma más general, si f es una función de n variables y w es una de esas variables, entonces $\Delta f \approx f_w \Delta w$ si w cambia en Δw y el resto de las variables quedan fijas.

- Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} f = f_{xy} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f = f_{yx} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = f_{yy}$$

- El teorema de Clairaut establece que las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir $f_{xy} = f_{yx}$, siempre que f_{xy} y f_{yx} sean continuas.
- De forma más general, las derivadas parciales de orden superior se pueden calcular en cualquier orden. Por ejemplo, $f_{xyyz} = f_{yxzy}$ si f es una función de x, y, z cuyas derivadas parciales de cuarto orden son continuas.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Joseph Fourier (1768-1830)

Adolf Fick (1829-1901)

La ecuación general del calor, de la que la ec. (2) es un caso particular, fue introducida en 1807 por el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier. Cuando era joven, Fourier no sabía si entrar en el sacerdocio o estudiar matemáticas, pero debió haber sido una persona muy ambiciosa. Escribió en una carta: "Ayer fue mi vigésimo primer cumpleaños y a esa edad Newton y Pascal ya habían adquirido, por sus resultados, derecho a la inmortalidad". Un veinteañero Fourier se involucró en la Revolución Francesa y fue brevemente encarcelado en 1794 por un incidente que implicó a las diferentes facciones. En 1798, fue convocado, junto con más de 150 científicos, para unirse a Napoleón en su infructuosa campaña en Egipto.

Sin embargo, la verdadera incidencia de Fourier, radica en sus contribuciones matemáticas. La ecuación del calor se aplica en toda la física y la ingeniería, desde el estudio del flujo de calor a través de los océanos de la Tierra y la atmósfera hasta el uso de sondas de calor para destruir los tumores y tratar enfermedades del corazón.

Fourier también introdujo una nueva técnica, conocida como la **transformada de Fourier**, para resolver su ecuación y que se basa en la idea de que una función periódica se puede expresar como una (posiblemente infinita) suma de senos y de cosenos. Los principales matemáticos de la época, incluyendo Lagrange y Laplace, plantearon inicialmente objeciones porque esta técnica no era fácil de justificar con rigor. Sin embargo, la transformada de Fourier resultó ser uno de los descubrimientos matemáticos más importantes del siglo XIX. Una búsqueda en la web en el término "transformada de Fourier", pone de manifiesto su vasto rango de aplicaciones.

En 1855, el fisiólogo alemán Adolf Fick probó que la ecuación del calor no sólo describe la conducción del calor sino también una amplia gama de procesos de difusión, tales como la osmosis, el transporte de iones a nivel celular, el movimiento de agentes contaminantes a través del aire o el agua. La ecuación del calor se convirtió así en una herramienta básica en química, biología molecular y ciencias del medio ambiente, donde a menudo se llama la **segunda ley de Fick**.

15.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Patricia obtuvo la siguiente fórmula que es *incorrecta*, aplicando erróneamente la regla del producto:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = x^2(2y) + y^2(2x)$$

¿Cuál fue su error y cuál es el resultado correcto?

2. Explique porqué no es necesario aplicar la regla del cociente para calcular $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x+y}{y+1}\right)$. ¿Se debe usar la regla del cociente para calcular $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x+y}{y+1}\right)$?

3. ¿Cuál de las siguientes derivadas parciales se debería evaluar sin utilizar la regla del cociente?

(a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{xy}{y^2+1}\right)$ **(b)** $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{xy}{y^2+1}\right)$ **(c)** $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y^2}{y^2+1}\right)$

4. ¿A qué es igual f_x, donde $f(x,y,z) = (\operatorname{sen} yz)e^{z^3-z^{-1}\sqrt{y}}$?

5. Suponiendo que se cumplen las hipótesis del teorema de Clairaut, ¿cuál de las siguientes derivadas parciales es igual a f_{xxy}?

(a) f_{xyx} **(b)** f_{yyx} **(c)** f_{xyy} **(d)** f_{yxx}

Problemas

1. Use la def nición por medio de límites de la derivada parcial para comprobar las fórmulas:

$$\frac{\partial}{\partial x}xy^2 = y^2 \qquad \frac{\partial}{\partial y}xy^2 = 2xy$$

2. Use la regla del producto para calcular $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y)(x+y^4)$.

3. Use la regla del cociente para calcular $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{x+y}$.

4. Use la regla de la cadena para calcular $\dfrac{\partial}{\partial u}\ln(u^2+uv)$.

5. Calcule $f_z(2,3,1)$, donde $f(x,y,z) = xyz$.

6. Explique la relación entre las siguientes fórmulas (c es una constante).

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(cx) = c\cos(cx) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen}(xy) = y\cos(xy)$$

7. El plano $y = 1$ interseca con la superf cie $z = x^4 + 6xy - y^4$ en nua cierta curva. Halle la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $P = (1, 1, 6)$.

8. Determine si las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son positivas o negativas en el punto P sobre la gráf ca de la f gura 7.

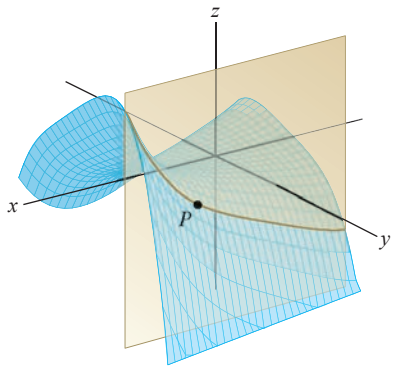


FIGURA 7

En los problemas 9-12, haga referencia a la f gura 8.

9. Estime f_x y f_y en el punto A.

10. ¿Es f_x positiva o negativa en B?

11. Empezando en el punto B, ¿en qué dirección (N, NE, SO, etc.) aumenta f más rápidamente?

12. ¿En qué punto, A, B o C, es menor f_y?

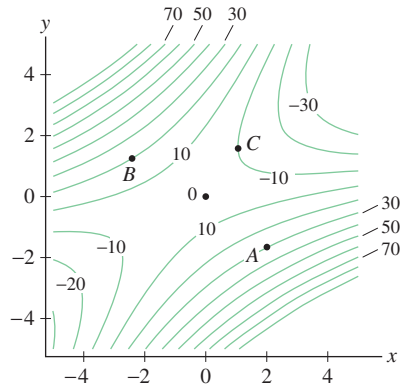


FIGURA 8 Mapa de contorno de $f(x,y)$.

En los problemas 13-40, calcule las derivadas parciales de primer orden.

13. $z = x^2 + y^2$

14. $z = x^4y^3$

15. $z = x^4y + xy^{-2}$

16. $V = \pi r^2 h$

17. $z = \dfrac{x}{y}$

18. $z = \dfrac{x}{x-y}$

19. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

20. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21. $z = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$

22. $z = \operatorname{sen}(u^2v)$

23. $z = \tan\dfrac{x}{y}$

24. $S = \tan^{-1}(wz)$

25. $z = \ln(x^2 + y^2)$

26. $A = \operatorname{sen}(4\theta - 9t)$

27. $W = e^{r+s}$

28. $Q = re^{\theta}$

29. $z = e^{xy}$

30. $R = e^{-v^2/k}$

31. $z = e^{-x^2-y^2}$

32. $P = e^{\sqrt{y^2+z^2}}$

33. $U = \dfrac{e^{-rt}}{r}$

34. $z = y^x$

35. $z = \operatorname{senh}(x^2y)$

36. $z = \cosh(t - \cos x)$

37. $w = xy^2z^3$

38. $w = \dfrac{x}{y+z}$

39. $Q = \dfrac{L}{M}e^{-Lt/M}$ **40.** $w = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

En los problemas 41-44, calcule las derivadas parciales que se indican.

41. $f(x,y) = 3x^2y + 4x^3y^2 - 7xy^5, \quad f_x(1,2)$

42. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - y), \quad f_y(0,\pi)$

43. $g(u,v) = u\ln(u+v), \quad g_u(1,2)$

44. $h(x,z) = e^{xz-x^2z^3}, \quad h_z(3,0)$

Los problemas 45 y 46 se refieren al ejemplo 5.

45. Calcule N para $L = 0{,}4$, $R = 0{,}12$ y $d = 10$ y use la aproximación lineal para estimar ΔN si d aumenta de 10 a 10,4.

46. Estime ΔN si $(L, R, d) = (0{,}5, 0{,}15, 8)$ y R aumenta de 0,15 a 0,17.

47. La **temperatura de bochorno** I es una medida de la sensación de calor cuando la humedad relativa es H (medida en porcentaje) y la temperatura real del aire es T (en grados Fahrenheit). Una fórmula aproximada para la temperatura de bochorno que es válida para (T, H) alrededor de $(90, 40)$ es:

$$I(T,H) = 45{,}33 + 0{,}6845T + \ 5{,}758H - 0{,}00365T^2 - \\ -0{,}1565HT + 0{,}001HT^2$$

(a) Calcule I en $(T, H) = (95, 50)$.

(b) ¿Qué derivada parcial informa sobre el aumento en I por grado incrementado en T cuando $(T, H) = (95, 50)$. Calcule esta derivada parcial.

48. La **temperatura de sensación** W mide el frío que siente una persona (basado en la tasa de pérdida de calor para la piel expuesta) cuando la temperatura exterior es de $T°\text{C}$ (con $T \le 10$) y la velocidad del viento es v m/s (con $v \ge 2$):

$$W = 13{,}1267 + 0{,}6215T - 13{,}947v^{0{,}16} + 0{,}486Tv^{0{,}16}$$

Calcule $\partial W/\partial v$ en $(T, v) = (-10, 15)$ y use este valor para estimar ΔW si $\Delta v = 2$.

49. El volumen de un cono circular de radio r y altura h es $V = \frac{\pi}{3}r^2h$. Suponga que $r = h = 12$ cm. ¿Qué incremento da lugar a un mayor aumento en V: un incremento de 1 cm en r o de 1 cm en h? Razone su respuesta utilizando derivadas parciales.

50. Use la aproximación lineal para estimar el cambio porcentual en el volumen de un cono circular de radio $r = 40$ cm si la altura aumenta de 40 a 41 cm.

51. Calcule $\partial W/\partial E$ y $\partial W/\partial T$, para $W = e^{-E/kT}$, siendo k una constante.

52. Calcule $\partial P/\partial T$ y $\partial P/\partial V$, donde la presión P, volumen V y temperatura T se relacionan según la ley de los gases ideales, $PV = nRT$ (R y n son constantes).

53. Use el mapa de contorno de $f(x,y)$ en la f gura 9 para explicar las siguientes af rmaciones.

(a) f_y es mayor en P que en Q y f_x es menor (más negativa) en P que en Q.

(b) $f_x(x,y)$ es una función decreciente de y; es decir, para un valor f jado $x = a$, $f_x(a,y)$ es decreciente en y.

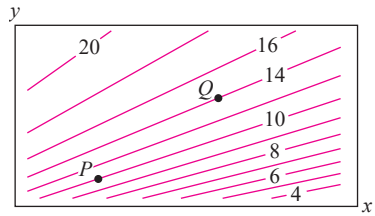


FIGURA 9 Intervalo de contorno 2.

54. Estime las derivadas parciales en P para la función cuyo mapa de contorno se muestra en la f gura 10.

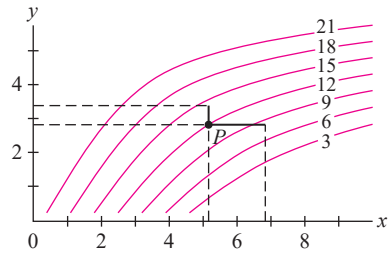


FIGURA 10

55. Sobre la mayor parte de la Tierra, una brújula magnética no apunta al verdadero (geográf co) norte, sino que en algunos puntos señala formando un ángulo al este o al oeste del verdadero norte. El ángulo D entre el norte magnético y el norte verdadero se llama **declinación magnética**. Use la f gura 11 para determinar cuál de las siguientes af rmaciones es cierta:

(a) $\left.\dfrac{\partial D}{\partial y}\right|_A > \left.\dfrac{\partial D}{\partial y}\right|_B$ **(b)** $\left.\dfrac{\partial D}{\partial x}\right|_C > 0$ **(c)** $\left.\dfrac{\partial D}{\partial y}\right|_C > 0$

Observe que el eje horizontal aumenta de la derecha a la izquierda, debido a la manera de medir la longitud.

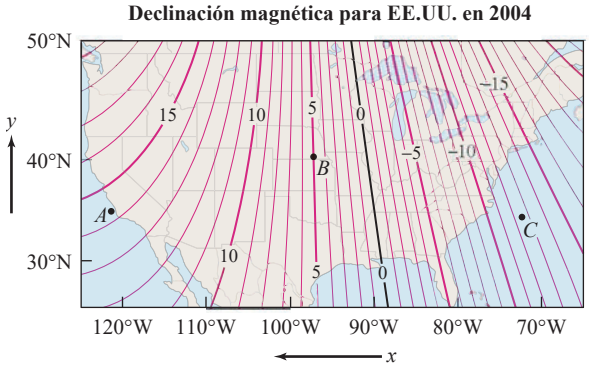


FIGURA 11 Intervalo de contorno 1°.

56. En referencia a la tabla 1:

(a) Estime $\partial\rho/\partial T$ y $\partial\rho/\partial S$ en los puntos $(S,T) = (34,2)$ y $(35,10)$ calculando la media de los cocientes incrementales por la derecha y por la izquierda.

(b) Para una salinidad fijada $S = 33$, ρ como función de T, ¿es cóncava o convexa? *Indicación:* determine si los cocientes $\Delta\rho/\Delta T$ son crecientes o decrecientes. ¿Qué puede deducir sobre el signo de $\partial^2\rho/\partial T^2$?

TABLA 1 Densidad del agua del mar ρ como función de la temperatura T y de la salinidad S

T \ S	30	31	32	33	34	35	36
12	22,75	23,51	24,27	25,07	25,82	26,6	27,36
10	23,07	23,85	24,62	25,42	26,17	26,99	27,73
8	23,36	24,15	24,93	25,73	26,5	27,28	29,09
6	23,62	24,44	25,22	26	26,77	27,55	28,35
4	23,85	24,62	25,42	26,23	27	27,8	28,61
2	24	24,78	25,61	26,38	27,18	28,01	28,78
0	24,11	24,92	25,72	26,5	27,34	28,12	28,91

En los problemas 57-62, calcule las derivadas que se indican.

57. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

58. $g(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}$

59. $h(u,v) = \dfrac{u}{u+4v}$, $h_{vv}(u,v)$

60. $h(x,y) = \ln(x^3+y^3)$, $h_{xy}(x,y)$

61. $f(x,y) = x\ln(y^2)$, $f_{yy}(2,3)$

62. $g(x,y) = xe^{-xy}$, $g_{xy}(-3,2)$

63. Calcule f_{xyxzy} para la siguiente función:

$$f(x,y,z) = y\,\mathrm{sen}(xz)\,\mathrm{sen}(x+z) + (x+z^2)\tan y + x\tan\left(\frac{z+z^{-1}}{y-y^{-1}}\right)$$

Indicación: Considere un orden de derivación apropiado para cada término.

64. Sea:

$$f(x,y,u,v) = \frac{x^2 + e^y v}{3y^2 + \ln(2+u^2)}$$

¿Cuál es la manera más rápida de probar que $f_{uvxyvu}(x,y,u,v) = 0$ para todo (x,y,u,v)?

En los problemas 65-72, calcule la derivada que se indica.

65. $f(u,v) = \cos(u+v^2)$, f_{uuv}

66. $g(x,y,z) = x^4y^5z^6$, g_{xxyz}

67. $F(r,s,t) = r(s^2+t^2)$, F_{rst}

68. $u(x,t) = t^{-1/2}e^{-(x^2/4t)}$, u_{xx}

69. $F(\theta,u,v) = \mathrm{senh}(uv+\theta^2)$, $F_{uu\theta}$

70. $R(u,v,w) = \dfrac{u}{v+w}$, R_{uvw}

71. $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, g_{xyz}

72. $u(x,t) = \mathrm{sech}^2(x-t)$, u_{xxx}

73. Halle una función tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$.

74. Demuestre que no existe ninguna función $f(x,y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = xy$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$. *Indicación:* pruebe que f no puede cumplir el teorema de Clairaut.

75. Suponga que f_{xy} y f_{yx} son continuas y que f_{yxx} existe. Pruebe que f_{xyx} también existe y que $f_{yxx} = f_{xyx}$.

76. Pruebe que $u(x,t) = \mathrm{sen}(nx)\,e^{-n^2t}$ cumple la ecuación del calor para cualquier constante n:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \boxed{3}$$

77. Halle todos los valores de A y de B tales que $f(x,t) = e^{Ax+Bt}$ cumpla la ec. (3).

78. La función:

$$f(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}$$

describe el comportamiento de la temperatura de una barra de metal en un instante $t > 0$ cuando se ha aplicado un impulso de calor en el origen (vea el ejemplo 11). Un insecto pequeño que está sobre la barra, situado a una distancia x del origen, siente aumentar y disminuir la temperatura cuando el calor se propaga a través de la barra. Pruebe que el insecto siente la máxima temperatura en el instante $t = \frac{1}{2}x^2$.

En los problemas 79-82, el ***operador de Laplace*** Δ *se define como* $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$. *Una función* $u(x,y)$ *que cumpla la ecuación de Laplace* $\Delta u = 0$ *se denomina* ***armónica****.*

79. Pruebe que las siguientes funciones son armónicas:

(a) $u(x,y) = x$ **(b)** $u(x,y) = e^x\cos y$

(c) $u(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ **(d)** $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

80. Halle todos los polinomios armónicos $u(x,y)$ de grado 3, es decir $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$.

81. Pruebe que si $u(x,y)$ es armónica, entonces las derivadas parciales $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$ son armónicas.

82. Halle todas las constantes a, b tales que $u(x,y) = \cos(ax)e^{by}$ sea armónica.

83. Pruebe que $u(x,t) = \mathrm{sech}^2(x-t)$ cumple la **ecuación de Korteweg-de Vries** (que surge en el estudio de las ondas del agua):

$$4u_t + u_{xxx} + 12uu_x = 0$$

Problemas avanzados

84. Las hipótesis son importantes En este ejercicio se muestra que las hipótesis del teorema de Clairaut son necesarias. Sea:

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

(a) Compruebe que para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

(b) Use la definición mediante límites de las derivadas parciales para probar que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ y que tanto $f_{yx}(0,0)$ como $f_{xy}(0,0)$ existen pero que no son iguales.

(c) Pruebe que para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

Pruebe que f_{xy} no es continua en $(0,0)$. *Indicación:* muestre que $\lim_{h\to 0} f_{xy}(h,0) \neq \lim_{h\to 0} f_{xy}(0,h)$.

(d) Explique por qué el resultado del apartado (b) no contradice el teorema de Clairaut.

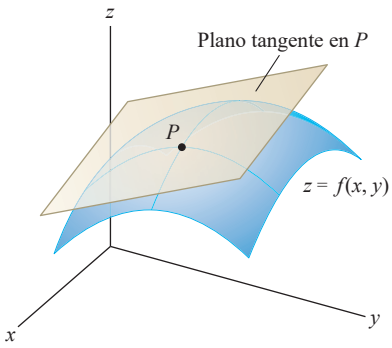


FIGURA 1 Plano tangente a la gráfica de $z = f(x,y)$.

15.4 Diferenciabilidad y planos tangentes

En esta sección, se generalizan dos de los conceptos básicos del cálculo en una variable: la derivabilidad y la recta tangente. La recta tangente se transforma en el *plano tangente* para funciones de dos variables (figura 1).

A nivel intuitivo, se diría que una función continua $f(x,y)$ es diferenciable si es **localmente lineal**, es decir, si su gráfica parece cada vez más y más plana conforme nos acercamos más y más a un punto $P = (a, b, f(a,b))$ y resulta finalmente indistinguible del plano tangente(figura 2).

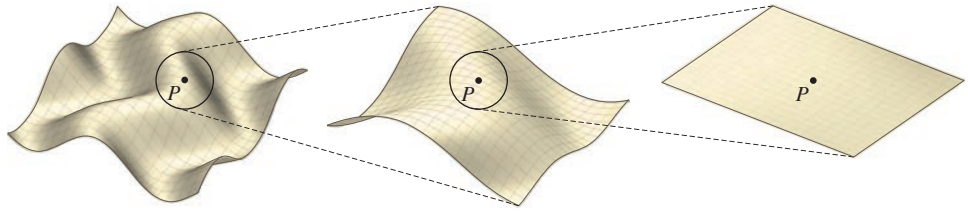


FIGURA 2 La gráfica parece cada vez más y más plana conforme nos acercamos más y más a un punto P.

Se puede demostrar que si el plano tangente en $P = (a, b, f(a,b))$ existe, entonces su ecuación debe ser $z = L(x,y)$, donde $L(x,y)$ es la **linealización** en (a,b), y que se define como:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b)$$

¿Por qué debe ser justamente este el plano tangente? La respuesta es que se trata del único plano que contiene las rectas tangentes a las dos curvas de las trazas verticales que pasan por P [figura 3(A)]. De hecho, si se considera $y = b$ en $z = L(x,y)$, el término $f_y(a,b)(y - b)$ se elimina y queda la ecuación de la recta tangente a la curva de la traza vertical $z = f(x,b)$ en P:

$$z = L(x,b) = f(a,b) + f_x(a,b)(x - a)$$

De forma análoga, $z = L(a,y)$ es la recta tangente a la traza vertical $z = f(a,y)$ en P.

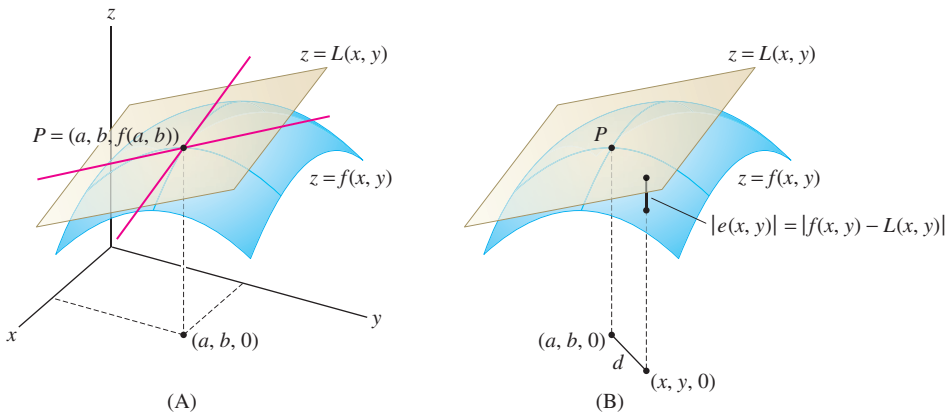


FIGURA 3

Sin embargo, antes de poder af rmar que el plano tangente existe, se debe imponer una condición sobre $f(x,y)$ que garantice que la gráf ca parezca plana al acercarnos a P. Sea

$$e(x,y) = f(x,y) - L(x,y)$$

Tal y como se ve en la f gura 3(B), $|e(x,y)|$ es la distancia vertical entre la gráf ca de $f(x,y)$ y el plano $z = L(x,y)$. Esta distancia tiende a cero cuando (x,y) tiende a (a,b) pues $f(x,y)$ es continua. Para que sea localmente lineal, se exige que esta distancia tienda a cero *más rápido* que la distancia de (x,y) a (a,b). Esta idea se expresa mediante la condición:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{e(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

DEFINICIÓN Diferenciabilidad Suponga que $f(x,y)$ está def nida en un disco D que contiene a (a,b) y que $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen.

- $f(x,y)$ es **diferenciable** en (a,b) si es **localmente lineal**, es decir si:

$$f(x,y) = L(x,y) + e(x,y) \qquad \boxed{1}$$

donde $e(x,y)$ cumple:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{e(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

- En tal caso, el **plano tangente** a la gráf ca en $(a,b,f(a,b))$ es el plano de ecuación $z = L(x,y)$. Explícitamente:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \qquad \boxed{2}$$

RECORDATORIO

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Si $f(x,y)$ es diferenciable en todos los puntos de un dominio $\mathcal{D}$, se dice que $f(x,y)$ es diferenciable sobre $\mathcal{D}$.

Es pesado comprobar la condición de linealidad local directamente (vea el problema 41) pero, afortunadamente, no suele ser necesario. El siguiente teorema proporciona un criterio para la diferenciabilidad que es más fácil de aplicar. Asegura que la mayor parte de las funciones que se utilizan en aplicaciones prácticas son diferenciables en sus dominios. En el apéndice D puede consultar una demostración para esta resultado.

La definición de diferenciabilidad se extiende a funciones de n variables y el teorema 1 también es cierto en este contexto: si todas las derivadas parciales de $f(x_1,\ldots,x_n)$ existen y son continuas en un dominio abierto $\mathcal{D}$, entonces $f(x_1,\ldots,x_n)$ es diferenciable sobre $\mathcal{D}$.

TEOREMA 1 Criterio de diferenciabilidad Si $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ existen y son continuas en un disco abierto D, entonces $f(x,y)$ es diferenciable sobre D.

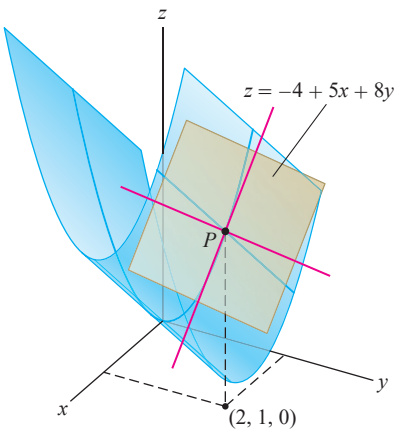


FIGURA 4 Gráf ca de $f(x,y) = 5x + 4y^2$ y del plano tangente en $P = (2, 1, 14)$.

EJEMPLO 1 Pruebe que $f(x,y) = 5x + 4y^2$ es diferenciable (f gura 4). Halle una ecuación del plano tangente en $(a, b) = (2, 1)$.

Solución Las derivadas parciales existen y son funciones continuas:

$$f(x,y) = 5x + 4y^2 \qquad f_x(x,y) = 5 \qquad f_y(x,y) = 8y$$

Por tanto, $f(x,y)$ es diferenciable para todo (x,y) según el teorema 1. Para hallar el plano tangente, se evalúan las derivadas parciales en $(2, 1)$:

$$f(2,1) = 14 \qquad f_x(2,1) = 5 \qquad f_y(2,1) = 8$$

La linealización en $(2, 1)$ es:

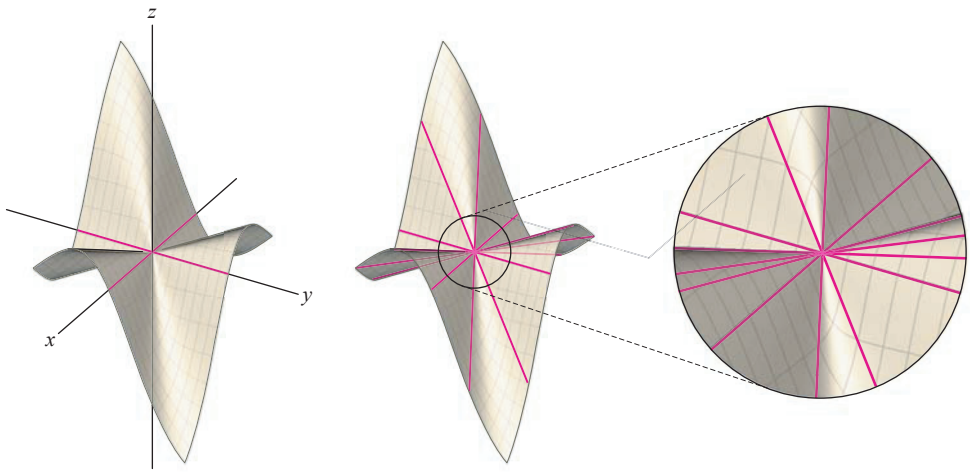
$$L(x,y) = \underbrace{14 + 5(x-2) + 8(y-1)}_{f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)} = -4 + 5x + 8y$$

La ecuación del plano tangente por $P = (2, 1, 14)$ es $z = -4 + 5x + 8y$. ■

En la siguiente sección se utiliza la linealidad local para demostrar la regla de la cadena para caminos, sobre la cual se basan las propiedades fundamentales del gradiente.

Las hipótesis son importantes La linealidad local desempeña un papel importante, y aunque la mayor parte de las funciones son localmente lineales, la mera existencia de las derivadas parciales no garantiza la linealidad local. Esto contrasta con la situación para una variable, en que $f(x)$ es automáticamente localmente lineal en $x = a$ si $f'(a)$ existe (Problema 44).

La función $g(x,y)$ de f gura 5(A) muestra lo que puede fallar. La gráf ca contiene los ejes x e y (dicho de otro modo $g(x,y) = 0$ si x o y es cero) y, por tanto, las derivadas parciales $g_x(0,0)$ y $g_y(0,0)$ son ambas cero. El plano tangente en el origen $(0,0)$, si existiera, debería ser el plano xy. Sin embargo, la f gura 5(B) muestra que la gráf ca también contiene rectas por el origen que no se encuentran en el plano xy (de hecho, la gráf ca está formada en su totalidad por rectas que pasan por el origen). Al acercarnos al origen, estas rectas continúan formando un ángulo con el plano xy y la superf cie no se aplana. Por tanto, $g(x,y)$ no puede ser localmente lineal en $(0,0)$ y el plano tangente no existe. En particular, $g(x,y)$ no puede cumplir las hipótesis del teorema 1, por lo que las derivadas parciales $g_x(x,y)$ y $g_y(x,y)$ no pueden ser continuas en el origen (vea más detalles en el problema 45).



(A) La traza horizontal en $z = 0$ está formada por los ejes x e y.

(B) Pero la gráfica también contiene rectas no horizontales que pasan por el origen.

(C) Por tanto, la gráfica no resulta cada vez más plana al acercarnos al origen.

FIGURA 5 Gráf cas de $g(x,y) = \dfrac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}$.

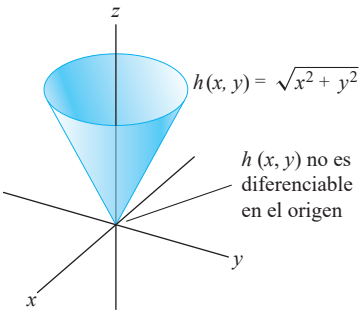


FIGURA 6 La función $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es diferenciable en todo punto, salvo en el origen.

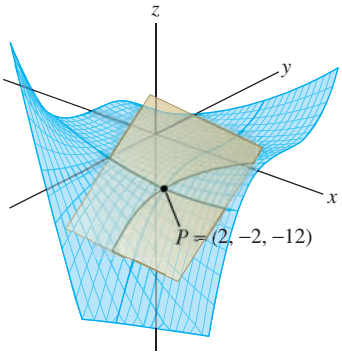


FIGURA 7 Plano tangente a la superf cie $f(x,y) = xy^3 + x^2$ que pasa por $P = (2, -2, -12)$.

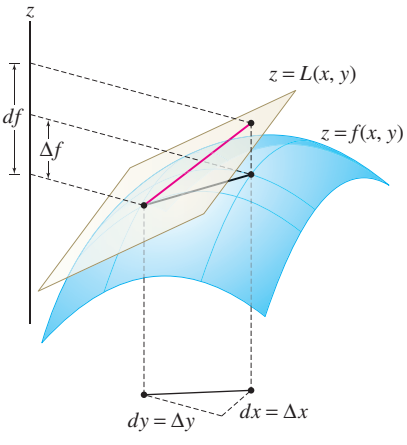


FIGURA 8 La cantidad df es la variación en la altura del plano tangente.

EJEMPLO 2 ¿Dónde es diferenciable la función $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$?

Solución Las derivadas parciales existen y son continuas para todo $(x,y) \neq (0,0)$:

$$h_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad h_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Sin embargo, las derivadas parciales en el origen $(0,0)$ no existen. De hecho, $h_x(0,0)$ no existe porque $h(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$. Análogamente, $h_y(0,0)$ tampoco existe. Según el teorema 1, $h(x,y)$ es diferenciable en todo punto salvo en $(0,0)$ (f gura 6). ■

EJEMPLO 3 Halle el plano tangente a la gráf ca de $f(x,y) = xy^3 + x^2$ en $(2,-2)$.

Solución Las derivadas parciales son continuas y, por tanto, $f(x,y)$ es diferenciable:

$$f_x(x,y) = y^3 + 2x \qquad f_x(2,-2) = -4$$
$$f_y(x,y) = 3xy^2 \qquad f_y(2,-2) = 24$$

Como $f(2,-2) = -12$, una ecuación del plano tangente por $(2,-2,-12)$ es:

$$z = -12 - 4(x - 2) + 24(y + 2)$$

que se puede reescribir como $z = 44 - 4x + 24y$ (f gura 7). ■

Aproximación lineal y diferenciales

Por def nición, si $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b), entonces es localmente lineal y la **aproximación lineal** es:

$$f(x,y) \approx L(x,y) \qquad \text{para } (x,y) \text{ cercano a } (a,b)$$

donde:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b)$$

Se puede reescribir esta expresión de diferentes formas. En primer lugar, considere $x = a + h$ e $y = b + k$. Entonces:

$$f(a + h, b + k) \approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \qquad 3$$

También se puede expresar la aproximación lineal en términos de la *variación en f*:

$$\Delta f = f(x,y) - f(a,b) \qquad \Delta x = x - a \qquad \Delta y = y - b$$

$$\Delta f \approx f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y \qquad 4$$

Finalmente, la aproximación lineal se suele expresar en términos de **diferenciales**:

$$df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Como se muestra en la f gura 8, df representa la variación en la altura del plano tangente para variaciones en x e y dadas por dx y dy (cuando se trabaja con diferenciales, se les llama dx y dy en lugar de Δx y Δy), mientras que Δf es es el cambio en la función propiamente dicho. Según la aproximación lineal, ambos cambios son aproximadamente iguales:

$$\Delta f \approx df$$

Estas aproximaciones funcionan en cualquier número de variables. En tres variables:

$$f(a+h, b+k, c+\ell) \approx f(a,b,c) + f_x(a,b,c)h + f_y(a,b,c)k + f_z(a,b,c)\ell$$

o, en términos de diferenciales, $\Delta f \approx df$, donde:

$$df = f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz$$

EJEMPLO 4 Use la aproximación lineal para estimar:

$$(3{,}99)^3(1{,}01)^4(1{,}98)^{-1}$$

A continuación, utilice una calculadora para estimar el porcentaje de error.

RECORDATORIO *El porcentaje de error es igual a:*

$$\left|\frac{\text{error}}{\text{valor real}}\right| \times 100\,\%$$

Solución Piense en $(3{,}99)^3(1{,}01)^4(1{,}98)^{-1}$ como en un valor de $f(x,y,z) = x^3y^4z^{-1}$:

$$f(3{,}99,\ 1{,}01,\ 1{,}98) = (3{,}99)^3(1{,}01)^4(1{,}98)^{-1}$$

Entonces tiene sentido utilizar la aproximación lineal en (4, 1, 2):

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3y^4z^{-1} & f(4,1,2) &= (4^3)(1^4)(2^{-1}) = 32 \\ f_x(x,y,z) &= 3x^2y^4z^{-1} & f_x(4,1,2) &= 24 \\ f_y(x,y,z) &= 4x^3y^3z^{-1} & f_y(4,1,2) &= 128 \\ f_z(x,y,z) &= -x^3y^4z^{-2} & f_z(4,1,2) &= -16 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la aproximación lineal en tres variables que se enunció anteriormente, con $a = 4$, $b = 1$ y $c = 2$, se obtiene:

$$\underbrace{(4+h)^3(1+k)^4(2+\ell)^{-1}}_{f(4+h,1+k,2+\ell)} \approx 32 + 24h + 128k - 16\ell$$

Para $h = -0{,}01$, $k = 0{,}01$ y $\ell = -0{,}02$, se obtiene la estimación:

$$(3{,}99)^3(1{,}01)^4(1{,}98)^{-1} \approx 32 + 24(-0{,}01) + 128(0{,}01) - 16(-0{,}02) = 33{,}36$$

El valor obtenido con la calculadora es $(3{,}99)^3(1{,}01)^4(1{,}98)^{-1} \approx 33{,}384$, por lo que el error en la estimación es menor que 0,025. El porcentaje de error es:

$$\text{Porcentaje de error} \approx \frac{|33{,}384 - 33{,}36|}{33{,}384} \times 100 \approx 0{,}075\,\%$$

EJEMPLO 5 **Índice de masa corporal** El IMC de una persona es $I = W/H^2$, donde W es el peso corporal (en kilogramos) y H es la altura del cuerpo (en metros). Estime el cambio en el IMC de un niño si (W, H) pasa de (40, 1,45) a (41,5, 1,47).

El IMC es uno de los factores utilizados para determinar el riesgo de padecer ciertas enfermedades como la diabetes o la hipertensión. El rango correspondiente a $18{,}5 \le I \le 24{,}9$ se considera normal para adultos de más de 20 años.

Solución

Etapa 1. **Calcule el diferencial en $(W, H) = (40, 1{,}45)$**

$$\frac{\partial I}{\partial W} = \frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{W}{H^2}\right) = \frac{1}{H^2} \qquad \frac{\partial I}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{W}{H^2}\right) = -\frac{2W}{H^3}$$

En $(W, H) = (40, 1{,}45)$, se tiene

$$\left.\frac{\partial I}{\partial W}\right|_{(40,1{,}45)} = \frac{1}{1{,}45^2} \approx 0{,}48 \qquad \left.\frac{\partial I}{\partial H}\right|_{(40,1{,}45)} = -\frac{2(40)}{1{,}45^3} \approx -26{,}24$$

Por tanto, el diferencial en (40, 1,45) es:

$$dI \approx 0{,}48\,dW - 26{,}24\,dH$$

Etapa 2. **Estime el cambio**

Se ha probado que el diferencial dI en $(40, 1{,}45)$ es $0{,}48\,dW - 26{,}24\,dH$. Si (W, H) pasa de $(40, 1{,}45)$ a $(41{,}5, 1{,}47)$, entonces:

$$dW = 41{,}5 - 40 = 1{,}5 \qquad dH = 1{,}47 - 1{,}45 = 0{,}02$$

Por tanto:

$$\Delta I \approx dI = 0{,}48\,dW - 26{,}24\,dH = 0{,}48(1{,}5) - 26{,}24(0{,}02) \approx 0{,}2$$

Se obtiene que el IMC aumenta, aproximadamente, en 0,2. ■

15.4 RESUMEN

- La *linealización* en dos y tres variables:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$
$$L(x,y,z) = f(a,b,c) + f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c)$$

- $f(x,y)$ es *diferenciable* en (a,b) si $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen y

$$f(x,y) = L(x,y) + e(x,y)$$

donde $e(x,y)$ es una función tal que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{e(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

- Resultado utilizado en la práctica: *si $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ existen y son continuas en un disco D que contiene a (a,b), entonces $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b).*
- Ecuación del plano tangente a $z = f(x,y)$ en (a,b):

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

- Formas equivalentes de la aproximación lineal:

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$
$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$$
$$\Delta f \approx f_x(a,b)\,\Delta x + f_y(a,b)\,\Delta y$$

- En forma diferencial, $\Delta f \approx df$, donde:

$$df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$
$$df = f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

15.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cómo se def ne la linealización de $f(x,y)$ en (a,b)?

2. Def na la linealidad local para funciones de dos variables.

En los problemas 3-5, suponga que

$$f(2,3) = 8 \qquad f_x(2,3) = 5 \qquad f_y(2,3) = 7$$

3. ¿Cuál de las expresiones (a)-(b) es la linealización de f en $(2, 3)$?

(a) $L(x, y) = 8 + 5x + 7y$

(b) $L(x, y) = 8 + 5(x - 2) + 7(y - 3)$

4. Estime $f(2, 3,1)$.

5. Estime Δf en $(2, 3)$ si $\Delta x = -0{,}3$ y $\Delta y = 0{,}2$.

6. ¿Qué teorema permite deducir la diferenciabilidad de

$$f(x, y) = x^3y^8?$$

Problemas

1. Use la ec. (2) para hallar una ecuación del plano tangente a $f(x, y) = = 2x^2 - 4xy^2$ en $(-1, 2)$.

2. Halle la ecuación del plano tangente en la f gura 9. El punto de tangencia es $(a, b) = (1, 0{,}8, 0{,}34)$.

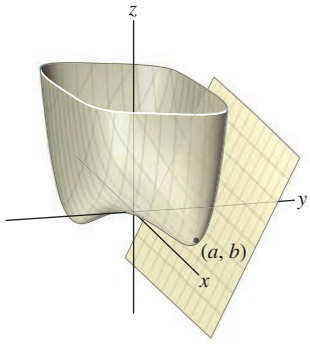


FIGURA 9 Gráf ca de $f(x, y) = 0{,}2x^4 + y^6 - xy$.

En los problemas 3-10, halle una ecuación del plano tangente en el punto que se indica.

3. $f(x, y) = x^2y + xy^3, \quad (2, 1)$

4. $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{y}}, \quad (4, 4)$

5. $f(x, y) = x^2 + y^{-2}, \quad (4, 1)$

6. $G(u, w) = \operatorname{sen}(uw), \quad (\frac{\pi}{6}, 1)$

7. $F(r, s) = r^2s^{-1/2} + s^{-3}, \quad (2, 1)$

8. $g(x, y) = e^{x/y}, \quad (2, 1)$

9. $f(x, y) = \operatorname{sech}(x - y), \quad (\ln 4, \ln 2)$

10. $f(x, y) = \ln(4x^2 - y^2), \quad (1, 1)$

11. Halle los puntos sobre la gráf ca de $z = 3x^2 - 4y^2$ en los que el vector $\mathbf{n} = \langle 3, 2, 2\rangle$ es normal al plano tangente.

12. Halle los puntos sobre la gráf ca de $z = xy^3 + 8y^{-1}$ en los que el plano tangente es paralelo a $2x + 7y + 2z = 0$.

13. Halle la linealización $L(x, y)$ de $f(x, y) = x^2y^3$ en $(a, b) = (2, 1)$. Use su resultado para estimar $f(2{,}01, 1{,}02)$ y $f(1{,}97, 1{,}01)$ y compare con los valores obtenidos usando una calculadora.

14. Exprese la aproximación lineal a $f(x, y) = x(1 + y)^{-1}$ en $(a, b) = = (8, 1)$ de la forma:

$$f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

Use su resultado para estimar $\frac{7{,}98}{2{,}02}$ y compárelo con el valor obtenido usando una calculadora.

15. Sea $f(x, y) = x^3y^{-4}$. Use la ec. (4) para estimar la variación:

$$\Delta f = f(2{,}03, 0{,}9) - f(2, 1)$$

16. Use la aproximación lineal a $f(x, y) = \sqrt{x/y}$ en $(9, 4)$ para estimar $\sqrt{9{,}1/3{,}9}$.

17. Use la aproximación lineal de $f(x, y) = e^{x^2+y}$ en $(0, 0)$ para estimar $f(0{,}01, -0{,}02)$. Compare con el valor que se obtiene usando una calculadora.

18. Sea $f(x, y) = x^2/(y^2 + 1)$. Use la aproximación lineal en un punto apropiado (a, b) para estimar $f(4{,}01, 0{,}98)$.

19. Halle la linealización de $f(x, y, z) = z\sqrt{x + y}$ en $(8, 4, 5)$.

20. Halle la linealización de $f(x, y, z) = xy/z$ en el punto $(2, 1, 2)$. Use su resultado para estimar $f(2{,}05, 0{,}9, 2{,}01)$ y compare con el valor que se obtiene usando una calculadora.

21. Estime $f(2{,}1, 3{,}8)$ suponiendo que:

$$f(2, 4) = 5 \qquad f_x(2, 4) = 0{,}3 \qquad f_y(2, 4) = -0{,}2$$

22. Estime $f(1{,}02, 0{,}01, -0{,}03)$ suponiendo que:

$$f(1, 0, 0) = -3 \quad f_x(1, 0, 0) = -2$$
$$f_y(1, 0, 0) = 4 \quad f_z(1, 0, 0) = 2$$

En los problemas 23-28, use la aproximación lineal para estimar el valor. Compare con el valor que se obtiene usando una calculadora.

23. $(2{,}01)^3(1{,}02)^2$

24. $\dfrac{4{,}1}{7{,}9}$

25. $\sqrt{3{,}01^2 + 3{,}99^2}$

26. $\dfrac{0{,}98^2}{2{,}01^3 + 1}$

27. $\sqrt{(1{,}9)(2{,}02)(4{,}05)}$

28. $\dfrac{8{,}01}{\sqrt{(1{,}99)(2{,}01)}}$

29. Halle una ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en $P = (1, 2, 10)$ suponiendo que:

$$f(1, 2) = 10 \qquad f(1{,}1, 2{,}01) = 10{,}3 \qquad f(1{,}04, 2{,}1) = 9{,}7$$

30. Suponga que la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en $(-2, 3, 4)$ es $4x + 2y + z = 2$. Estime $f(-2{,}1, 3{,}1)$.

En los problemas 31-34, sea $I = W/H^2$ el IMC descrito en el ejemplo 5.

31. El peso de un niño es de $W = 34$ kg y su altura es de $H = 1{,}3$ m. Use la aproximación lineal para estimar el cambio en I si (W, H) pasa a ser $(36, 1{,}32)$.

32. Suponga que $(W, H) = (34, 1{,}3)$. Use la aproximación lineal para estimar el incremento en H necesario para mantener I constante si W aumenta a 35.

33. **(a)** Pruebe que $\Delta I \approx 0$ si $\Delta H/\Delta W \approx H/2W$.

(b) Suponga que $(W, H) = (25, 1{,}1)$. ¿Qué incremento en H deja I (aproximadamente) constante si W aumenta en 1 kg?

34. Estime el cambio en altura que disminuiría I en 1 si $(W, H) = (25, 1{,}1)$, suponiendo que W se mantiene constante.

35. El volumen V de un cilindro de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$.

(a) Use la aproximación lineal para probar que:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

(b) Estime el porcentaje de aumento en V, si tanto r como h aumentan ambas en un 2 %.

(c) El volumen de un cierto cilindro V se determina midiendo r y h. ¿Cuál de ellos daría lugar a un mayor error en V: un error del 1 % en r o un error del 1 % en h?

36. Use la aproximación lineal para probar que si $I = x^a y^b$, entonces:

$$\frac{\Delta I}{I} \approx a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y}$$

37. El pago mensual para un préstamo hipotecario viene dado por una función $f(P, r, N)$, donde P es el capital (tamaño inicial del préstamo), r es la tasa de interés y N la duración del préstamo, en meses. Las tasas de interés se expresan mediante decimales: una tasa de interés del 6 % se denota como $r = 0{,}06$. Si $P = 100\ 000$ \$, $r = 0{,}06$, y $N = 240$ (un préstamo a 20 años), entonces la cuota mensual es $f(100\ 000, 0{,}06, 240) = 716{,}43$. Además, con estos valores, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial P} = 0{,}0071 \qquad \frac{\partial f}{\partial r} = 5769 \qquad \frac{\partial f}{\partial N} = -1{,}5467$$

Estime:

(a) La variación en la cuota mensual si se piden 1000 \$ más de préstamo.

(b) La variación en la cuota mensual si la tasa de interés aumenta a $r = 6{,}5$ % y a $r = 7$ %.

(c) La variación en la cuota mensual si el préstamo es a 24 años.

38. Por un punto P de una calle de w pies de amplitud pasa tráfico automovilístico a una razón de R vehículos, en media, por segundo. Aunque la llegada de vehículos es irregular, los ingenieros de tráfico han determinado que el tiempo medio de espera T, hasta que se da una brecha de t segundos en el tráfico, es aproximadamente $T = te^{Rt}$ segundos. Un peatón que camina a velocidad de 3,5 pies/s (5,1 mph) necesita $t = w/3{,}5$ s para atravesar la calle. Por tanto, el tiempo medio que el peatón necesita esperar hasta poder cruzar la calle es $f(w, R) = (w/3{,}5)e^{wR/3{,}5}$ s.

(a) ¿Cuál sería el tiempo medio de espera del peatón si $w = 25$ pies y $R = 0{,}2$ vehículos por segundo?

(b) Use la aproximación lineal para estimar el incremento en el tiempo de espera si w aumenta a 27 pies.

(c) Estime el tiempo medio de espera si la amplitud aumenta a 27 pies y R disminuye a 0,18.

(d) ¿Cuál es la tasa de incremento en el tiempo de espera por un aumento de 1 pie en la amplitud, cuando $w = 30$ pies y $R = 0{,}3$ vehículos por segundo?

39. Se calcula el volumen V de un cilindro circular de 3,5 m de diámetro y 6,2 m de altura. Use la aproximación lineal para estimar el error máximo en V, si cada uno de estos valores está sujeto a un posible error máximo de 5 %. Recuerde que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Problemas avanzados

40. Pruebe que si $f(x, y)$ es diferenciable en (a, b), entonces la función de una variable $f(x, b)$ es derivable en $x = a$. Use este resultado, para demostrar que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *no* es diferenciable en $(0, 0)$.

41. En este problema se prueba directamente (sin utilizar el teorema 1) que la función $f(x, y) = 5x + 4y^2$ del ejemplo 1 es localmente lineal en $(a, b) = (2, 1)$.

(a) Pruebe que $f(x, y) = L(x, y) + e(x, y)$ siendo $e(x, y) = 4(y - 1)^2$.

(b) Pruebe que:

$$0 \le \frac{e(x, y)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}} \le 4|y - 1|$$

(c) Compruebe que $f(x, y)$ es localmente lineal.

42. Pruebe directamente, como en el problema 41, que $f(x, y) = xy^2$ es diferenciable en $(0, 2)$.

43. **Diferenciabilidad implica continuidad** Use la definición de diferenciabilidad para demostrar que si f es diferenciable en (a, b), entonces f es continua en (a, b).

44. Sea $f(x)$ una función de una variable definida cerca de $x = a$. Dado un número M, sean:

$$L(x) = f(a) + M(x - a) \qquad e(x) = f(x) - L(x)$$

Por tanto $f(x) = L(x) + e(x)$. Se dice que f es localmente lineal en $x = a$, si se puede escoger M de manera que $\lim_{x \to a} \dfrac{e(x)}{|x - a|} = 0$.

(a) Pruebe que si $f(x)$ es diferenciable en $x = a$, entonces $f(x)$ es localmente lineal con $M = f'(a)$.

(b) Pruebe, recíprocamente, que si f es localmente lineal en $x = a$, entonces $f(x)$ es diferenciable y $M = f'(a)$.

45. **Las hipótesis son importantes** Sea $g(x, y) = 2xy(x + y)/(x^2 + y^2)$ para $(x, y) \neq 0$ y $g(0, 0) = 0$. En este ejercicio se prueba que $g(x, y)$ es continua en $(0, 0)$ y que $g_x(0, 0)$ y $g_y(0, 0)$ existen, pero que $g(x, y)$ no es diferenciable en $(0, 0)$.

(a) Pruebe, utilizando coordenadas polares, que $g(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.

(b) Use las definiciones por límites para probar que $g_x(0, 0)$ y $g_y(0, 0)$ existen y que ambas son iguales a cero.

(c) Pruebe que la linealización de $g(x, y)$ en $(0, 0)$ es $L(x, y) = 0$.

(d) Pruebe que si $g(x, y)$ fuera localmente lineal en $(0, 0)$, entonces se tendría que $\lim_{h \to 0} \dfrac{g(h, h)}{h} = 0$. A continuación, observe que este no es el caso pues $g(h, h) = 2h$. De esta manera, se ha demostrado que $g(x, y)$ no es localmente lineal en $(0, 0)$, en consecuencia, no es diferenciable en $(0, 0)$.

15.5 El gradiente y las derivadas direccionales

Hemos visto que la tasa de variación de una función f de varias variables depende de la elección de la dirección. Como las direcciones se indican por vectores, es natural utilizar vectores para describir la derivada de f en una dirección específica.

Con este objetivo en mente, se introduce el **gradiente** ∇f_P, que es el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f en P.

El gradiente de una función de n variables es el vector:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

DEFINICIÓN El gradiente El gradiente de una función $f(x,y)$ en un punto $P = (a,b)$ es el vector:

$$\nabla f_P = \langle f_x(a,b), f_y(a,b) \rangle$$

En tres variables, si $P = (a,b,c)$:

$$\nabla f_P = \langle f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c) \rangle$$

*El símbolo ∇, llamado "del," es la letra griega delta al revés. Fue popularizada por el físico escocés P. G. Tait (1831-1901), que llamó a este símbolo "nabla", por su parecido con el arpa asiria. El El gran físico James Clerk Maxwell se mostró reacio a adoptar este término y se refiere al gradiente simplemente como a la "pendiente". En 1871 escribe a su amigo Tait en tono de broma, "Still harping on that nabla?".**

* *Maxwell hace un juego de palabras con "harp", "arpa" en inglés y "harping" con el significado de "insistir".*

También $\nabla f_{(a,b)}$ o $\nabla f(a,b)$ son notaciones para el gradiente. En ocasiones, se omite la referencia al punto P y se escribe:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad \text{o} \quad \nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

El gradiente ∇f "asigna" un vector ∇f_P a cada punto en el domino de f, como en la figura 1.

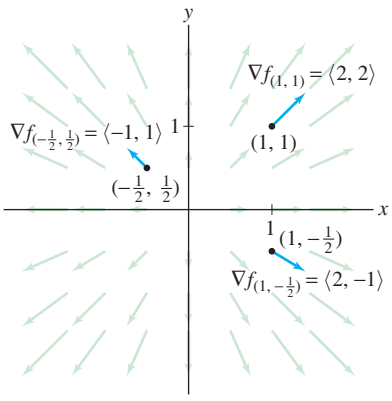


FIGURA 1 Vectores gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^2$ en diferentes puntos (los vectores no están dibujados a escala).

EJEMPLO 1 Dibujando los vectores gradiente Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calcule el gradiente ∇f, dibuje algunos vectores gradiente y calcule ∇f_P en $P = (1,1)$.

Solución Las derivadas parciales son $f_x(x,y) = 2x$ y $f_y(x,y) = 2y$, por lo que:

$$\nabla f = \langle 2x, 2y \rangle$$

El gradiente une el vector $\langle 2x, 2y \rangle$ al punto (x,y). Como se ve en la figura 1, estos vectores se alejan del origen. En el punto concreto $(1,1)$:

$$\nabla f_P = \nabla f(1,1) = \langle 2, 2 \rangle$$

EJEMPLO 2 Gradiente en tres variables Calcule $\nabla f_{(3,-2,4)}$, donde:

$$f(x,y,z) = ze^{2x+3y}$$

Solución Las derivadas parciales y el gradiente son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ze^{2x+3y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3ze^{2x+3y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{2x+3y}$$

$$\nabla f = \langle 2ze^{2x+3y}, 3ze^{2x+3y}, e^{2x+3y} \rangle$$

Por tanto, $\nabla f_{(3,-2,4)} = \langle 2 \cdot 4e^0, 3 \cdot 4e^0, e^0 \rangle = \langle 8, 12, 1 \rangle$.

En el siguiente se enuncian algunas propiedades útiles del gradiente. Las demostraciones se han dejado como problemas (vea los problemas 62-64).

TEOREMA 1 Propiedades del gradiente Si $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$ son diferenciables y c es una constante, entonces:

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

(ii) $\nabla(cf) = c\nabla f$

(iii) Regla del producto para gradientes: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(iv) Regla de la cadena para gradientes: si $F(t)$ es una función derivable de una variable, entonces:

$$\nabla(F(f(x,y,z))) = F'(f(x,y,z))\nabla f \qquad \boxed{1}$$

EJEMPLO 3 Utilizando la regla de la cadena para gradientes Halle el gradiente de:

$$g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^8$$

Solución La función g es una función compuesta; concretamente $g(x,y,z) = F(f(x,y,z))$ siendo $F(t) = t^8$ y $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Aplicando la ec. (1):

$$\begin{aligned}\nabla g = \nabla((x^2+y^2+z^2)^8) &= 8(x^2+y^2+z^2)^7\nabla(x^2+y^2+z^2) = \\ &= 8(x^2+y^2+z^2)^7\langle 2x, 2y, 2z\rangle = \\ &= 16(x^2+y^2+z^2)^7\langle x, y, z\rangle\end{aligned}$$

La regla de la cadena para trayectorias

La primera aplicación del gradiente es la regla de la cadena para trayectorias. En el capítulo 14, se representó una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ mediante una función a valores vectoriales $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. En este capítulo conviene utilizar una notación ligeramente diferente.

Una trayectoria vendrá representada por una función $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Se entenderá $\mathbf{c}(t)$ como un *punto* en movimiento y no como un *vector* en movimiento (figura 2). Por definición, $\mathbf{c}'(t)$ es el vector de derivadas como antes:

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad \mathbf{c}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$$

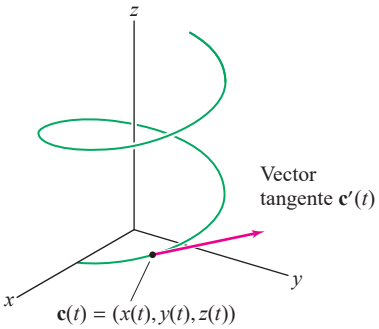


FIGURA 2 Vector tangente $\mathbf{c}'(t)$ a una trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

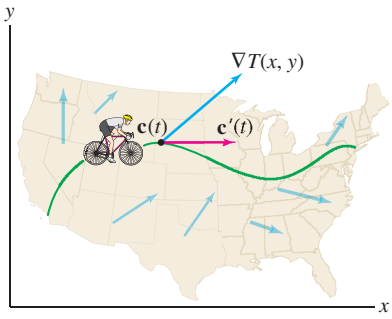


FIGURA 3 La temperatura de Chloe cambia a razón de $\nabla T_{\mathbf{c}(t)} \cdot \mathbf{c}'(t)$.

Recuerde, de la sección 14.2 que $\mathbf{c}'(t)$ es el vector tangente o "velocidad" que es tangente a la trayectoria y que apunta en la dirección y sentido del movimiento. Se utilizará una notación similar para trayectorias en $\mathbb{R}^2$.

La regla de la cadena para trayectorias se ocupa de funciones compuestas del tipo $f(\mathbf{c}(t))$. ¿Cuál es la idea bajo una función de este tipo? Como ejemplo, suponga que $T(x,y)$ es la temperatura en la posición (x,y) (figura 3). Ahora imagine que una ciclista, la llamaremos Chloe, circula describiendo la trayectoria $\mathbf{c}(t)$. Suponga que Chloe lleva consigo un termómetro y que comprueba su temperatura mientras circula. Su posición en el instante t es $\mathbf{c}(t)$, por lo que su lectura de temperatura en el instante t es la función compuesta

$$T(\mathbf{c}(t)) = \text{temperatura de Chloe en el instante } t$$

La lectura de la temperatura cambia cuando la posición de Chloe lo hace y la tasa de variación es la derivada:

$$\frac{d}{dt}T(\mathbf{c}(t))$$

La regla de la cadena para trayectorias establece que esta derivada es simplemente el producto escalar entre el gradiente de la temperatura ∇T evaluado en $\mathbf{c}(t)$ y el vector de velocidad de Chloe $\mathbf{c}'(t)$.

ATENCIÓN *No confunda la regla de la cadena para trayectorias con la, más elemental, regla de la cadena para gradientes que se enunció en el teorema 1.*

TEOREMA 2 Regla de la cadena para trayectorias Si f y $\mathbf{c}(t)$ son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f_{\mathbf{c}(t)} \cdot \mathbf{c}'(t)$$

Explícitamente, en el caso de dos variables, si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, entonces:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \cdot \langle x'(t), y'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Demostración Por def nición:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h}$$

Para calcular esta derivada, sean:

$$\Delta f = f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))$$

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) \qquad \Delta y = y(t+h) - y(t)$$

La demostración está basada en la linealidad local de f. Como en la sección 15.4, se considera:

$$\Delta f = f_x(x(t), y(t))\Delta x + f_y(x(t), y(t))\Delta y + e(x(t+h), y(t+h))$$

Ahora, sea $h = \Delta t$ y divida por Δt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f_x(x(t), y(t))\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t), y(t))\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{e(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))}{\Delta t}$$

Suponga, por un momento, que el último término tendiera a cero cuando $\Delta t \to 0$. Entonces ya se habría probado el resultado del enunciado:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \\
&= f_x(x(t), y(t)) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x(t), y(t)) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \\
&= f_x(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t))\frac{dy}{dt} = \\
&= \nabla f_{\mathbf{c}(t)} \cdot \mathbf{c}'(t)
\end{aligned}$$

La comprobación de que el último término tiende a cero es la siguiente:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \left(\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} \right)$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right)}_{\text{Zero}} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \right) = 0$$

El primer límite es cero porque una función diferenciable es localmente lineal (sección 15.4). El segundo límite es $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$, por lo que el producto es cero. ■

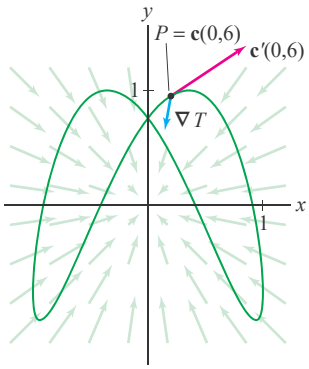


FIGURA 4 Vectores gradiente ∇T y la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos(t-2), \operatorname{sen} 2t)$.

EJEMPLO 4 La temperatura en la posición (x, y) es $T(x, y) = 20 + 10e^{-0,3(x^2+y^2)}$°C. Un insecto lleva un pequeño termómetro a lo largo de la trayectoria:

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(t-2), \operatorname{sen} 2t)$$

(t en segundos) como en la f gura 4. ¿Con qué rapidez está cambiando la temperatura en $t = 0,6$ s?

Solución En $t = 0,6$ s, la posición del insecto es:

$$\mathbf{c}(0,6) = (\cos(-1,4), \operatorname{sen} 0,6) \approx (0,170, 0,932)$$

Según la regla de la cadena para trayectorias, la tasa de variación de la temperatura es el producto escalar:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0,6} = \nabla T_{\mathbf{c}(0,6)} \cdot \mathbf{c}'(0,6)$$

Calculamos los vectores:

$$\nabla T = \left\langle -6xe^{-0,3(x^2+y^2)}, -6ye^{-0,3(x^2+y^2)} \right\rangle$$
$$\mathbf{c}'(t) = \langle -\operatorname{sen}(t-2), 2\cos 2t \rangle$$

y evaluamos en $\mathbf{c}(0,6) = (0,170, 0,932)$ utilizando una calculadora:

$$\nabla T_{\mathbf{c}(0,6)} \approx \langle -0,779, -4,272 \rangle$$
$$\mathbf{c}'(0,6) \approx \langle 0,985, 0,725 \rangle$$

Por tanto, la tasa de variación es:

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0,6} \nabla T_{\mathbf{c}(0,6)} \cdot \mathbf{c}'(t) \approx \langle -0,779, -4,272 \rangle \cdot \langle 0,985, 0,725 \rangle \approx -3,87\ ^\circ\text{C/s}$$

En el siguiente ejemplo, se aplica la regla de la cadena para trayectorias a una función de tres variables. En general, si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es una función diferenciable de n variables y $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ es una trayectoria derivable:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f \cdot \mathbf{c}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

EJEMPLO 5 Calcule $\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\right|_{t=\pi/2}$, donde:

$$f(x, y, z) = xy + z^2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

Solución Se tiene $\mathbf{c}(\frac{\pi}{2}) = (\cos \frac{\pi}{2}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$. Calcule el gradiente:

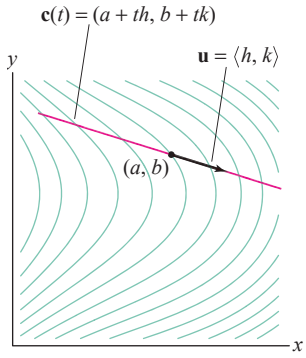
$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \langle y, x, 2z \rangle \qquad \nabla f_{\mathbf{c}(\pi/2)} = \nabla f\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right) = \langle 1, 0, \pi \rangle$$

A continuación, calcule el vector tangente:

$$\mathbf{c}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1 \rangle \qquad \mathbf{c}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}, 1 \right\rangle = \langle -1, 0, 1 \rangle$$

Por la regla de la cadena:

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\right|_{t=\pi/2} = \nabla f_{\mathbf{c}(\pi/2)} \cdot \mathbf{c}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 1, 0, \pi \rangle \cdot \langle -1, 0, 1 \rangle = \pi - 1$$



Mapa de contorno de $f(x, y)$

FIGURA 5 La derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es la tasa de variación de f sobre la trayectoria recta por P de vector director $\mathbf{u}$.

Derivadas direccionales

A continuación se tratará una de las aplicaciones más importantes de la regla de la cadena para trayectorias. Considere una recta que pasa por $P = (a, b)$ y que tiene vector director unitario $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$ (vea la f gura 5):

$$\mathbf{c}(t) = (a + th, b + tk)$$

La derivada de $f(\mathbf{c}(t))$ en $t = 0$ se denomina la **derivada direccional de *f* respecto a u en *P*** y se denota como $D_{\mathbf{u}}f(P)$ o $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t}$$

Las derivada direccionales de funciones de tres o más variables se def nen de manera similar.

DEFINICIÓN Derivada direccional La derivada direccional en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$ es el límite (suponiendo que exista):

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t}$$

Observe que las derivadas parciales son las derivadas direccionales respecto a los vectores unitarios estándar $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{i}}f(a, b) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a + t(1), b + t(0)) - f(a, b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} \\ &= f_x(a, b) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene:

$$f_x(a, b) = D_{\mathbf{i}}f(a, b) \qquad f_y(a, b) = D_{\mathbf{j}}f(a, b)$$

UN APUNTE CONCEPTUAL La derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(P)$ es la tasa de variación de f por *cambio unitario* en la dirección horizontal de $\mathbf{u}$ en P (f gura 6). Se trata de la pendiente de la recta tangente en Q a la curva de la traza que se obtiene cuando se interseca la gráf ca con el plano vertical que pasa por P en la dirección $\mathbf{u}$.

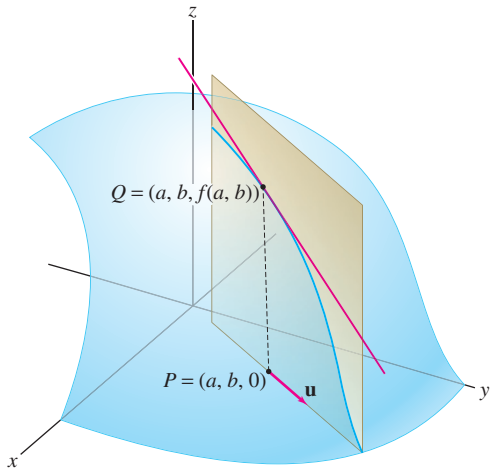


FIGURA 6 $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva de la traza que pasa por Q en el plano vertical por P en la dirección $\mathbf{u}$.

Para evaluar las derivadas direccionales, conviene definir $D_{\mathbf{v}}f(a,b)$ también en la situación en la que $\mathbf{v} = \langle h, k\rangle$ no sea vector unitario:

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th, b+tk) - f(a,b)}{t}$$

Se dice que $D_{\mathbf{v}}f$ es la **derivada respecto a v**.

Si se introduce $\mathbf{c}(t) = (a+th, b+tk)$, entonces $D_{\mathbf{v}}f(a,b)$ es la derivada en $t=0$ de la función compuesta $f(\mathbf{c}(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (a+th, b+tk)$ y se puede evaluar utilizando la regla de la cadena para trayectorias. Se tiene que $\mathbf{c}'(t) = \langle h, k\rangle = \mathbf{v}$, por lo que:

$$D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \nabla f_{(a,b)} \cdot \mathbf{c}'(0) = \nabla f_{(a,b)} \cdot \mathbf{v}$$

De esta manera, se obtiene la fórmula fundamental:

$$\boxed{D_{\mathbf{v}}f(a,b) = \nabla f_{(a,b)} \cdot \mathbf{v}} \qquad \boxed{2}$$

Análogamente, en tres variables, $D_{\mathbf{v}}f(a,b,c) = \nabla f_{(a,b,c)} \cdot \mathbf{v}$.

Para cualquier escalar λ, $D_{\lambda\mathbf{v}}f(P) = \nabla f_P \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda \nabla f_P \cdot \mathbf{v}$. Por tanto:

$$\boxed{D_{\lambda\mathbf{v}}f(P) = \lambda D_{\mathbf{v}}f(P)} \qquad \boxed{3}$$

Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$. Aplicando la ec. (3) con $\lambda = 1/\|\mathbf{u}\|$ se obtiene una fórmula para la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(P)$ en términos de $D_{\mathbf{v}}f(P)$.

TEOREMA 3 Cálculo de la derivada direccional Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ y la derivada direccional viene dada por

$$\boxed{D_{\mathbf{u}}f(P) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\nabla f_P \cdot \mathbf{v}} \qquad \boxed{4}$$

EJEMPLO 6 Sea $f(x,y) = xe^y$, $P = (2,-1)$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$.

(a) Calcule $D_{\mathbf{v}}f(P)$.

(b) A continuación, calcule la derivada direccional en la dirección de $\mathbf{v}$.

Solución (a) Primero calcule el gradiente en $P = (2,-1)$:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle = \langle e^y, xe^y\rangle \quad \Rightarrow \quad \nabla f_P = \nabla f_{(2,-1)} = \left\langle e^{-1}, 2e^{-1}\right\rangle$$

Ahora, aplique la ec. (2):

$$D_{\mathbf{v}}f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{v} = \left\langle e^{-1}, 2e^{-1}\right\rangle \cdot \langle 2, 3\rangle = 8e^{-1} \approx 2{,}94$$

(b) La derivada direccional es $D_{\mathbf{u}}f(P)$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Según la ec. (4):

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}D_{\mathbf{v}}f(P) = \frac{8e^{-1}}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{8e^{-1}}{\sqrt{13}} \approx 0{,}82$$

■

EJEMPLO 7 Halle la tasa de variación de la temperatura en el punto $Q = (1,2,1)$ y para la dirección $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 1\rangle$, suponiendo que la presión (en milibares) viene dada por:

$$f(x,y,z) = 1000 + 0{,}01(yz^2 + x^2z - xy^2) \qquad (x, y, z \text{ en kilómetros})$$

Solución En primer lugar, calcule el gradiente en $Q = (1, 2, 1)$:

$$\nabla f = 0{,}01\left\langle 2xz - y^2, z^2 - 2xy, 2yz + x^2 \right\rangle$$
$$\nabla f_Q = \nabla f_{(1,2,1)} = \langle -0{,}02, -0{,}03, 0{,}05 \rangle$$

A continuación, use la ec. (2) para calcular la derivada respecto a $\mathbf{v}$:

$$D_{\mathbf{v}} f(Q) = \nabla f_Q \cdot \mathbf{v} = \langle -0{,}02, -0{,}03, 0{,}05 \rangle \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle = 0{,}01(-3 + 5) = 0{,}02$$

La tasa de variación por kilómetro es la derivada direccional. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, la ec. (4) da lugar a:

$$D_{\mathbf{u}} f(Q) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} D_{\mathbf{v}} f(Q) = \frac{0{,}02}{\sqrt{2}} \approx 0{,}014 \text{ mb/km}$$

■

Propiedades del gradiente

Ahora estamos en condiciones de deducir algunas conclusiones interesantes y también importantes sobre el gradiente. En primer lugar, suponga que $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$ y sea $\mathbf{u}$ un vetor unitario (f gura 7). Según las propiedades del producto escalar:

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f_P\| \cos\theta \qquad \boxed{5}$$

donde θ es el ángulo entre ∇f_P y $\mathbf{u}$. Dicho de otro modo, *la tasa de variación en una dirección dada varía con el coseno del ángulo θ entre el gradiente y la dirección.*

Como el coseno alcanza valores entre -1 y 1, se tiene que:

$$-\|\nabla f_P\| \leq D_{\mathbf{u}} f(P) \leq \|\nabla f_P\|$$

Por ser $\cos 0 = 1$, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(P)$ se da en $\theta = 0$, es decir cuando $\mathbf{u}$ apunta en la dirección de ∇f_P. Dicho de otro modo, el *vector gradiente apunta en la dirección y sentido de la máxima tasa de incremento, y esta tasa máxima es* $\|\nabla f_P\|$. Análogamente, f decrece más rápidamente en el sentido opuesto, $-\nabla f_P$, pues $\cos\theta = -1$ para $\theta = \pi$. La tasa de máximo decrecimiento es $-\|\nabla f_P\|$. La derivada direccional es cero en las direcciones ortogonales al gradiente, pues $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

En el escenario previo en que la ciclista Chloe decribía una trayectoria (f gura 8), la temperatura T cambia según una razón que depende del coseno del ángulo θ entre ∇T y la dirección de movimiento.

RECORDATORIO *Para dos vectores cualesquiera* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*:*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| \cos\theta$$

donde θ *es el ángulo entre* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{u}$*. Si* $\mathbf{u}$ *es un vector unitario, entonces:*

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

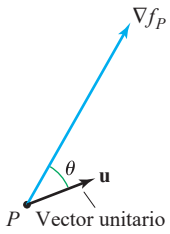


FIGURA 7 $D_{\mathbf{u}} f(P) = \|\nabla f_P\| \cos\theta$.

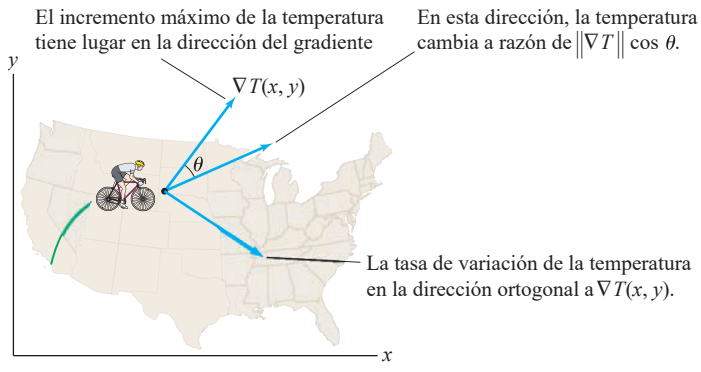


FIGURA 8

RECORDATORIO

- *A los términos "normal" y "ortogonal" puede adjudicárseles el significado de "perpendicular".*
- *Se dice que un vector es normal a una curva en un punto P si es normal a la recta tangente a la curva en P.*

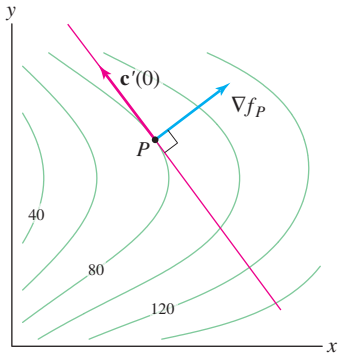


FIGURA 9 Mapa de contorno de $f(x,y)$. El gradiente en P es ortogonal a la curva de nivel que pasa por P.

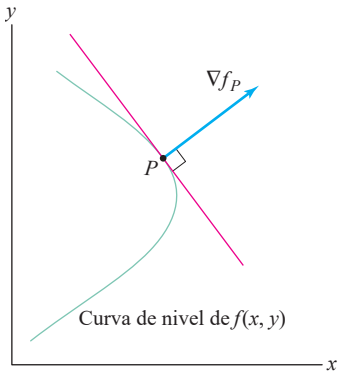


FIGURA 10 El vector gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento.

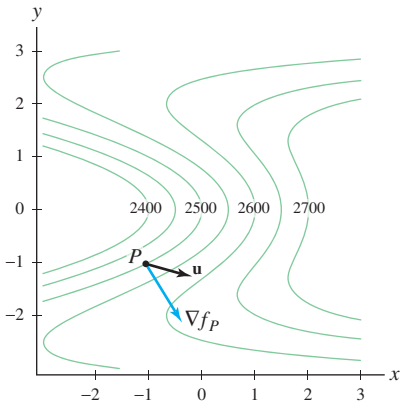


FIGURA 11 Mapa de contorno de la función $f(x,y)$ del ejemplo 9.

Otra propiedad importante es que los vectores gradiente son normales a las curvas de nivel (f gura 9). Para demostrar esto, suponga que P se encuentra sobre una curva de nivel $f(x,y) = k$. Parametrice esta curva de nivel mediante $\mathbf{c}(t)$ tal que $\mathbf{c}(0) = P$ y $\mathbf{c}'(0) \neq \mathbf{0}$ (esto es posible siempre que $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$). Entonces $f(\mathbf{c}(t)) = k$ para todo t y, por la regla de la cadena:

$$\nabla f_P \cdot \mathbf{c}'(0) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} k = 0$$

Así se demuestra que ∇f_P es ortogonal a $\mathbf{c}'(0)$ y como $\mathbf{c}'(0)$ es tangente a la curva de nivel, se deduce que ∇f_P es normal a la curva de nivel (f gura 9). Para funciones de tres variables, un argumento similar demuestra que ∇f_P es normal a la superf cie de nivel $f(x,y,z) = k$ que pasa por P.

TEOREMA 4 Interpretación del gradiente Suponga que $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario formando un ángulo θ con ∇f_P. Entonces:

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \|\nabla f_P\| \cos\theta \qquad \boxed{6}$$

- ∇f_P apunta en la dirección y sentido de la tasa máxima de crecimiento de f en P.
- $-\nabla f_P$ apunta en la dirección y sentido de la tasa máxima de decrecimiento en P.
- ∇f_P es normal a la curva de nivel (o superf cie) de f en P.

UN APUNTE GRÁFICO En cada punto P, existe una única dirección en la que $f(x,y)$ aumenta más rápidamente (por unidad de distancia). El teorema 4 dice que esta dirección es perpendicular a las curvas de nivel y que queda especif cada por el vector gradiente (f gura 10). Sin embargo, para la mayor parte de las funciones, la dirección de la tasa máxima de crecimiento varía de punto a punto.

EJEMPLO 8 Sea $f(x,y) = x^4y^{-2}$ y $P = (2,1)$. Halle el vector unitario que apunta en la dirección y sentido de la máxima tasa de crecimiento en P.

Solución El gradiente apunta en la dirección y sentido de la tasa máxima de crecimiento, por lo que se evalúa el gradiente en P:

$$\nabla f = \left\langle 4x^3y^{-2}, -2x^4y^{-3} \right\rangle \qquad \nabla f_{(2,1)} = \langle 32, -32 \rangle$$

El vector unitario en esta dirección es:

$$\mathbf{u} = \frac{\langle 32,-32\rangle}{\|\langle 32,-32\rangle\|} = \frac{\langle 32,-32\rangle}{32\sqrt{2}} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

EJEMPLO 9 La altitud de una montaña en (x,y) es:

$$f(x,y) = 2500 + 100(x + y^2)e^{-0,3y^2}$$

donde x e y vienen dadas en unidades de 100 m.

(a) Halle la derivada direccional de f en $P = (-1,-1)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ que forma un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ con el gradiente (f gura 11).

(b) ¿Cuál es la interpretación de esta derivada?

Solución En primer lugar, calcule $\|\nabla f_P\|$:

$$f_x(x,y) = 100e^{-0,3y^2} \qquad f_y(x,y) = 100y(2 - 0,6x - 0,6y^2)e^{-0,3y^2}$$
$$f_x(-1,-1) = 100e^{-0,3} \approx 74 \qquad f_y(-1,-1) = -200e^{-0,3} \approx -148$$

Por tanto, $\nabla f_P \approx \langle 74, -148 \rangle$ y:

$$\|\nabla f_P\| \approx \sqrt{74^2 + (-148)^2} \approx 165{,}5$$

Aplique la ec. (6) con $\theta = \pi/4$:

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \|\nabla f_P\| \cos\theta \approx 165{,}5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 117$$

Recuerde que x e y vienen medidas en unidades de 100 metros. Por tanto, la interpretación es la siguiente: si se sitúa en la montaña, en el punto dado por $(-1, -1)$, y empieza su ascensión de manera que su desplazamiento horizontal es en la dirección de $\mathbf{u}$, entonces su altitud aumenta a razón de 117 metros por cada 100 metros de desplazamiento horizontal, o de 1,17 metros por cada metro de desplazamiento horizontal.

El símbolo ψ (que se pronuncia "p-sig" o "p-si") es la letra griega minúscula psi.

UN APUNTE CONCEPTUAL La derivada direccional está relacionada con el **ángulo de inclinación** ψ de la f gura 12. Piense en la gráf ca de $z = f(x, y)$ como en una montaña que se encuentra sobre el plano xy. Sea Q un punto sobre la montaña que se encuentra por encima del punto $P = (a, b)$ del plano xy. Si sube la montaña de manera que su desplazamiento horizontal es en la dirección de $\mathbf{u}$, entonces su ascensión tendrá lugar con un ángulo de inclinación ψ def nido por:

$$\tan\psi = D_{\mathbf{u}} f(P) \qquad \boxed{7}$$

La dirección de ascensión más pronunciada es aquella en la que el desplazamiento horizontal es en la dirección de ∇f_P.

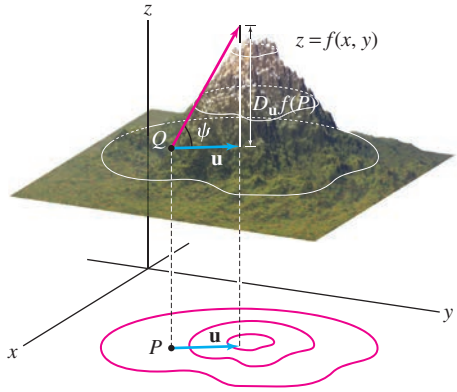


FIGURA 12

■ **EJEMPLO 10 Ángulo de inclinación** Se encuentra en la ladera de una montaña de la forma $z = f(x, y)$, en un punto $Q = (a, b, f(a, b))$, en el que $\nabla f_{(a,b)} = \langle 0{,}4, 0{,}02 \rangle$. Halle el ángulo de inclinación de una dirección que forma un ángulo de $\theta = \frac{\pi}{3}$ con el gradiente.

Solución La longitud del gradiente es $\|\nabla f_{(a,b)}\| = \sqrt{(0{,}4)^2 + (0{,}02)^2} \approx 0{,}4$. Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario que forma un ángulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ con $\nabla f_{(a,b)}$, entonces:

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \|\nabla f_{(a,b)}\| \cos\frac{\pi}{3} \approx (0{,}4)(0{,}5) = 0{,}2$$

El ángulo de inclinación en Q en la dirección de $\mathbf{u}$ cumple que $\tan\psi = 0{,}2$. De aquí se obtiene que $\psi \approx \tan^{-1} 0{,}2 \approx 0{,}197$ radianes o aproximadamente 11,3°. ■

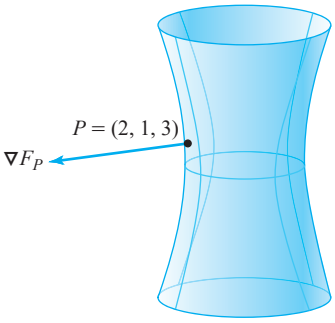


FIGURA 13 El vector gradiente ∇F_P es normal a la superf cie en P.

Otro uso del gradiente es para hallar vectores normales a una superf cie de ecuación $F(x,y,z) = k$, siendo k una constante. Sea $P = (a,b,c)$ y suponga que $\nabla F_P \neq \mathbf{0}$. Entonces ∇F_P es normal a la superf cie de nivel $F(x,y,z) = k$, según el teorema 4. La ecuación del plano tangente en P es:

$$\nabla F_P \cdot \langle x-a, y-b, z-c\rangle = 0$$

Expandiendo el producto escalar, se obtiene:

$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

EJEMPLO 11 Vector normal y plano tangente Halle una ecuación del plano tangente a la superf cie $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 16$ en $P = (2,1,3)$.

Solución Sea $F(x,y,z) = 4x^2 + 9y^2 - z^2$. Entonces:

$$\nabla F = \langle 8x, 18y, -2z\rangle \qquad \nabla F_P = \nabla F_{(2,1,3)} = \langle 16, 18, -6\rangle$$

El vector $\langle 16, 18, -6\rangle$ es normal a la superf cie $F(x,y,z) = 16$ (f gura 13), por lo que la ecuación del plano tangente en P es:

$$16(x-2) + 18(y-1) - 6(z-3) = 0 \quad \text{o} \quad 16x + 18y - 6z = 32$$

15.5 RESUMEN

- El *gradiente* de una función f es el vector de derivadas parciales:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad \text{o} \quad \nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

- *Regla de la cadena para trayectorias:*

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f_{\mathbf{c}(t)} \cdot \mathbf{c}'(t)$$

- *Derivada de f respecto a $\mathbf{v} = \langle h,k\rangle$:*

$$D_{\mathbf{v}} f(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th, b+tk) - f(a,b)}{t}$$

Esta def nición se extiende a tres o más variables.

- Fórmula para la derivada respecto a $\mathbf{v}$: $D_{\mathbf{v}} f(a,b) = \nabla f_{(a,b)} \cdot \mathbf{v}$.
- Dado un vector $\mathbf{u}$ unitario, $D_{\mathbf{u}} f$ se denomina *derivada direccional.*
  - Si $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|} D_{\mathbf{v}} f(a,b)$.
  - $D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \|\nabla f_{(a,b)}\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\nabla f_{(a,b)}$ y $\mathbf{u}$.
- Propiedades geométricas básicas del gradiente (suponga que $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$):
  - ∇f_P apunta en la dirección y sentido de la máxima tasa de crecimiento. La tasa máxima de crecimiento es $\|\nabla f_P\|$.
  - $-\nabla f_P$ apunta en la dirección y sentido de la máxima tasa de decrecimiento. La tasa máxima de decrecimiento es $-\|\nabla f_P\|$.
  - ∇f_P es ortogonal a la curva de nivel (o superf cie) que pasa por P.
- Ecuación para el plano tangente a la superf cie $F(x,y,z) = k$ en $P = (a,b,c)$:

$$\nabla F_P \cdot \langle x-a, y-b, z-c\rangle = 0$$
$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

15.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de los siguientes es un posible valor para el gradiente ∇f de una función $f(x,y)$ de dos variables?

(a) 5 **(b)** $\langle 3,4\rangle$ **(c)** $\langle 3,4,5\rangle$

2. ¿Verdadero o falso? Una función diferenciable aumenta a razón $\|\nabla f_P\|$ en la dirección de ∇f_P.

3. Describe las dos propiedades geométricas principales del gradiente ∇f.

4. Usted se encuentra en un punto en el que el vector gradiente de la temperatura apunta en la dirección noreste (NE). ¿En qué dirección(es) debería caminar para evitar un cambio en la temperatura?

(a) NE **(b)** NW **(c)** SE **(d)** SW

5. Suponga que $\nabla f(0,0) = \langle 2,4\rangle$. ¿Cuál es la tasa de variación de $f(x,y)$ en $(0,0)$ en la dirección que forma un ángulo de 45° con el eje x?

Problemas

1. Sea $f(x,y) = xy^2$ y $\mathbf{c}(t) = (\frac{1}{2}t^2, t^3)$.

(a) Calcule ∇f y $\mathbf{c}'(t)$.

(b) Use la regla de la cadena para trayectorias para evaluar $\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t))$ en $t = 1$ y $t = -1$.

2. Sea $f(x,y) = e^{xy}$ y $\mathbf{c}(t) = (t^3, 1+t)$.

(a) Calcule ∇f y $\mathbf{c}'(t)$.

(b) Use la regla de la cadena para trayectorias a f n de calcular $\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t))$.

(c) Exprese la composición $f(\mathbf{c}(t))$ como una función de t y derive. Compruebe que su resultado concuerda con el que ha obtenido en (b).

3. La f gura 14 muestra las curvas de nivel de una función $f(x,y)$ y una trayectoria $\mathbf{c}(t)$, que se ha recorrido en la dirección indicada. Establezca si la derivada $\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t))$ es positiva, negativa o cero en los puntos A-D.

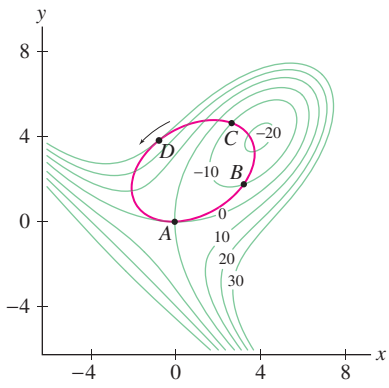


FIGURA 14

4. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

(a) Halle $\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t))$ sin realizar ningún cálculo. Razone su respuesta.

(b) Compruebe su respuesta a (a) usando la regla de la cadena.

En los problemas 5-8, calcule el gradiente.

5. $f(x,y) = \cos(x^2 + y)$

6. $g(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

7. $h(x,y,z) = xyz^{-3}$

8. $r(x,y,z,w) = xze^{yw}$

En los problemas 9-20, use la regla de la cadena para calcular $\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t))$.

9. $f(x,y) = 3x - 7y$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t = 0$

10. $f(x,y) = 3x - 7y$, $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3)$, $t = 2$

11. $f(x,y) = x^2 - 3xy$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t = 0$

12. $f(x,y) = x^2 - 3xy$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t = \frac{\pi}{2}$

13. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $\mathbf{c}(t) = (e^{2t}, e^{3t})$, $t = 0$

14. $f(x,y) = \cos(y - x)$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{2t})$, $t = \ln 3$

15. $f(x,y) = x - xy$, $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^2 - 4t)$, $t = 4$

16. $f(x,y) = xe^y$, $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^2 - 4t)$, $t = 0$

17. $f(x,y) = \ln x + \ln y$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, t^2)$, $t = \frac{\pi}{4}$

18. $g(x,y,z) = xye^z$, $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3, t-1)$, $t = 1$

19. $g(x,y,z) = xyz^{-1}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, t, t^2)$, $t = 1$

20. $g(x,y,z,w) = x + 2y + 3z + 5w$, $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3, t, t-2)$, $t = 1$

En los problemas 21-30, calcule la derivada direccional en la dirección de $\mathbf{v}$ *en el punto que se indica. Recuerde que debe normalizar el vector director o bien utilizar la ec. (4).*

21. $f(x,y) = x^2 + y^3$, $\mathbf{v} = \langle 4,3\rangle$, $P = (1,2)$

22. $f(x,y) = x^2y^3$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $P = (-2,1)$

23. $f(x,y) = x^2y^3$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $P = (\frac{1}{6}, 3)$

24. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x - y)$, $\mathbf{v} = \langle 1,1\rangle$, $P = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$

25. $f(x,y) = \tan^{-1}(xy)$, $\mathbf{v} = \langle 1,1\rangle$, $P = (3,4)$

26. $f(x,y) = e^{xy-y^2}$, $\mathbf{v} = \langle 12,-5\rangle$, $P = (2,2)$

27. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $P = (1,0)$

28. $g(x,y,z) = z^2 - xy^2$, $\mathbf{v} = \langle -1,2,2\rangle$, $P = (2,1,3)$

29. $g(x,y,z) = xe^{-yz}$, $\mathbf{v} = \langle 1,1,1\rangle$, $P = (1,2,0)$

30. $g(x,y,z) = x\ln(y+z)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $P = (2,e,e)$

31. Halle la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ en $P = (3,2)$ en la dirección que apunta al origen.

32. Halle la derivada direccional de $f(x,y,z) = xy + z^3$ en $P = (3,-2,-1)$ en la dirección que apunta al origen.

33. Un insecto que se encuentra en $(3,9,4)$ empieza a caminar en línea recta hacia el $(5,7,3)$. La temperatura del insecto viene dada por $T(x,y,z) = xe^{y-z}$ ¿Cuál es la tasa de variación de la temperatura? Las unidades son metros y grados Celsius.

34. La temperatura en la posición (x,y) es $T(x,y) = 20 + 0{,}1(x^2 - xy)$ (grados Celsius). Empezando en $(200,0)$ en el instante $t = 0$ (segundos), un insecto se desplaza por una circunferencia de radio 200 cm centrada en el origen y a velocidad de 3 cm/s. ¿Con qué rapidez está cambiando la temperatura en $t = \pi/3$?

35. Suponga que $\nabla f_P = \langle 2,-4,4\rangle$. ¿Es f creciente o decreciente en P para la dirección dada por $\mathbf{v} = \langle 2,1,3\rangle$?

36. Sea $f(x,y) = xe^{x^2-y}$ y $P = (1,1)$.

(a) Calcule $\|\nabla f_P\|$.

(b) Halle la tasa de cambio de f en la dirección de ∇f_P.

(c) Halle la tasa de cambio de f en la dirección de un vector que forma un ángulo de 45° con ∇f_P.

37. Sea $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy+z)$ y $P = (0,-1,\pi)$. Calcule $D_{\mathbf{u}} f(P)$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario que forma un ángulo de $\theta = 30°$ con ∇f_P.

38. Sea $T(x,y)$ la temperatura en la posición (x,y). Suponga que $\nabla T = \langle y-4, x+2y\rangle$. Sea $\mathbf{c}(t) = (t^2,t)$ una trayectoria en el plano. Halle los valores de t tales que:

$$\frac{d}{dt}T(\mathbf{c}(t)) = 0$$

39. Halle un vector normal a la superf cie $x^2 + y^2 - z^2 = 6$ en $P = (3,1,2)$.

40. Halle un vector normal a la superf cie $3z^3 + x^2y - y^2x = 1$ en $P = (1,-1,1)$.

41. Halle los dos puntos sobre el elipsoide:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$$

en los que el plano tangente es normal a $\mathbf{v} = \langle 1,1,-2\rangle$.

En los problemas 42-45, halle una ecuación del plano tangente a la superf cie en el punto que se indica.

42. $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 20, \quad P = (2,2,1)$

43. $xz + 2x^2y + y^2z^3 = 11, \quad P = (2,1,1)$

44. $x^2 + z^2e^{y-x} = 13, \quad P = \left(2,3,\dfrac{3}{\sqrt{e}}\right)$

45. $\ln[1 + 4x^2 + 9y^4] - 0{,}1z^2 = 0, \quad P = (3,1,6{,}1876)$

46. Compruebe lo que se observa en la f gura 15: todo plano tangente al cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ pasa por el origen.

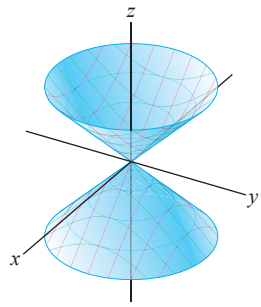


FIGURA 15 Gráf ca de $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

47. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para obtener un gráf co de contorno de $f(x,y) = x^2 - 3xy + y - y^2$ junto con su campo vectorial gradiente en el dominio $[-4,4] \times [-4,4]$.

48. Halle una función $f(x,y,z)$ tal que ∇f sea el vector constante $\langle 1,3,1\rangle$.

49. Halle una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = \langle 2x,1,2\rangle$.

50. Halle una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = \langle x,y^2,z^3\rangle$.

51. Halle una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = \langle z,2y,x\rangle$.

52. Halle una función $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \langle y,x\rangle$.

53. Pruebe que no existe una función $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \langle y^2,x\rangle$. *Indicación:* use el teorema de Clairaut $f_{xy} = f_{yx}$.

54. Sea $\Delta f = f(a+h,b+k) - f(a,b)$ la variación de f en $P = (a,b)$. Introduzca $\Delta\mathbf{v} = \langle h,k\rangle$. Pruebe que la aproximación lineal se puede escribir como:

$$\Delta f \approx \nabla f_P \cdot \Delta\mathbf{v} \qquad \boxed{8}$$

55. Use la ec. (8) para estimar:

$$\Delta f = f(3{,}53,8{,}98) - f(3{,}5,9)$$

suponiendo que $\nabla f_{(3,5,9)} = \langle 2,-1\rangle$.

56. Halle un vector unitario $\mathbf{n}$ tal que sea normal a la superf cie $z^2 - 2x^4 - y^4 = 16$ en $P = (2,2,8)$ y que apunte en la dirección del plano xy (dicho de otro modo, si se desplaza en la dirección de $\mathbf{n}$, llegará un momento en que atravesará el plano xy).

57. Suponga, en el problema anterior, que una partícula situada en el punto $P = (2,2,8)$ viaja hacia el plano xy en la dirección normal a la superf cie.

(a) ¿Por qué punto Q del plano xy pasará la partícula?

(b) Suponga que los ejes están calibrados en centímetros. Determine la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de la partícula si viaja a velocidad constante de 8 cm/s. ¿Cuánto tardará la partícula en llegar a Q?

58. Sea $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$ y $\mathbf{u} = \left\langle \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$.

(a) Calcule el gradiente de f.

(b) Calcule $D_{\mathbf{u}} f(1,1)$ y $D_{\mathbf{u}} f(\sqrt{3},1)$.

(c) Pruebe que las rectas $y = mx$ para $m \neq 0$ son curvas de nivel para f.

(d) Compruebe que ∇f_P es ortogonal a la curva de nivel que pasa por P para $P = (x, y) \neq (0, 0)$.

59. Suponga que la intersección de dos superf cies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ es una curva $\mathcal{C}$ y sea P un punto de $\mathcal{C}$. Explique por qué el vector $\mathbf{v} = \nabla F_P \times \nabla G_P$ es un vector director para la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P.

60. Sea $\mathcal{C}$ la curva intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ y $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$. Use el resultado del problema 59 para hallar ecuaciones paramétricas para la recta tangente a $\mathcal{C}$ en $P = (1, 1, 1)$.

61. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene al intersecar las superf cies $x^3 + 2xy + yz = 7$ y $3x^2 - yz = 1$. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en $P = (1, 2, 1)$.

62. Compruebe las relaciones de linealidad para los gradientes:

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

(b) $\nabla(cf) = c\nabla f$

63. Demuestre la regla de la cadena para gradientes (teorema 1).

64. Demuestre la regla del producto para gradientes (teorema 1).

Problemas avanzados

65. Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario. Pruebe que la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f$ es igual a la componente de ∇f sobre $\mathbf{u}$.

66. Sea $f(x, y) = (xy)^{1/3}$.

(a) Use la def nición por límites para probar que $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

(b) Use la def nición por límites para probar que la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(0, 0)$ no existe para cualquier vector unitario $\mathbf{u}$ diferente de $\mathbf{i}$ y de $\mathbf{j}$.

(c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

67. Use la def nición de diferenciabilidad para demostrar que si $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$ y

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \qquad \boxed{9}$$

68. Este problema muestra que existe una función que no es diferenciable en $(0, 0)$ incluso cuando todas las derivadas en $(0, 0)$ existen. Sea $f(x, y) = x^2y/(x^2 + y^2)$ para $(x, y) \neq 0$ y $f(0, 0) = 0$.

(a) Use la def nición por límites para probar que $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ existe para cualquier vector $\mathbf{v}$. Pruebe que $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

(b) Demuestre que f *no* es diferenciable en $(0, 0)$ probando que la ec. (9) no se cumple.

69. Demuestre que si $f(x, y)$ es diferenciable y $\nabla f_{(x,y)} = \mathbf{0}$ para todo (x, y), entonces f es constante.

70. Demuestre la siguiente regla del cociente, donde f y g son diferenciables:

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

En los problemas 71-73, una trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ *sigue el gradiente de una función* $f(x, y)$ *si el vector tangente* $\mathbf{c}'(t)$ *apunta en la dirección de* ∇f *para todo* t. *Dicho de otro modo,* $\mathbf{c}'(t) = k(t)\nabla f_{\mathbf{c}(t)}$ *para alguna función positiva* $k(t)$. *Observe que, en este caso,* $\mathbf{c}(t)$ *cruza cada curva de nivel de* $f(x, y)$ *en un ángulo recto.*

71. Pruebe que si la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ sigue el gradiente de $f(x, y)$, entonces:

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f_y}{f_x}$$

72. Halle una trayectoria de la forma $\mathbf{c}(t) = (t, g(t))$ que pase por $(1, 2)$ y que siga el gradiente de $f(x, y) = 2x^2 + 8y^2$ (f gura 16). *Indicación:* use separación de variables.

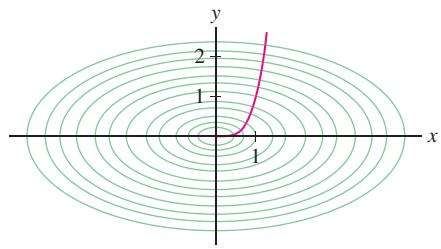


FIGURA 16 La trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es ortogonal a las curvas de nivel de $f(x, y) = 2x^2 + 8y^2$.

73. SAC Halle la curva $y = g(x)$ que pasa por $(0, 1)$ y cruza cada curva de nivel de $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$ en un ángulo recto. Si dispone de un programa informático de cálculo simbólico, represente $y = g(x)$ junto con las curvas de nivel de f.

15.6 La regla de la cadena

La regla de la cadena que se obtuvo en la sección anterior, se puede extender para funciones compuestas genéricas. Suponga, por ejemplo, que x, y, z son funciones diferenciables de s y t, es decir $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ y $z = z(s, t)$. La composición:

$$f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \qquad \boxed{1}$$

resulta ser una función de s y de t. Nos referiremos a s y a t como a las **variables independientes**.

■ **EJEMPLO 1** Halle la función compuesta para $f(x,y,z) = xy + z$ y $x = s^2$, $y = st$, $z = t^2$.

Solución La función compuesta es:

$$f(x(s,t),y(s,t),z(s,t)) = xy + z = (s^2)(st) + t^2 = s^3t + t^2$$ ■

La regla de la cadena expresa las derivadas de f respecto a las variables independientes. Por ejemplo, las derivadas parciales de $f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \quad \boxed{3}$$

Para demostrar estas fórmulas, observe que $\partial f/\partial s$, cuando se evalúa en un punto (s_0, t_0), es igual a la derivada respecto a la trayectoria:

$$\mathbf{c}(s) = (x(s,t_0),y(s,t_0),z(s,t_0))$$

Dicho de otro modo, se f ja $t = t_0$ y se considera la derivada respecto a s:

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s_0,t_0) = \frac{d}{ds}f(\mathbf{c}(s))\bigg|_{s=s_0}$$

El vector tangente es:

$$\mathbf{c}'(s) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial s}(s,t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s,t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s,t_0) \right\rangle$$

Por tanto, según la regla de la cadena para trayectorias:

$$\frac{\partial f}{\partial s}\bigg|_{(s_0,t_0)} = \frac{d}{ds}f(\mathbf{c}(s))\bigg|_{s=s_0} = \nabla f \cdot \mathbf{c}'(s_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Las derivadas a la derecha se evalúan en (s_0, t_0). Así se ha demostrado la ec. (2). Un razonamiento similar demuestra la ec. (3), y también el caso general de una función $f(x_1, \ldots, x_n)$, en la que las variables x_i dependen de las variables independientes $t_1, \ldots, t_m$.

TEOREMA 1 Versión general de la regla de la cadena Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ una función diferenciable de n variables. Suponga que cada una de las variables $x_1, \ldots, x_n$ es una función diferenciable de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Entonces, para $k = 1, \ldots, m$, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k} \quad \boxed{4}$$

Como ayuda para recordar la regla de la cadena, nos referiremos a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

como a las **derivadas primarias**. Son las componentes del gradiente ∇f. Según la ec. (4), la derivada de f respecto a la variable independiente t_k es igual a una suma de n términos:

término j-ésimo: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial t_k}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

El término "derivada primaria" no es estándar. Se usa en esta sección únicamente para clarificar la estructura de la regla de la cadena.

Observe que la ec. (4) se puede expresar como un producto escalar:

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial x_1}{\partial t_k}, \frac{\partial x_2}{\partial t_k}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \right\rangle \qquad \boxed{5}$$

EJEMPLO 2 Utilización de la regla de la cadena Sea $f(x, y, z) = xy + z$. Calcule $\partial f/\partial s$, donde:

$$x = s^2, \quad y = st, \quad z = t^2$$

Solución

Etapa 1. **Calcule las derivadas primarias**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1$$

Etapa 2. **Aplique la regla de la cadena**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} &= y\frac{\partial}{\partial s}(s^2) + x\frac{\partial}{\partial s}(st) + \frac{\partial}{\partial s}(t^2) = \\ &= (y)(2s) + (x)(t) + 0 = \\ &= 2sy + xt\end{aligned}$$

Esto expresa la derivada en términos de ambos conjuntos de variables. Si se desea, se puede sustituir $x = s^2$ e $y = st$ para expresar la derivada en términos de s y de t:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2ys + xt = 2(st)s + (s^2)t = 3s^2t$$

Para comprobar este resultado, recuerde que en el ejemplo 1, se calculó la función compuesta:

$$f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = f(s^2, st, t^2) = s^3t + t^2$$

De aquí se tiene directamente que $\partial f/\partial s = 3s^2t$, lo que confirma el resultado obtenido anteriormente. ■

EJEMPLO 3 Evaluación de la derivada Sea $f(x, y) = e^{xy}$. Evalúe $\partial f/\partial t$ en $(s, t, u) = (2, 3, -1)$, donde $x = st$, $y = s - ut^2$.

Solución Se puede utilizar o bien la ec. (4), o la ec. (5). Se usará la expresión según el producto escalar de la ec. (5). Se tiene:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle ye^{xy}, xe^{xy} \rangle \qquad \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right\rangle = \langle s, -2ut \rangle$$

y, según la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla f \cdot \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right\rangle = \langle ye^{xy}, xe^{xy} \rangle \cdot \langle s, -2ut \rangle &= \\ = ye^{xy}(s) + xe^{xy}(-2ut) &= \\ = (ys - 2xut)e^{xy}\end{aligned}$$

Para acabar el problema, no se tiene que reescribir $\partial f/\partial t$ en términos de s, t, u. Para $(s, t, u) = (2, 3, -1)$, se tiene que:

$$x = st = 2(3) = 6, \qquad y = s - ut^2 = 2 - (-1)(3^2) = 11$$

Para $(s, t, u) = (2, 3, -1)$ y $(x, y) = (6, 11)$, se tiene que:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(2,3,-1)} = \left.(ys - 2xut)e^{xy}\right|_{(2,3,-1)} = \Big((11)(2) - 2(6)(-1)(3)\Big)e^{6(11)} = 58e^{66}$$ ■

EJEMPLO 4 Coordenadas polares Sea $f(x,y)$ una función de dos variables y sean (r,θ) coordenadas polares.

(a) Exprese $\partial f/\partial\theta$ en términos de $\partial f/\partial x$ y de $\partial f/\partial y$.

(b) Evalúe $\partial f/\partial\theta$ en $(x,y)=(1,1)$ para $f(x,y)=x^2y$.

Solución

(a) Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$:

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta$$

Según la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

Si ha estudiado mecánica cuántica, quizás reconozca que la parte derecha de la ec. (6) es el operador ***momento angular*** *(respecto al eje z).*

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, se puede escribir $\partial f/\partial\theta$ únicamente en términos de x y de y:

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} \qquad 6$$

(b) Aplique la ec. (6) a $f(x,y)=x^2y$:

$$\frac{\partial f}{\partial\theta} = x\frac{\partial}{\partial y}(x^2y) - y\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = x^3 - 2xy^2$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\theta}\right|_{(x,y)=(1,1)} = 1^3 - 2(1)(1^2) = -1$$

■

Diferenciación implícita

En el cálculo para una variable, se ha utilizado la derivación implícita para calcular dy/dx cuando y se encuentra def nida implícitamente como función de x a través de una ecuación de la forma $f(x,y)=0$. Este método también funciona para funciones de varias variables. Suponga que z está def nida implícitamente por una ecuación de la forma:

$$F(x,y,z)=0$$

Por tanto, $z = z(x,y)$ es una función de x y de y. Es posible que no podamos obtener explícitamente $z(x,y)$, pero se puede tratar $F(x,y,z)$ como una función compuesta en que x e y sean las variables independientes y utilizar la regla de la cadena para derivar respecto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se tiene que $\partial x/\partial x = 1$ y que $\partial y/\partial x = 0$ pues y no depende de x. Así:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = F_x + F_z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $F_z \neq 0$, se puede aislar $\partial z/\partial x$ (se calcula $\partial z/\partial y$ análogamente):

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}} \qquad 7$$

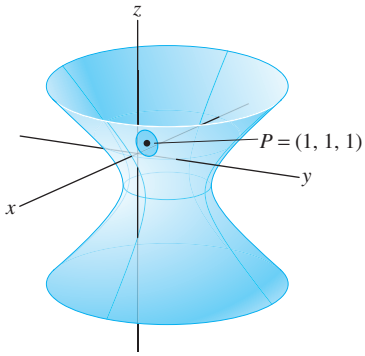


FIGURA 1 Dada la superf cie $x^2 + y^2 - 2z^2 + 12x - 8z - 4 = 0$, una pequeña porción de ella alrededor de P se puede representar como la gráf ca de una función de x e y.

EJEMPLO 5 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en $P = (1, 1, 1)$, donde:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 12x - 8z - 4 = 0$$

¿Cuál es la interpretación gráf ca de estas derivadas parciales?

Solución Se tiene que:

$$F_x = 2x + 12 \qquad F_y = 2y \qquad F_z = -4z - 8$$

y, por tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2x + 12}{4z + 8} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y}{4z + 8}$$

Las derivadas en $P = (1, 1, 1)$ son:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = \frac{2(1) + 12}{4(1) + 8} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = \frac{2(1)}{4(1) + 8} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

La f gura 1 muestra la superf cie $F(x, y, z) = 0$. La superf cie en su totalidad no es la gráf ca de una función pues no cumple el criterio de la recta vertical. Sin embargo, una pequeña porción cerca de P se puede representar como la gráf ca de una función $z = f(x, y)$ y las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son iguales a f_x y f_y. Mediante la diferenciación implícita ha sido posible calcular estas derivadas parciales sin hallar $f(x, y)$ explícitamente. ■

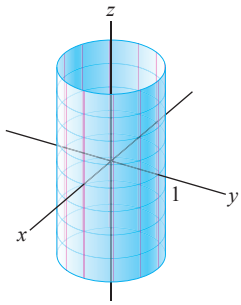


FIGURA 2 Gráf ca del cilindro $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Las hipótesis son importantes La diferenciación implícita está basada en la hipótesis que se puede resolver la ecuación $F(x, y, z) = 0$ para z en la forma $z = f(x, y)$. En caso contrario, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ no tendrían sentido. El teorema de la función implícita, de cálculo avanzado, garantiza que esto se puede hacer (como mínimo cerca de un punto P) si las derivadas parciales de F son continuas y $F_z(P) \neq 0$. ¿Por qué es necesaria esta condición? Recuerde que el vector gradiente $\nabla F_P = \langle F_x(P), F_y(P), F_z(P) \rangle$ es normal a la superf cie en P, por lo que $F_z(P) = 0$ quiere decir que el plano tangente en P es vertical. Para entender lo que puede fallar, considere el cilindro (que se muestra en la f gura 2):

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

En este caso extremo, $F_z = 0$. La coordenada z en el cilindro no depende de x ni de y, por lo que es imposible representar el cilindro como una gráf ca de la forma $z = f(x, y)$ y las derivadas $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ no existen.

15.6 RESUMEN

- Si $f(x, y, z)$ es una función de x, y, z y x, y, z dependen de otras dos variables, s y t, entonces:

$$f(x, y, z) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

es una función compuesta de s y de t. Se dice que s y t son las *variables independientes*.

- La *regla de la cadena* expresa las derivadas respecto a las variables independientes s y t en términos de las *derivadas primarias:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}$$

Concretamente,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

- En general, si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es una función de n variables y si $x_1, \ldots, x_n$ dependen de las variables independientes $t_1, \ldots, t_m$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}$$

- La regla de la cadena se puede expresar como un producto escalar:

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \underbrace{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle}_{\nabla f} \cdot \left\langle \frac{\partial x_1}{\partial t_k}, \frac{\partial x_2}{\partial t_k}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \right\rangle$$

- La diferenciación implícita se utiliza para hallar las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ cuando z está def nida implícitamente mediante una ecuación $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

15.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Sea $f(x, y) = xy$, donde $x = uv$ e $y = u + v$.

(a) ¿Cuáles son las derivadas primarias de f?

(b) ¿Cuáles son las variables independientes?

En los ejercicios 2 y 3, suponga que $f(u, v) = ue^v$, donde $u = rs$ y $v = r + s$.

2. La función compuesta $f(u, v)$ es igual a:

(a) rse^{r+s} **(b)** re^s **(c)** rse^{rs}

3. ¿Cuál es el valor de $f(u, v)$ en $(r, s) = (1, 1)$?

4. Según la regla de la cadena, $\partial f/\partial r$ es igual a (elija la respuesta correcta):

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x}$

5. Suponga que x, y, z son funciones de las variables u, v, w. ¿Cuál de los siguientes términos aparece en la expresión de la regla de la cadena para $\partial f/\partial w$?

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial v}$ **(b)** $\dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}$ **(c)** $\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial w}$

6. Con la notación del ejercicio anterior, ¿aparece $\partial x/\partial v$ en la expresión de la regla de la cadena para $\partial f/\partial u$?

Problemas

1. Sea $f(x, y, z) = x^2y^3 + z^4$ y $x = s^2, y = st^2$, y $z = s^2t$.

(a) Calcule las derivadas primarias de $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial s}, \dfrac{\partial y}{\partial s}, \dfrac{\partial z}{\partial s}$.

(c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Exprese la respuesta en términos de las variables independientes s, t.

2. Sea $f(x, y) = x\cos(y)$ y $x = u^2 + v^2$ e $y = u - v$.

(a) Calcule las derivadas primarias $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Use la regla de la cadena para calcular $\partial f/\partial v$. Deje la respuesta en términos de las variables dependientes y de las independientes.

(c) Determine (x, y) para $(u, v) = (2, 1)$ y evalúe $\partial f/\partial v$ en $(u, v) = = (2, 1)$.

En los problemas 3-10, use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales. Exprese la respuesta en términos de las variables independientes.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial r}$; $f(x, y, z) = xy + z^2$, $x = s^2$, $y = 2rs$, $z = r^2$

4. $\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial t}$; $f(x, y, z) = xy + z^2$, $x = r + s - 2t$, $y = 3rt$, $z = s^2$

5. $\dfrac{\partial g}{\partial u}, \dfrac{\partial g}{\partial v}$; $g(x, y) = \cos(x - y)$, $x = 3u - 5v$, $y = -7u + 15v$

6. $\dfrac{\partial R}{\partial u}, \dfrac{\partial R}{\partial v}$; $R(x, y) = (3x + 4y)^5$, $x = u^2$, $y = uv$

7. $\dfrac{\partial F}{\partial y}$; $F(u,v) = e^{u+v}$, $u = x^2$, $v = xy$

8. $\dfrac{\partial f}{\partial u}$; $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = e^{u+v}$, $y = u + v$

9. $\dfrac{\partial h}{\partial t_2}$; $h(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $x = t_1 t_2$, $y = t_1^2 t_2$

10. $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$; $f(x,y,z) = xy - z^2$, $x = r\cos\theta$, $y = \cos^2\theta$, $z = r$

En los problemas 11-16, use la regla de la cadena para evaluar la derivada parcial en el punto que se indica.

11. $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$ en $(u,v) = (-1,-1)$, donde $f(x,y,z) = x^3 + yz^2$, $x = u^2 + v$, $y = u + v^2$, $z = uv$.

12. $\partial f/\partial s$ en $(r,s) = (1,0)$, donde $f(x,y) = \ln(xy)$, $x = 3r + 2s$, $y = 5r + 3s$.

13. $\partial g/\partial\theta$ en $(r,\theta) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, donde $g(x,y) = 1/(x+y^2)$, $x = r\,\text{sen}\,\theta$, $y = r\cos\theta$.

14. $\partial g/\partial s$ en $s = 4$, donde $g(x,y) = x^2 - y^2$, $x = s^2 + 1$, $y = 1 - 2s$.

15. $\partial g/\partial u$ en $(u,v) = (0,1)$, donde $g(x,y) = x^2 - y^2$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u\,\text{sen}\,v$.

16. $\dfrac{\partial h}{\partial q}$ en $(q,r) = (3,2)$, donde $h(u,v) = ue^v$, $u = q^3$, $v = qr^2$.

17. Jessica y Matthew van corriendo hacia el punto P siguiendo trayectorias rectas que forman un ángulo θ (f gura 3). Suponga que Matthew corre a velocidad v_a m/s y Jessica lo hace a velocidad v_b m/s. Sea $f(x,y)$ la distancia desde Matthew a Jessica cuando Matthew y Jessica están a x e y metros de P, respectivamente.

(a) Pruebe que $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta}$.

(b) Suponga que $\theta = \pi/3$. Use la regla de la cadena para determinar la razón a la que la distancia entre Matthew y Jessica está cambiando cuando $x = 30$, $y = 20$, $v_a = 4$ m/s, y $v_b = 3$ m/s.

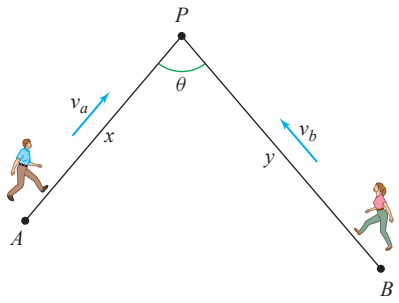


FIGURA 3

18. Según el teorema del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, donde a, b, c son los lados de un triángulo y θ es el ángulo opuesto al lado de longitud c.

(a) Calcule $\partial\theta/\partial a$, $\partial\theta/\partial b$, y $\partial\theta/\partial c$ usando derivación implícita.

(b) Suponga que $a = 10$, $b = 16$, $c = 22$. Estime el cambio en θ, si a y b aumentan en 1 y c lo hace en 2.

19. Sea $u = u(x,y)$ y (r,θ) coordenadas polares. Compruebe la relación:

$$\|\nabla u\|^2 = u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2 \qquad \boxed{8}$$

Indicación: exprese u_θ y u_r en la parte derecha de la igualdad en términos de de u_x y u_y.

20. Sea $u(r,\theta) = r^2\cos^2\theta$. Use la ec. (8) para calcular $\|\nabla u\|^2$. A continuación, calcule $\|\nabla u\|^2$ directamente observando que $u(x,y) = x^2$ y compare.

21. Sea $x = s + t$ y $y = s - t$. Pruebe que para cualquier función diferenciable $f(x,y)$, se verif ca:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}$$

22. Exprese las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad \text{en términos de} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

donde (ρ,θ,ϕ) son coordenadas esféricas.

23. Suponga que z está def nida implícitamente como función de x y de y mediante la ecuación $F(x,y,z) = xz^2 + y^2 z + xy - 1 = 0$.

(a) Calcule F_x, F_y, F_z.

(b) Use la ec. (7) para calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

24. Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en los puntos $(3,2,1)$ y $(3,2,-1)$, donde z está def nida implícitamente por la ecuación $z^4 + z^2x^2 - y - 8 = 0$.

En los problemas 25-30, calcule las derivadas parciales usando derivación implícita.

25. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $x^2y + y^2z + xz^2 = 10$

26. $\dfrac{\partial w}{\partial z}$, $x^2w + w^3 + wz^2 + 3yz = 0$

27. $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $e^{xy} + \text{sen}(xz) + y = 0$

28. $\dfrac{\partial r}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial t}{\partial r}$, $r^2 = te^{s/r}$

29. $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, $\dfrac{1}{w^2 + x^2} + \dfrac{1}{w^2 + y^2} = 1$ en $(x,y,w) = (1,1,1)$

30. $\partial U/\partial T$ y $\partial T/\partial U$, $(TU - V)^2\ln(W - UV) = 1$ en $(T,U,V,W) = (1,1,2,4)$

31. Sea $\mathbf{r} = \langle x,y,z\rangle$ y $e_\mathbf{r} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Pruebe que si una función $f(x,y,z) = F(r)$ depende únicamente de la distancia al origen $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces:

$$\nabla f = F'(r)e_\mathbf{r} \qquad \boxed{9}$$

32. Sea $f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2} = e^{-r^2}$, con r como en el problema 31. Calcule ∇f directamente y usando la ec. (9).

33. Use la ec. (9) para calcular $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$.

34. Use la ec. (9) para calcular $\nabla(\ln r)$.

35. La f gura 4 muestra la gráf ca de la ecuación:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 12x - 8z - 4 = 0$$

(a) Use la fórmula de la ecuación de segundo grado para expresar z como función de x y de y. Esto proporciona dos fórmulas, dependiendo de la elección del signo.

(b) ¿Qué fórmula def ne la porción de la superf cie que cumple $z \geq -4$? ¿Qué fórmula def ne la porción que cumple $z \leq -4$?

(c) Calcule $\partial z/\partial x$ usando la fórmula $z = f(x,y)$ (para ambas elecciones de signo) y, de nuevo, por derivación implícita. Verif que que ambas respuestas coinciden.

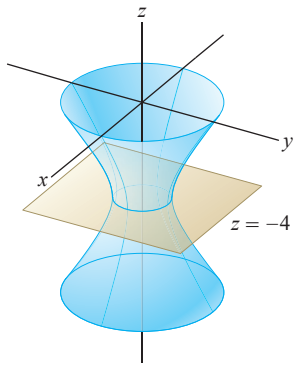


FIGURA 4 Gráf ca de $x^2 + y^2 - z^2 - 12x - 8z - 4 = 0$.

36. Para todo $x > 0$, existe un único valor $y = r(x)$ que resuelve la ecuación $y^3 + 4xy = 16$.

(a) Pruebe que $dy/dx = -4y/(3y^2 + 4x)$.

(b) Sea $g(x) = f(x, r(x))$, donde $f(x,y)$ es una función que cumple:

$$f_x(1,2) = 8 \quad f_y(1,2) = 10$$

Use la regla de la cadena para calcular $g'(1)$. Observe que $r(1) = 2$, pues $(x,y) = (1,2)$ cumple que $y^3 + 4xy = 16$.

37. La presión P, volumen V, y temperatura T de un gas de van der Waals de n moléculas (n constante) están relacionadas por medio de la ecuación:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde a, b y R son constantes. Calcule $\partial P/\partial T$ y $\partial V/\partial P$.

38. Cuando x, y y z están relacionada mediante una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$, en ocasiones se escribe $(\partial z/\partial x)_y$ en lugar de $\partial z/\partial x$ para indicar que en la derivación, z se trata como función de x con y mantenida constante (y análogamente con el resto de las variables).

(a) Use la ec. (7) para demostrar la **relación cíclica**:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1 \qquad \boxed{10}$$

(b) Compruebe la ec. (10) para $F(x,y,z) = x + y + z = 0$.

(c) Compruebe la relación cíclica para las variables P, V, T en la ley de los gases ideales $PV - nRT = 0$ (n y R son constantes).

39. Pruebe que si $f(x)$ es derivable y $c \neq 0$ es una constante, entonces $u(x,t) = f(x - ct)$ cumple la conocida **ecuación de advección**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Problemas avanzados

En los problemas 40-43, una función $f(x,y,z)$ se denomina ***homogénea de grado n*** *si $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x,y,z)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

40. Pruebe que las siguientes funciones son homogéneas y determine su grado:

(a) $f(x,y,z) = x^2y + xyz$ **(b)** $f(x,y,z) = 3x + 2y - 8z$

(c) $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{xy}{z^2}\right)$ **(d)** $f(x,y,z) = z^4$

41. Demuestre que si $f(x,y,z)$ es homogénea de grado n, entonces $f_x(x,y,z)$ es homogénea de grado $n - 1$. *Indicación:* use la def nición por límites o aplique la regla de la cadena a $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

42. Demuestre que si $f(x,y,z)$ es homogénea de grado n, entonces:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf \qquad \boxed{11}$$

Indicación: considere $F(t) = f(tx, ty, tz)$ y calcule $F'(1)$ usando la regla de la cadena.

43. Compruebe la ec. (11) para las funciones del problema 40.

44. Suponga que $x = g(t,s)$, $y = h(t,s)$. Pruebe que f_{tt} es igual a:

$$f_{xx}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2f_{xy}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + f_{yy}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + f_x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f_y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \boxed{12}$$

45. Sea $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ y sea $g(r)$ una función de r. Demuestre las fórmulas:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}g_r \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \frac{x_i^2}{r^2}g_{rr} + \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}g_r$$

46. Demuestre que si $g(r)$ es una función de r como en el problema 45, entonces:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = g_{rr} + \frac{n-1}{r}g_r$$

En los problemas 47-51, el ***operador de Laplace*** *se define como* $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$. *Una función* $f(x, y)$ *que cumpla la ecuación de Laplace* $\Delta f = 0$ *se denomina* ***armónica***. *Una función* $f(x, y)$ *se denomina* ***radial*** *si* $f(x, y) = g(r)$, *donde* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

47. Use la ec. (12) para demostrar que en coordenadas polares (r, θ):

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} f_r \qquad \boxed{13}$$

48. Use la ec. (13) para probar que $f(x, y) = \ln r$ es armónica.

49. Compruebe que $f(x, y) = x$ y $f(x, y) = y$ son armónicas usando tanto la expresión rectangular como la polar para Δf.

50. Compruebe que $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ es armónica usando tanto la expresión rectangular como la polar para Δf.

51. Use la regla del producto para probar que:

$$f_{rr} + \frac{1}{r} f_r = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

Use esta fórmula para probar que si f es una función radial armónica, entonces $r f_r = C$ para alguna constante C. Deduzca que $f(x, y) = C \ln r + b$ para alguna constante b.

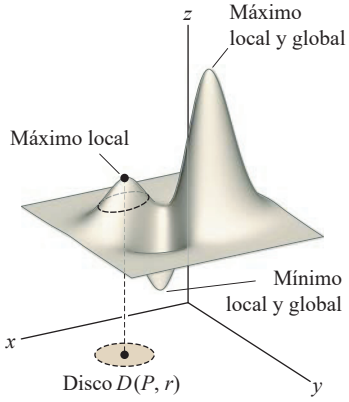


FIGURA 1 $f(x, y)$ tiene un máximo local en P.

15.7 Optimización en varias variables

Recuerde que la optimización es el proceso de hallar los valores extremos de una función. Esto consiste en hallar los puntos máximo y mínimo de la gráfica sobre un cierto dominio. Tal y como se vio en el caso de una variable, es importante distinguir entre valores extremos *locales* y *globales*. Un valor extremo es un valor $f(a, b)$ que es máximo, o mínimo, en algún pequeño disco alrededor de (a, b) (figura 1).

DEFINICIÓN Valores extremos locales Una función $f(x, y)$ tiene un **extremo local** en $P = (a, b)$ si existe un disco abierto $D(P, r)$ tal que:

- **Máximo local:** $f(x, y) \le f(a, b)$ para todo $(x, y) \in D(P, r)$
- **Mínimo local:** $f(x, y) \ge f(a, b)$ para todo $(x, y) \in D(P, r)$

RECORDATORIO *El término "extremum" (el plural es "extrema") significa valor mínimo o máximo.*

El teorema de Fermat establece que si $f(a)$ es un valor extremo local, entonces a es un punto crítico y, por tanto, la recta tangente (si existe) es horizontal en $x = a$. Se puede esperar un resultado similar en dos variables, pero en este caso, es el *plano tangente* el que debe ser horizontal (figura 2). La ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en $P = (a, b)$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Por tanto, el plano tangente es horizontal si $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, es decir, si la ecuación se reduce a $z = f(a, b)$. Esto lleva a la siguiente definición de punto crítico, donde se tiene en consideración la posibilidad de que una o ambas derivadas parciales pudieran no existir.

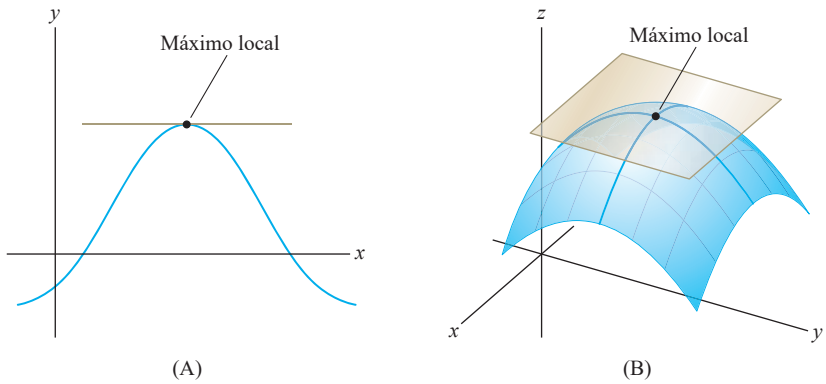


FIGURA 2 La recta o el plano tangentes son horizontales en un extremo local.

- *De manera más general, $(a_1, \ldots, a_n)$ es un punto crítico de $f(x_1, \ldots, x_n)$ si cada derivada parcial cumple:*

$$f_{x_j}(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

o bien no existe.

- *El teorema 1 se cumple para cualquier número de variables: los extremos locales ocurren en puntos críticos.*

DEFINICIÓN Punto crítico Un punto $P = (a, b)$ del dominio de $f(x, y)$ se denomina un **punto crítico** si:

- $f_x(a, b) = 0$ o $f_x(a, b)$ no existe y
- $f_y(a, b) = 0$ o $f_y(a, b)$ no existe

Como en el caso de una variable, se tiene:

TEOREMA 1 Teorema de Fermat Si $f(x, y)$ tiene un máximo o mínimo local en $P = (a, b)$, entonces (a, b) es un punto crítico de $f(x, y)$.

Demostración Si $f(x, y)$ tiene un mínimo local en $P = (a, b)$, entonces $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo (x, y) cerca de (a, b). En particular, existe $r > 0$ tal que $f(x, b) \geq f(a, b)$ siempre que $|x - a| < r$. Dicho de otro modo, $g(x) = f(x, b)$ tiene un mínimo local en $x = a$. Según el teorema de Fermat para funciones de una variable, o bien $g'(a) = 0$ o bien $g'(a)$ no existe. Como $g'(a) = f_x(a, b)$, se deduce que, o bien $f_x(a, b) = 0$ o $f_x(a, b)$ no existe. Análogamente, $f_y(a, b) = 0$ o $f_y(a, b)$ no existe. Por tanto, $P = (a, b)$ es un punto crítico. El caso del máximo local es similar. ■

Habitualmente se trata con funciones cuyas derivadas parciales existen. En tal caso, hallar los puntos críticos consiste en resolver las ecuaciones simultáneas $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$.

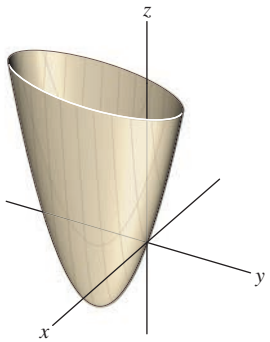


FIGURA 3 Gráfica de $f(x, y) = 11x^2 - 2xy + 2y^2 + 3y$.

■ **EJEMPLO 1** Pruebe que $f(x, y) = 11x^2 - 2xy + 2y^2 + 3y$ tiene un punto crítico. Use la figura 3 para determinar si éste corresponde a un máximo o a un mínimo local.

Solución Iguale a cero las derivadas parciales y resuelva:

$$f_x(x, y) = 22x - 2y = 0$$
$$f_y(x, y) = -2x + 4y + 3 = 0$$

Según la primera ecuación, $y = 11x$. Sustituyendo $y = 11x$ en la segunda ecuación, se tiene:

$$-2x + 4y + 3 = -2x + 4(11x) + 3 = 42x + 3 = 0$$

Por tanto $x = -\frac{1}{14}$ e $y = -\frac{11}{14}$. Existe únicamente un punto crítico, $P = (-\frac{1}{14}, -\frac{11}{14})$. La figura 3 muestra que $f(x, y)$ presenta un mínimo local en P. ■

No siempre es posible hallar las soluciones explícitamente, pero se puede usar un programa informático de cálculo simbólico para hallar aproximaciones numéricas.

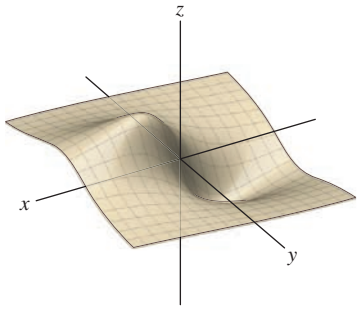


FIGURA 4 Gráfica de $f(x, y) = \dfrac{x - y}{2x^2 + 8y^2 + 3}$.

■ **EJEMPLO 2** SAC **Un ejemplo numérico** Use un programa informático de cálculo simbólico para hallar los puntos críticos de:

$$f(x, y) = \frac{x - y}{2x^2 + 8y^2 + 3}$$

¿Se trata de máximos o de mínimos locales? Haga referencia a la figura 4.

Solución Utilizaremos un programa informático de cálculo simbólico para calcular las derivadas parciales y resolver:

$$f_x(x, y) = \frac{-2x^2 + 8y^2 + 4xy + 3}{(2x^2 + 8y^2 + 3)^2} = 0$$

$$f_y(x, y) = \frac{-2x^2 + 8y^2 - 16xy - 3}{(2x^2 + 8y^2 + 3)^2} = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, iguale los numeradores a cero. La figura 4 indica que $f(x, y)$ tiene un máximo local con $x > 0$ y un mínimo local para el que $x < 0$. La siguiente instrucción de Mathematica busca una solución cerca de $(1, 0)$:

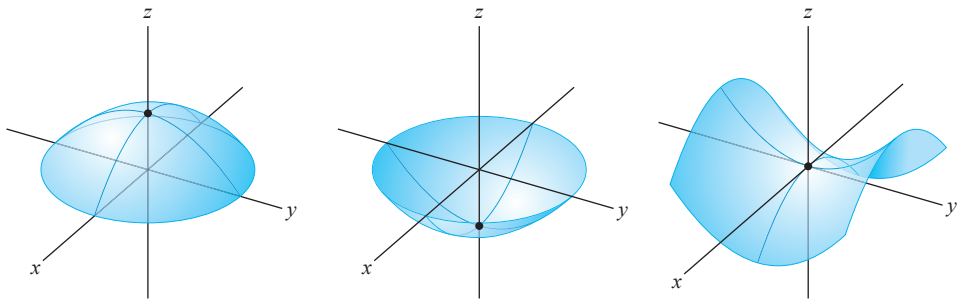
```
FindRoot[{-2x^2+8y^2+4xy+3 == 0, -2x^2+8y^2-16xy-3 == 0},
 {{x,1},{y,0}}]
```

El resultado es:

```
{x -> 1.095, y -> -0.274}
```

Por tanto, (1,095, –0,274) es un punto crítico aproximado, donde según la figura 4, f alcanza un máximo local. Una segunda búsqueda cerca de $(-1, 0)$ conduce a (–1,095, 0,274), que aproxima al punto crítico en que $f(x, y)$ alcanza un mínimo local. ■

Se sabe que en una variable, una función $f(x)$ puede tener un punto de inflexión y no un extremo local, en un punto crítico. Una situación similar ocurre en varias variables. Cada una de las funciones de la figura 5 tiene un punto crítico en $(0, 0)$. Sin embargo, la función de la figura 5(C) presenta un punto de silla, lo que no es ni un máximo ni un mínimo. Si se encuentra en un punto de silla y empieza a caminar, algunas direcciones le llevarían hacia arriba y otras hacia abajo.



(A) Máximo local (B) Mínimo local (C) Punto de silla

FIGURA 5

Como en el caso de una variable, existe un test de la segunda derivada para determinar el tipo de punto crítico (a, b) de una función $f(x, y)$ de dos variables. Este test se basa en el signo del **discriminante** $D = D(a, b)$, que se define como:

También nos referiremos al discriminante como al "determinante de la matriz hessiana".

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b)$$

TEOREMA 2 Test de la segunda derivada Sea $P = (a, b)$ un punto crítico de $f(x, y)$. Suponga que f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} son continuas cerca de P. Entonces:

(i) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

(ii) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

(iii) Si $D < 0$, entonces f tiene un punto de silla en (a, b).

(iv) Si $D = 0$, el test no decide.

Si $D > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo, por lo que el signo de $f_{yy}(a, b)$ también determina si $f(a, b)$ es un máximo o un mínimo local.

Al final de esta sección se proporciona una demostración de este teorema.

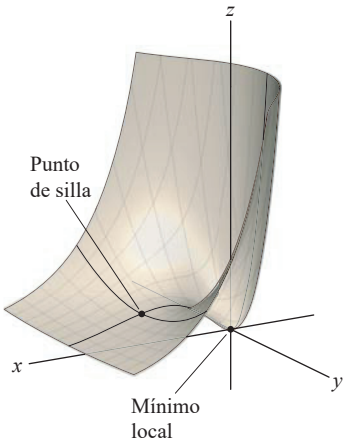


FIGURA 6 Gráf ca de $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$.

EJEMPLO 3 Aplicación del criterio de la segunda derivada Halle los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$$

y analícelos utilizando el criterio de la segunda derivada.

Solución

Etapa 1. **Halle los puntos críticos**

Iguale las derivadas parciales a cero y resuelva:

$$f_x(x,y) = -(x^2 + y^2)e^{-x} + 2xe^{-x} = (2x - x^2 - y^2)e^{-x} = 0$$
$$f_y(x,y) = 2ye^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Sustituyendo $y = 0$ en la primera ecuación se obtiene:

$$(2x - x^2 - y^2)e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, 2$$

Los puntos críticos son $(0,0)$ y $(2,0)$ [f gura 6].

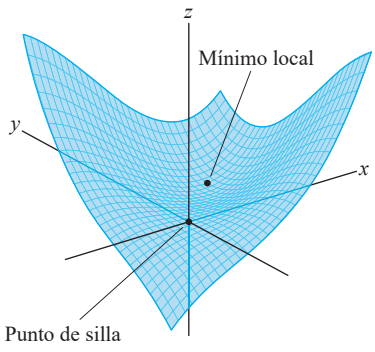
Etapa 2. **Calcule las derivadas parciales de segundo orden**

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}((2x - x^2 - y^2)e^{-x}) = (2 - 4x + x^2 + y^2)e^{-x}$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2ye^{-x}) = 2e^{-x}$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2ye^{-x}) = -2ye^{-x}$$

Etapa 3. **Aplique el criterio de la segunda derivada**

Punto Crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	Discriminante $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	Tipo
$(0,0)$	2	2	0	$2(2) - 0^2 = 4$	Mínimo local pues $D > 0$ y $f_{xx} > 0$
$(2,0)$	$-2e^{-2}$	$2e^{-2}$	0	$-2e^{-2}(2e^{-2}) - 0^2 = -4e^{-4}$	Punto de silla pues $D < 0$

UN APUNTE GRÁFICO También se puede determinar el tipo de punto crítico a partir del mapa de contorno. Observe que las curva de nivel de la f gura 7 rodean el mínimo local en P, siendo f creciente en todas las direcciones que surgen de P. Por el contrario, f presenta un punto de silla en Q: el entorno de Q está dividido en cuatro regiones en las que $f(x,y)$ alternativamente crece y decrece.



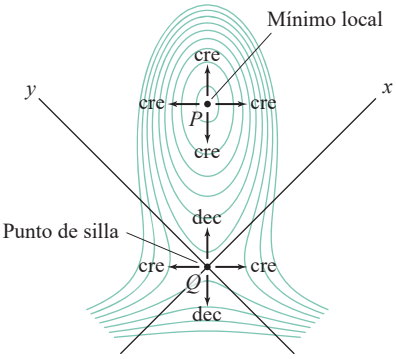


FIGURA 7 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12xy$.

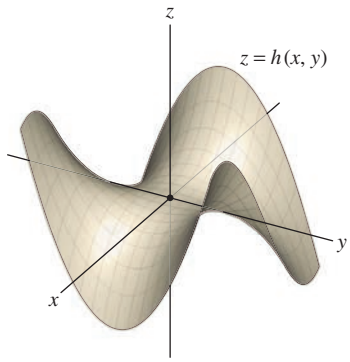
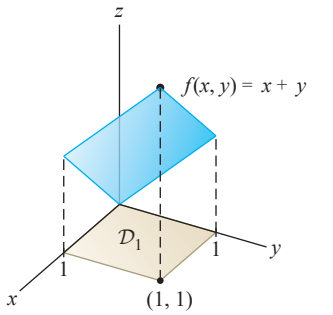


FIGURA 8 Gráfica de una "silla de mono" de ecuación $h(x,y) = 3xy^2 - x^3$.



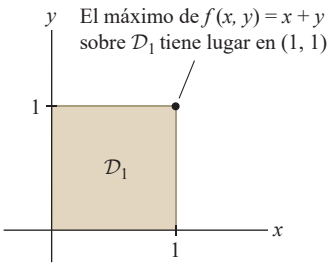


FIGURA 9

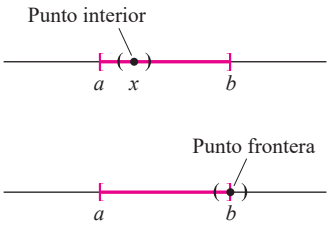


FIGURA 10 Puntos interior y frontera de un intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 4 Analice los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12xy$.

Solución De nuevo, iguale las derivadas parciales a cero y resuelva:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 12y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x^2$$
$$f_y(x,y) = 3y^2 - 12x = 0$$

Sustituyendo $y = \frac{1}{4}x^2$ en la segunda ecuación, se obtiene:

$$3y^2 - 12x = 3\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 - 12x = \frac{3}{16}x(x^3 - 64) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ y } x = 4$$

Como $y = \frac{1}{4}x^2$, los puntos críticos son $(0, 0)$ y $(4, 4)$.

Se tiene:

$$f_{xx}(x,y) = 6x \qquad f_{yy}(x,y) = 6y \qquad f_{xy}(x,y) = -12$$

El criterio de la segunda derivada confirma lo que se ve en la figura 7: f tiene un mínimo local en $(4, 4)$ y un punto de silla en $(0, 0)$.

Punto Crítico	f_{xx}	f_{yy}	f_{xy}	Discriminante $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	Tipo
$(0, 0)$	0	0	-12	$0(0) - 12^2 = -144$	Punto de silla pues $D < 0$
$(4, 4)$	24	24	-12	$24(24) - 12^2 = 432$	Mínimo local pues $D > 0$ y $f_{xx} > 0$

UN APUNTE GRÁFICO Un gráfico puede adoptar variedad de formas diferentes en un punto de silla. La gráfica de $h(x,y)$ en la figura 8 se llama una "silla de mono" (porque un mono puede sentarse en esta silla, con espacio para la cola en la parte posterior).

Extremos globales

A menudo interesa hallar el máximo o mínimo valor de una función f sobre un domino concreto $\mathcal{D}$. Se trata de **valores extremos absolutos** o **globales**. Sin embargo, los extremos globales no siempre existen. La función $f(x,y) = x + y$ tiene un valor máximo sobre el cuadrado unidad $\mathcal{D}_1$ de la figura 9 (el máximo es $f(1, 1) = 2$), pero no tiene valor máximo sobre $\mathbb{R}^2$.

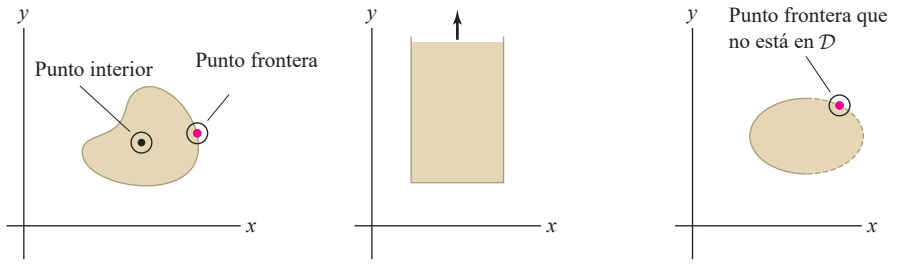
Para enunciar las condiciones que garanticen la existencia de extremos globales, se necesitan algunas definiciones. En primer lugar, se dice que un dominio $\mathcal{D}$ está **acotado** si existe un número $M > 0$ tal que $\mathcal{D}$ está contenido en un disco de radio M centrado en el origen. Dicho de otro modo, ningún punto de $\mathcal{D}$ está a una distancia mayor que M del origen [figuras 11(A) y 11(B)]. Un punto P se denomina:

- **punto interior** de $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}$ contiene un disco abierto $D(P, r)$ centrado en P.
- **punto frontera** de $\mathcal{D}$ si todo disco centrado en P contiene puntos de $\mathcal{D}$ y que no son de $\mathcal{D}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Para entender el concepto de punto interior y frontera piense en el caso de un intervalo $I = [a, b]$ de la recta real $\mathbb{R}$ (figura 10). Todo punto x del intervalo abierto (a, b) es un *punto interior* de I (pues existe un pequeño intervalo alrededor de x enteramente contenido en I). Los dos extremos a y b son *puntos frontera* (pues todo intervalo abierto que contenga a a o a b también contiene puntos que no están en I).

El **interior** de $\mathcal{D}$ es el conjunto de todos los puntos interiores y la **frontera** de $\mathcal{D}$ es el conjunto de todos los puntos frontera. En la f gura 11(C), la frontera es la curva que rodea el dominio. El interior está formado por todos los puntos del dominio que no están en la curva frontera.

Se dice que un dominio $\mathcal{D}$ es **cerrado** si $\mathcal{D}$ contiene a todos sus puntos frontera (como en un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$). Un dominio $\mathcal{D}$ se denomina **abierto** si todo punto del dominio $\mathcal{D}$ es un punto interior (como en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$). El dominio de la f gura 11(A) es cerrado porque el dominio incluye a la curva frontera. En la f gura 11(C), algunos puntos frontera están incluidos y otros excluidos, por lo que el dominio no es ni abierto ni cerrado.



(A) Este dominio está acotado y es cerrado (contiene a todos sus puntos frontera).

(B) Un domino no acotado (contiene puntos que se ecnuentran arbitrariamente lejos del origen).

(C) Un dominio no cerrado (contiene a algunos de sus puntos frontera, aunque no todos).

FIGURA 11 Dominios en $\mathbb{R}^2$.

En la sección 4.2, se enunciaron dos resultados básicos. En primer lugar, una función continua $f(x)$ sobre un *intervalo cerrado y acotado* $[a, b]$ alcanza un valor máximo y uno mínimo en $[a, b]$. En segundo lugar, estos valores extremos se producen en los puntos críticos en el interior (a, b) o en los extremos del intervalo. Resultados análogos son válidos para varias variables.

TEOREMA 3 Existencia y localización de extremos globales Sea $f(x, y)$ una función continua sobre un domino cerrado y acotado $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Entonces:

(i) $f(x, y)$ alcanza un valor máximo y uno mínimo sobre $\mathcal{D}$.

(ii) Los valores extremos ocurren o bien en los puntos críticos en el interior de $\mathcal{D}$, o bien en los puntos de la frontera de $\mathcal{D}$.

EJEMPLO 5 Halle el valor máximo de $f(x, y) = 2x + y - 3xy$ sobre el cuadrado unidad $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \le x, y \le 1\}$.

Solución Según el teorema 3, el máximo ocurre o bien en un punto crítico, o bien en la frontera del cuadrado (f gura 12).

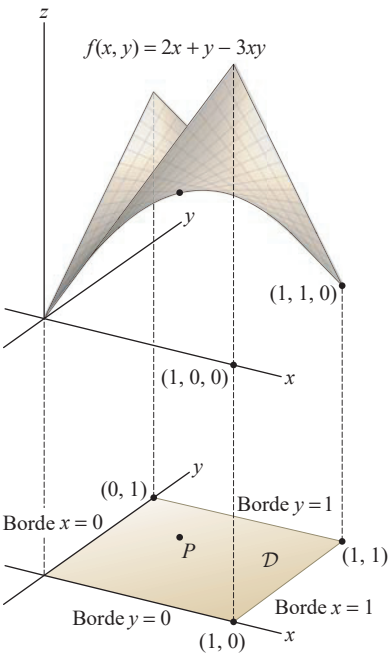


FIGURA 12

Etapa 1. **Examine los puntos críticos**

Iguale las derivadas parciales a cero y solucione:

$$f_x(x, y) = 2 - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \qquad f_y(x, y) = 1 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Existe un único punto crítico $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y se verif ca:

$$f(P) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Etapa 2. **Analice la frontera**

Se examinará cada uno de los cuatro lados del cuadrado por separado. El lado inferior queda descrito mediante $y = 0$, $0 \le x \le 1$. Sobre este segmento, $f(x, 0) = 2x$ y el valor máximo se da en $x = 1$, donde $f(1, 0) = 2$. Procediendo de manera similar con los otros segmentos, se obtiene:

Borde	Restricción de $f(x, y)$ al segmento	Máximo de $f(x, y)$ sobre el segmento
Inferior: $y = 0, 0 \le x \le 1$	$f(x, 0) = 2x$	$f(1, 0) = 2$
Superior: $y = 1, 0 \le x \le 1$	$f(x, 1) = 1 - x$	$f(0, 1) = 1$
Izquierdo: $x = 0, 0 \le y \le 1$	$f(0, y) = y$	$f(0, 1) = 1$
Derecho: $x = 1, 0 \le y \le 1$	$f(1, y) = 2 - 2y$	$f(1, 0) = 2$

Etapa 3. **Compare**

El máximo de f sobre la frontera es $f(1, 0) = 2$. Es superior al valor $f(P) = \frac{2}{3}$ en el punto crítico, por lo que el máximo de f sobre el cuadrado unidad es 2. ■

■ **EJEMPLO 6 Caja de máximo volumen** Halle el volumen máximo de la caja inscrita en el tetraedro limitado por los planos de coordenadas y el plano $\frac{1}{3}x + y + z = 1$.

Solución

Etapa 1. **Halle la función a maximizar**

Sea $P = (x, y, z)$ la esquina de la caja que se encuentra en la cara frontal del tetraedro (f gura 13). Entonces, las longitudes de los lados de la caja son x, y, z y su volumen es $V = xyz$. Como $\frac{1}{3}x + y + z = 1$, o $z = 1 - \frac{1}{3}x - y$, se puede expresar V en términos de x y de y:

$$V(x, y) = xyz = xy\left(1 - \frac{1}{3}x - y\right) = xy - \frac{1}{3}x^2y - xy^2$$

El problema consiste en maximizar V, pero ¿qué dominio $\mathcal{D}$ se debe considerar? La elección para $\mathcal{D}$ es el triángulo sombreado $\triangle OAB$ del plano xy de la f gura 13. Entonces, el punto esquina $P = (x, y, z)$ de cada posible caja se encuentra por encima de un punto (x, y) de $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ es cerrado y acotado, el máximo se da en un punto crítico dentro de $\mathcal{D}$ o sobre la frontera de $\mathcal{D}$.

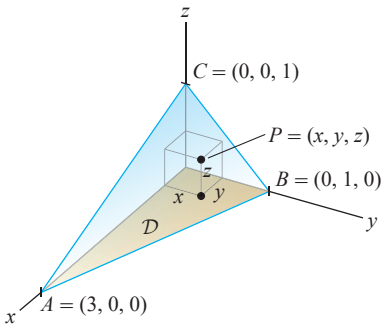


FIGURA 13 El triángulo sombreado es el dominio de $V(x, y)$.

Etapa 2. **Examine los puntos críticos**

En primer lugar, iguale las derivadas parciales a cero y solucione:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y - \frac{2}{3}xy - y^2 = y\left(1 - \frac{2}{3}x - y\right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x - \frac{1}{3}x^2 - 2xy = x\left(1 - \frac{1}{3}x - 2y\right) = 0$$

Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces (x, y) se encuentra sobre la frontera de $\mathcal{D}$, por lo que se supondrá que x e y no son simultáneamente cero. Entonces, según la primera ecuación:

$$1 - \frac{2}{3}x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{2}{3}x$$

De la segunda ecuación, se obtiene:

$$1 - \frac{1}{3}x - 2y = 1 - \frac{1}{3}x - 2\left(1 - \frac{2}{3}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Para $x = 1$, se tiene que $y = 1 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$. Por tanto, $(1, \frac{1}{3})$ es un punto crítico y:

$$V\left(1, \frac{1}{3}\right) = (1)\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1)^2\frac{1}{3} - (1)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Etapa 3. **Analice la frontera**

Se tiene que $V(x, y) = 0$ para todos los puntos de la frontera de $\mathcal{D}$ (pues los tres segmentos de la frontera están def nidos por $x = 0$, $y = 0$ y $1 - \frac{1}{3}x - y = 0$). Así, claramente el máximo se alcanza en el punto crítico y el volumen máximo es $\frac{1}{9}$. ■

Demostración del criterio de la segunda derivada Esta demostración se basa en "completar cuadrados" para formas cuadráticas. Una **forma cuadrática** es una función:

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$

donde a, b, c son constantes (no todas simultáneamente iguales a cero). El discriminante de Q es la cantidad:

$$D = ac - b^2$$

Algunas formas cuadráticas sólo alcanzan valores positivos cuando $(h,k) \neq (0,0)$ y otras alcanzan tanto valores positivos como negativos. Según el siguiente teorema, el signo del discriminante determina ante cuál de estas dos posibilidades nos encontramos.

Para ilustrar el teorema 4, considere:

$$Q(h,k) = h^2 + 2hk + 2k^2$$

Su discriminante es positivo:

$$D = (1)(2) - 1 = 1$$

Directamente se puede ver que $Q(h,k)$ alcanza sólo valores positivos para $(h,k) \neq (0,0)$ expresando $Q(h,k)$ como:

$$Q(h,k) = (h+k)^2 + k^2$$

TEOREMA 4 Sean $Q(h,k)$ una forma cuadrática y D su discriminante, tal y como se def nieron anteriormente.

(i) Si $D > 0$ y $a > 0$, entonces $Q(h,k) > 0$ para $(h,k) \neq (0,0)$.

(ii) Si $D > 0$ y $a < 0$, entonces $Q(h,k) < 0$ para $(h,k) \neq (0,0)$.

(iii) Si $D < 0$, entonces $Q(h,k)$ alcanza tanto valores positivos como negativos.

Demostración En primer lugar, suponga que $a \neq 0$ y reescriba $Q(h,k)$ "completando cuadrados":

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 = a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)k^2 =$$

$$= a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{D}{a}k^2 \qquad \boxed{1}$$

Si $D > 0$ y $a > 0$, entonces $D/a > 0$ y los dos términos de la ec. (1) son no negativos. Además, si $Q(h,k) = 0$, entonces cada término de la ec. (1) debe ser igual a cero. Por tanto $k = 0$ y $h + \frac{b}{a}k = 0$ y necesariamente $h = 0$. Esto demuestra que $Q(h,k) > 0$ si $(h,k) \neq 0$ y (i) queda demostrado. El apartado (ii) se demuestra de forma similar. Para demostrar (iii), observe que si $a \neq 0$ y $D < 0$, entonces los coef cientes de los términos al cuadrado en la ec. (1) tienen signos opuestos y $Q(h,k)$ alcanza tanto valores positivos como negativos. Por último, si $a = 0$ y $D < 0$, entonces $Q(h,k) = 2bhk + ck^2$ con $b \neq 0$. En este caso, $Q(h,k)$ alcanza, de nuevo, tanto valores positivos como negativos. ■

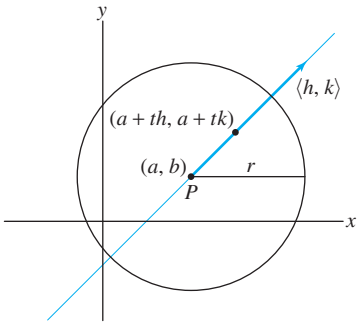


FIGURA 14 Recta que pasa por P en la dirección de $\langle h,k \rangle$.

Suponga ahora que $f(x,y)$ presenta un punto crítico en $P = (a,b)$. Se va a analizar f considerando la restricción de $f(x,y)$ a la recta (f gura 14) que pasa por $P = (a,b)$ con la dirección de un vector unitario $\langle h,k \rangle$:

$$F(t) = f(a + th, b + tk)$$

Entonces $F(0) = f(a,b)$. Por la regla de la cadena:

$$F'(t) = f_x(a + th, b + tk)h + f_y(a + th, b + tk)k$$

Como P es un punto crítico, se tiene que $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ y, por tanto:

$$F'(0) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k = 0$$

En consecuencia, $t = 0$ es un punto crítico de $F(t)$.

Ahora, aplique la regla de la cadena de nuevo:

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\Big(f_x(a+th, b+tk)h + f_y(a+th, b+tk)k\Big) =$$

$$= \Big(f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + f_{xy}(a+th, b+tk)hk\Big) +$$

$$+ \Big(f_{yx}(a+th, b+tk)kh + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2\Big) =$$

$$= f_{xx}(a+th, b+tk)h^2 + 2f_{xy}(a+th, b+tk)hk + f_{yy}(a+th, b+tk)k^2 \qquad \boxed{2}$$

Se obtiene que $F''(t)$ es el valor en (h, k) de una forma cuadrática cuyo discriminante es igual a $D(a+th, b+tk)$. Aquí, se está considerando:

$$D(r, s) = f_{xx}(r, s)f_{yy}(r, s) - f_{xy}(r, s)^2$$

Observe que el discriminante de $f(x, y)$ en el punto crítico $P = (a, b)$ es $D = D(a, b)$.

Caso 1: $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$. Se debe demostrar que $f(a, b)$ es un mínimo local. Considere un pequeño disco de radio r alrededor de P (f gura 14). Como las derivadas segundas son continuas cerca de$P$, se puede considerar $r > 0$ tal que para todo vector unitario $\langle h, k\rangle$, se cumpla:

$$D(a+th, b+tk) > 0 \qquad \text{para } |t| < r$$

$$f_{xx}(a+th, b+tk) > 0 \qquad \text{para } |t| < r$$

Entonces, según el teorema 4(i) $F''(t)$ es positiva para $|t| < r$. Así $F(t)$ es convexa y por tanto $F(0) < F(t)$ si $0 < |t| < |r|$ (vea el problema 64 de la sección 4.4). Como $F(0) = f(a, b)$, se deduce que $f(a, b)$ es el valor mínimo de f a lo largo de todo segmento de r que pasa por (a, b). En consecuencia, $f(a, b)$ es un valor mínimo de f como se quería demostrar. El caso en que $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ es similar.

Caso 2: $D(a, b) < 0$. Para $t = 0$, la ec. (2) da lugar a:

$$F''(0) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$$

Como $D(a, b) < 0$, esta forma cuadrática alcanza tanto valores positivos como negativos según el teorema 4(iii). Considere $\langle h, k\rangle$ para el que $F''(0) > 0$. Según el criterio de la segunda derivada en una variable, $F(0)$ es un mínimo local de $F(t)$ por lo que debe existir un valor $r > 0$ para el que $F(0) < F(t)$ siempre que $0 < |t| < r$. Pero también se puede considerar $\langle h, k\rangle$ tal que $F''(0) < 0$ y, en tal caso, $F(0) > F(t)$ siempre que $0 < |t| < r$ para algún $r > 0$. Como $F(0) = f(a, b)$, se deduce que $f(a, b)$ es un mínimo local en algunas direcciones y un máximo local en en otras direcciones. Por tanto, f presenta un punto de silla en $P = (a, b)$.

15.7 RESUMEN

- Se dice que $P = (a, b)$ es un *punto crítico* de $f(x, y)$ si:
  - $f_x(a, b) = 0$ o $f_x(a, b)$ no existe y
  - $f_y(a, b) = 0$ o $f_y(a, b)$ no existe.

En n-variables, $P = (a_1, \ldots, a_n)$ es un punto crítico de $f(x_1, \ldots, x_n)$ si cada derivada parcial $f_{x_j}(a_1, \ldots, a_n)$ o es cero, o no existe.

- Los valores mínimos o máximos locales de f tienen lugar en puntos críticos.
- El *discriminante* de $f(x,y)$ en $P=(a,b)$ es la cantidad:

$$D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$$

- *Criterio de la segunda derivada:* si $P=(a,b)$ es un punto crítico de $f(x,y)$, entonces:

$$D(a,b) > 0, \quad f_{xx}(a,b) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(a,b) \text{ es un mínimo local}$$

$$D(a,b) > 0, \quad f_{xx}(a,b) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(a,b) \text{ es un máximo local}$$

$$D(a,b) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{punto de silla}$$

$$D(a,b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{el criterio no decide}$$

- Un punto P es un *punto interior* de un dominio $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}$ contienen algún disco abierto $D(P,r)$ centrado en P. Un punto P es un *punto frontera* de $\mathcal{D}$ si todo disco abierto $D(P,r)$ contiene puntos en $\mathcal{D}$ y puntos que no son de $\mathcal{D}$. El *interior* de $\mathcal{D}$ es el conjunto de todos los puntos interiores y la *frontera* es el conjunto de todos los puntos frontera. Un dominio es *cerrado* si contiene a todos sus puntos frontera y *abierto* si es igual a su interior.
- *Existencia y localización de extremos globales:* si f es continua y $\mathcal{D}$ es cerrado y acotado, entonces:
  - f alcanza un valor máximo y mínimo sobre $\mathcal{D}$.
  - Los valores extremos se presentan o bien en los puntos críticos del interior de $\mathcal{D}$ o bien en puntos de la frontera de $\mathcal{D}$.

Para determinar los valores extremos, en primer lugar halle los puntos críticos en el interior de $\mathcal{D}$. A continuación compare los valores de f en los puntos críticos con el valor mínimo y máximo de f sobre la frontera.

15.7 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. El $(0,0)$ es un punto crítico de la función $f(x,y) = x^2+y^2$ y también de $g(x,y) = x^2 - y^2$. ¿Cuál es la diferencia entre el comportamiento de las dos funciones en este punto crítico?

2. Identif que los puntos que se indican en los mapas de contorno como máximos locales, mínimos locales, puntos de silla o como ninguna de las anteriores (f gura 15).

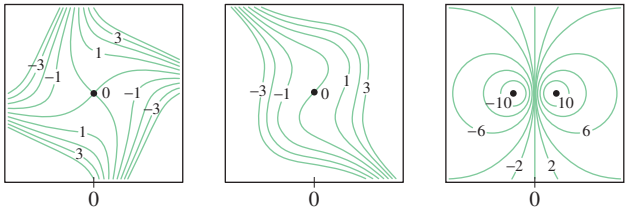


FIGURA 15

3. Sea $f(x,y)$ una función continua sobre un dominio $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine cuáles de las siguientes af rmaciones son ciertas:

(a) Si $\mathcal{D}$ es cerrado y acotado, entonces f alcanza un valor máximo sobre $\mathcal{D}$.

(b) Si $\mathcal{D}$ no es ni cerrado ni acotado, entonces f no alcanza un valor máximo sobre $\mathcal{D}$.

(c) $f(x,y)$ puede no tener un valor máximo sobre el dominio $\mathcal{D}$ def nido según $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

(d) Una función continua no alcanza un valor máximo, ni un valor mínimo, sobre el cuadrante abierto:

$$\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$$

Problemas

1. Sea $P = (a, b)$ un punto crítico de $f(x, y) = x^2 + y^4 - 4xy$.

(a) Use $f_x(x, y) = 0$ para probar que $a = 2b$. Después use $f_y(x, y) = 0$ para probar que $P = (0, 0)$, $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, o $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

(b) En referencia a la f gura 16, determine el mínimo local y los puntos de silla de $f(x, y)$ y halle el mínimo absoluto de $f(x, y)$.

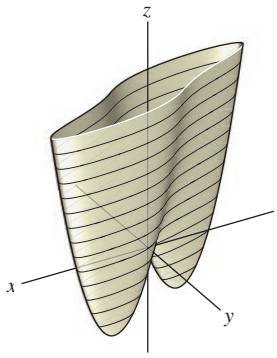


FIGURA 16

2. Halle los puntos críticos de las funciones:

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 6x \qquad g(x, y) = x^2 - 12xy + y$$

Use el criterio de la segunda derivada para determinar el máximo local, el mínimo local y los puntos de silla. Relacione $f(x, y)$ y $g(x, y)$ con sus gráf cas en la f gura 17.

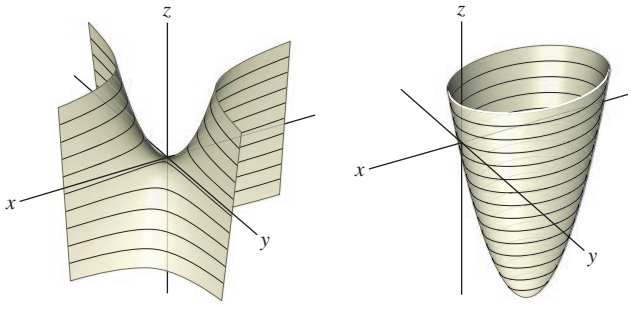


FIGURA 17

3. Halle los puntos críticos de:

$$f(x, y) = 8y^4 + x^2 + xy - 3y^2 - y^3$$

Use el mapa de contorno de la f gura 18 para determinar su naturaleza (máximo local, mínimo local o punto de silla).

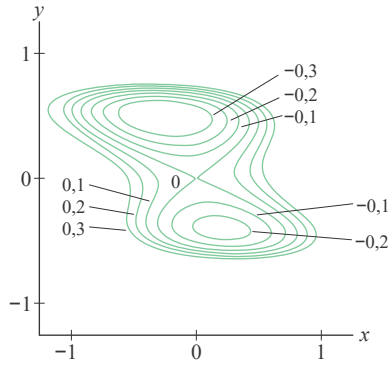


FIGURA 18 Mapa de contorno de $f(x, y) = 8y^4 + x^2 + xy - 3y^2 - y^3$.

4. Use el mapa de contorno de la f gura 19 para determinar si los puntos críticos A, B, C, D son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

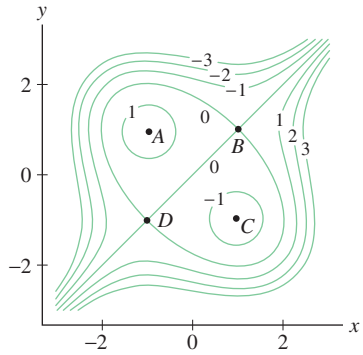


FIGURA 19

5. Sea $f(x, y) = y^2x - yx^2 + xy$.

(a) Pruebe que los puntos críticos (x, y) cumplen las ecuaciones:

$$y(y - 2x + 1) = 0 \qquad x(2y - x + 1) = 0$$

(b) Pruebe que f tiene tres puntos críticos.

(c) Use el criterio de la segunda derivada para determinar la naturaleza de los puntos críticos.

6. Pruebe que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tiene un punto crítico P y que f no es diferenciable en P. ¿Tiene f un máximo local, un mínimo local o un punto de silla en P?

En los problemas 7-23, halle los puntos críticos de la función. A continuación, utilice el criterio de la segunda derivada para determinar si se trata de máximos locales, mínimos locales o puntos de silla (o bien establezca que el criterio no decide).

7. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x$

8. $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$

9. $f(x, y) = x^3 + 2xy - 2y^2 - 10x$

10. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

11. $f(x, y) = 4x - 3x^3 - 2xy^2$

12. $f(x, y) = x^3 + y^4 - 6x - 2y^2$

13. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

14. $f(x,y) = e^{x^2-y^2+4y}$

15. $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

16. $f(x,y) = e^x - xe^y$

17. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - \cos x$

18. $f(x,y) = x\ln(x+y)$

19. $f(x,y) = \ln x + 2\ln y - x - 4y$

20. $f(x,y) = (x+y)\ln(x^2+y^2)$

21. $f(x,y) = x - y^2 - \ln(x+y)$

22. $f(x,y) = (x-y)e^{x^2-y^2}$

23. $f(x,y) = (x+3y)e^{y-x^2}$

24. Pruebe que $f(x,y) = x^2$ tiene infinitos puntos críticos (como función de dos variables) y que el criterio de la segunda derivada no decide en ninguno de ellos. ¿Cuál es el valor mínimo de f? ¿Tiene $f(x,y)$ algún máximo local?

25. Demuestre que la función $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^{3/2} - xy$ cumple que $f(x,y) \geq 0$ para $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(a) En primer lugar, compruebe que el conjunto de puntos críticos de f es la parábola $y = x^2$, y que el criterio de la segunda derivada no decide en ninguno de estos puntos.

(b) Pruebe que para b fija, la función $g(x) = f(x,b)$ es convexa para $x > 0$ con un punto crítico en $x = b^{1/2}$.

(c) Deduzca que $f(a,b) \geq f(b^{1/2},b) = 0$ para todo $a, b \geq 0$.

26. Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.

(a) ¿En qué punto alcanza f su valor mínimo? No use cálculo para responder a esta pregunta.

(b) Compruebe que el conjunto de puntos críticos de f está formado por el origen $(0,0)$ y la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$.

(c) El criterio de la segunda derivada no decide para los puntos sobre la circunferencia unitaria (esto se puede verificar con algo de álgebra, aunque la comprobación es larga). Demuestre que f alcanza su valor máximo sobre la circunferencia unitaria analizando la función $g(t) = te^{-t}$ para $t > 0$.

27. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para hallar una aproximación al punto crítico de:

$$f(x,y) = (1 - x + x^2)e^{y^2} + (1 - y + y^2)e^{x^2}$$

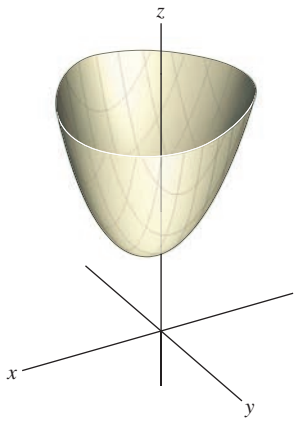


FIGURA 20 Representación gráfica de $f(x,y) = (1 - x + x^2)e^{y^2} + (1 - y + y^2)e^{x^2}$.

Aplique el criterio de la segunda derivada para comprobar que corresponde al mínimo local que se observa en la figura 20.

28. ¿Cuáles de los siguientes dominios son cerrados y cuáles acotados?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 5 \leq y \leq 10\}$

(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x^2 + y^2 \leq 10\}$

En los problemas 29-32, determine los valores extremos globales de la función sobre el conjunto que se indica sin utilizar argumentos de cálculo.

29. $f(x,y) = x + y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$

30. $f(x,y) = 2x - y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 3$

31. $f(x,y) = (x^2+y^2+1)^{-1}, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 5$

32. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1$

33. Las hipótesis son importantes Pruebe que $f(x,y) = xy$ no tiene ni máximo global ni mínimo global sobre el dominio:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

Explique por qué esto no contradice el teorema 3.

34. Halle una función continua que no tenga máximo global sobre el dominio $\mathcal{D} = \{(x,y) : x + y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Explique por qué esto no contradice el teorema 3.

35. Halle el máximo de:

$$f(x,y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$$

sobre el cuadrado $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ (figura 21).

(a) En primer lugar, localice el punto crítico de f en el cuadrado y evalúe f en este punto.

(b) Sobre el segmento inferior del cuadrado, $y = 0$ y $f(x,0) = x - x^2$. Halle los valores extremos de f sobre el segmento inferior.

(c) Halle los valores extremos de f sobre el resto de los segmentos.

(d) Halle el mayor de los valores que ha obtenido en (a), (b) y (c).

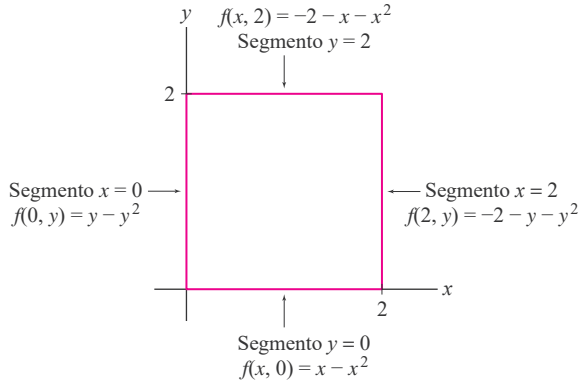


FIGURA 21 La función $f(x,y) = x+y-x^2-y^2-xy$ sobre los segmentos frontera del cuadrado $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

36. Halle el máximo de $f(x,y) = y^2 + xy - x^2$ sobre el cuadrado $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.

En los problemas 37-43, determine los valores extremos globales de la función en el dominio que se indica.

37. $f(x,y) = x^3 - 2y, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$

38. $f(x,y) = 5x - 3y, \quad y \ge x - 2, \quad y \ge -x - 2, \quad y \le 3$

39. $f(x,y) = x^2 + 2y^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$

40. $f(x,y) = x^3 + x^2y + 2y^2, \quad x, y \ge 0, \quad x + y \le 1$

41. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$

42. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y, \quad x \ge 0, \quad 0 \le y \le 3, \quad y \ge x$

43. $f(x,y) = (4y^2 - x^2)e^{-x^2-y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 2$

44. Halle el volumen máximo de una caja inscrita en el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano:

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$$

45. Halle el volumen máximo de la mayor caja del tipo que se muestra en la figura 22, con una esquina en el origen y la esquina opuesta en el punto $P = (x,y,z)$ sobre el paraboloide:

$$z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \quad \text{con } x, y, z \ge 0$$

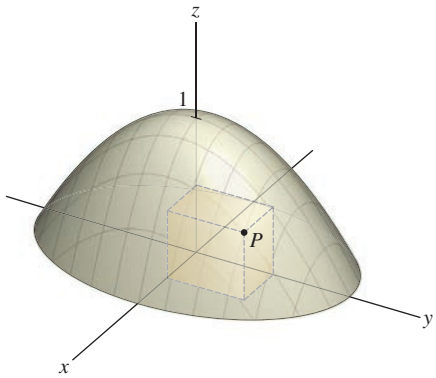


FIGURA 22

46. Halle el punto sobre el plano:

$$z = x + y + 1$$

más cercano al punto $P = (1,0,0)$. *Indicación:* minimice el cuadrado de la distancia.

47. Pruebe que la suma de los cuadrados de las distancias entre un punto $P = (c,d)$ y n puntos fijos $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$ es mínima cuando c es la media de las coordenadas x de las a_i, y d es la media de las coordenadas y de las b_i.

48. Pruebe que la caja rectangular (incluyendo la tapa y la base) de volumen fijo $V = 27\ \text{m}^3$ y menor área es un cubo (figura 23).

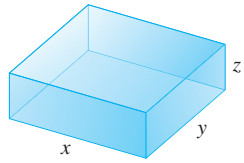


FIGURA 23 Caja rectangular de lados x, y, z.

49. Considere una caja rectangular B que tenga base y lados, pero sin tapa, y que tenga area mínima entre todas las cajas de volumen fijo igual a V.

(a) ¿Piensa que B es un cubo, como en la solución al problema 48? Si su respuesta es negativa, ¿en qué diferiría la forma respecto a un cubo?

(b) Halle las dimensiones de B y compare su resultado con la respuesta dada en (a).

50. Dadas n observaciones $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, el **ajuste (lineal) por mínimos cuadrados ordinarios** es la función lineal:

$$f(x) = mx + b$$

que minimiza la suma de cuadrados (figura 24):

$$E(m,b) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - f(x_j))^2$$

Pruebe que el valor mínimo de E se tiene para m y b cumpliendo las dos ecuaciones siguientes:

$$m\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + bn = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

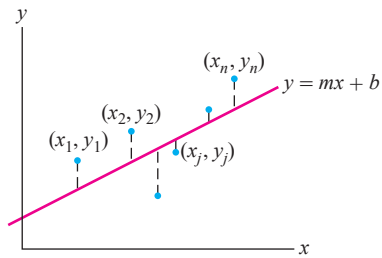


FIGURA 24 El ajuste por mínimos cuadrados minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre las observaciones y la recta.

51. La potencia (en microvatios) de un láser se mide como función de la corriente (en miliamperios). Halle el ajuste lineal por mínimos cuadrados ordinarios) (problema 50) para las observaciones que se facilitan a continuación.

Corriente (mA)	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Potencia del láser (μW)	0,52	0,56	0,82	0,78	1,23	1,50

52. Sea $A = (a, b)$ un punto fijo en el plano y sea $f_A(P)$ la distancia de A al punto $P = (x, y)$. Para $P \neq A$, sea $\mathbf{e}_{AP}$ el vector unitario que apunta de A a P (figura 25):

$$\mathbf{e}_{AP} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AP}\|}$$

Pruebe que:

$$\nabla f_A(P) = \mathbf{e}_{AP}$$

Observe que se puede obtener este resultado sin cálculo: como $\nabla f_A(P)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento, debe apuntar directamente de A hacia P y como la distancia $f_A(x, y)$ aumenta a razón de uno, al alejarse de A sobre la recta que pasa por A y P, $\nabla f_A(P)$ debe ser un vector unitario.

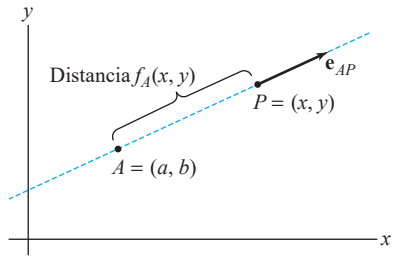


FIGURA 25 La distancia de A a P aumenta más rápidamente en la dirección de $\mathbf{e}_{AP}$.

Problemas avanzados

53. En este problema se demuestra que para todo $x, y \geq 0$:

$$\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} + \frac{1}{\beta}x^{\beta} \geq xy$$

donde $\alpha \geq 1$ y $\beta \geq 1$ son números tales que $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. Con este objetivo, se va a demostrar que la función:

$$f(x, y) = \alpha^{-1}x^{\alpha} + \beta^{-1}y^{\beta} - xy$$

cumple que $f(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \geq 0$.

(a) Pruebe que el conjunto de puntos críticos de $f(x, y)$ es la curva $y = x^{\alpha-1}$ (figura 26). Observe que esta curva se puede describir también como $x = y^{\beta-1}$. ¿Cuál es el valor de $f(x, y)$ en los puntos sobre esta curva?

(b) Compruebe que el criterio de la segunda derivada no decide. Sin embargo, muestre que para todo $b > 0$ fijado, la función $g(x) = f(x, b)$ es convexa con un punto crítico en $x = b^{\beta-1}$.

(c) Deduzca que para todo $x > 0$, $f(x, b) \geq f(b^{\beta-1}, b) = 0$.

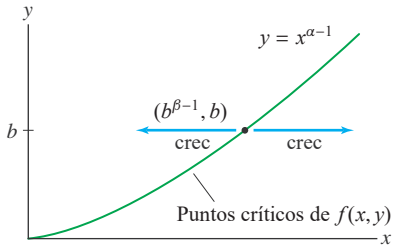


FIGURA 26 Los puntos críticos de $f(x, y) = \alpha^{-1}x^{\alpha} + \beta^{-1}y^{\beta} - xy$ forman la curva $y = x^{\alpha-1}$.

54. El siguiente problema fue planteado por Pierre de Fermat: dados tres puntos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ y $C = (c_1, c_2)$ en el plano, halle el punto $P = (x, y)$ que minimiza la suma de distancias:

$$f(x, y) = AP + BP + CP$$

Sean $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ vectores unitarios que apuntan de P a los puntos A, B, C como en la figura 27.

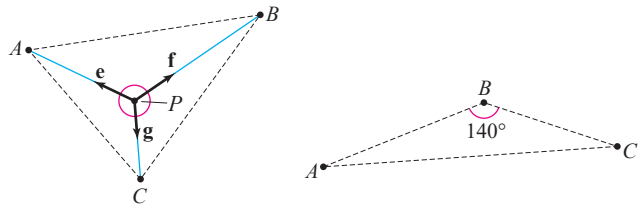
(a) Use el problema 52 para probar que la condición $\nabla f(P) = 0$ es equivalente a:

$$\mathbf{e} + \mathbf{f} + \mathbf{g} = 0 \qquad \boxed{3}$$

(b) Pruebe que $f(x, y)$ es diferenciable excepto en los puntos A, B, C. Deduzca que el mínimo de $f(x, y)$ se presenta o bien en un punto P que cumpla la ec. (3), o bien en uno de los puntos A, B, o C.

(c) Demuestre que la ec. (3) es cierta si y sólo si P es el **punto de Fermat**, que se define como el punto P para el que los ángulos entre los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ son todos de 120° (figura 27).

(d) Pruebe que el punto de Fermat no existe si uno de los ángulos del $\triangle ABC$ es $> 120°$. En tal caso, ¿dónde se presentará el mínimo?



(A) P es el punto de Fermat (los ángulos entre $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son todos iguales a 120°)

(B) El punto de Fermat no existe.

FIGURA 27

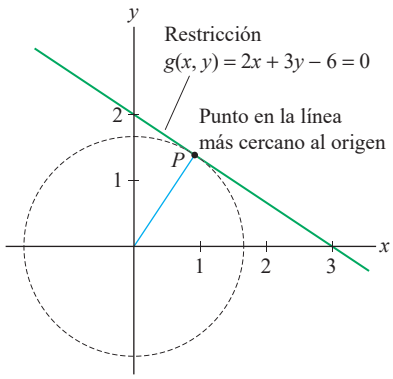


FIGURA 1 Mínimo de

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sobre la recta $2x + 3y = 6$.

15.8 Multiplicadores de Lagrange: optimización con restricciones

Algunos problemas de optimización involucran hallar los extremos de una función $f(x,y)$ sujeta a una restricción $g(x,y) = 0$. Suponga que se quiere hallar el punto sobre la recta $2x + 3y = 6$ que se encuentre más cercano al origen (f gura 1). La distancia de (x,y) al origen es $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que el problema se reduce a minimizar:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{sujeta a} \quad g(x,y) = 2x + 3y - 6 = 0$$

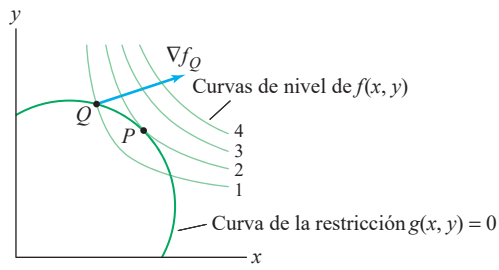
No se trata de encontrar el valor mínimo de $f(x,y)$ (que es 0), sino de encontrar el mínimo entre todos los puntos (x,y) que se encuentran sobre la recta.

El método de los **multiplicadores de Lagrange** es un procedimiento general para resolver problemas de optimización con una restricción. He aquí una descripción de la idea principal.

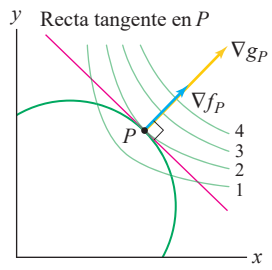
UN APUNTE GRÁFICO Imagine que se encuentra en el punto Q de la f gura 2(A). Quiere aumentar el valor de f pero continuando sobre la curva de la restricción. El vector gradiente ∇f_Q apunta en la dirección de *máximo* crecimiento, pero no nos podemos desplazar en la dirección del gradiente porque esto provocaría que nos saliéramos de la curva de la restricción. Sin embargo, el gradiente apunta hacia la derecha, por lo que se puede aumentar f en algo, moviéndonos hacia la derecha sobre la curva de la restricción.

Continúe con el movimiento hacia la derecha hasta llegar al punto P, en el que ∇f_P es ortogonal a la curva de la restricción [f gura 2(B)]. Cuando ha llegado a P, no se puede aumentar más f ni moviéndose hacia la derecha, ni hacia la izquierda sobre la curva de la restricción. Por tanto $f(P)$ es un máximo local sujeto a la restricción.

Ahora, el vector ∇g_P es también ortogonal a la curva de la restricción, por lo que ∇f_P y ∇g_P deben apuntar en el mismo sentido, o bien en sentido opuesto. Dicho de otro modo, $\nabla f_P = \lambda \nabla g_P$ para algún escalar λ (llamado un **multiplicador de Lagrange**). Gráf camente esto signif ca que un máximo local sujeto a la restricción ocurre en aquellos puntos P en los que las curvas de nivel de f y de g son tangentes.



(A) f aumenta cuando nos desplazamos hacia la derecha sobre la curva de la restricción.



(B) El máximo local de f sobre la curva de la restricción ocurre cuando ∇f_P y ∇g_P son paralelos.

FIGURA 2

TEOREMA 1 Multiplicadores de Lagrange Suponga que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones diferenciables. Si $f(x,y)$ tiene un mínimo o máximo local sobre la curva de la restricción $g(x,y) = 0$ en $P = (a,b)$ y si $\nabla g_P \neq \mathbf{0}$, entonces existe un escalar λ tal que:

$$\nabla f_P = \lambda \nabla g_P \qquad (1)$$

En el teorema 1, la hipótesis $\nabla g_P \neq \mathbf{0}$ garantiza (por el teorema de la función implícita, de cálculo avanzado) que se puede parametrizar la curva $g(x,y) = 0$ cerca de P por una trayectoria $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{c}(0) = P$ y $\mathbf{c}'(0) \neq \mathbf{0}$.

Demostración Sea $\mathbf{c}(t)$ una parametrización de la curva de la restricción $g(x,y) = 0$ cerca de P, escogida de manera que $\mathbf{c}(0) = P$ y $\mathbf{c}'(0) \neq \mathbf{0}$. Entonces $f(\mathbf{c}(0)) = f(P)$ y, por hipótesis, $f(\mathbf{c}(t))$ tiene un mínimo o máximo local en $t = 0$. Por tanto, $t = 0$ es un punto crítico de $f(\mathbf{c}(t))$ y se cumple:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0}}_{\text{Regla de la cadena}} = \nabla f_P \cdot \mathbf{c}'(0) = 0$$

Esto prueba que ∇f_P es ortogonal al vector tangente $\mathbf{c}'(0)$ a la curva $g(x,y) = 0$. El gradiente ∇g_P también es ortogonal a $\mathbf{c}'(0)$ (pues ∇g_P es ortogonal a la curva de nivel $g(x,y) = 0$ en P). La conclusión es que ∇f_P y ∇g_P son paralelos y, por tanto, ∇f_P es un múltiplo de ∇g_P como se quería demostrar. ■

Nos referiremos a la ec. (1) como a la **condición de Lagrange**. Cuando se expresa esta condición en términos de las componentes, se obtienen las **ecuaciones de Lagrange**:

$$f_x(a,b) = \lambda g_x(a,b)$$
$$f_y(a,b) = \lambda g_y(a,b)$$

Un punto $P = (a,b)$ que cumpla estas condiciones se denomina un **punto crítico** para el problema de optimización con la restricción y $f(a,b)$ se denomina un **valor crítico**.

← RECORDATORIO La ec. (1) establece que si un máximo o mínimo local de $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$ se da en $P = (a,b)$, entonces:

$$\nabla f_P = \lambda \nabla g_P$$

siempre que $\nabla g_P \neq \mathbf{0}$.

■ **EJEMPLO 1** Halle los valores extremos de $f(x,y) = 2x + 5y$ sobre la elipse:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Solución

***Etapa 1.* Escriba las ecuaciones de Lagrange**

La curva de la restricción es $g(x,y) = 0$, donde $g(x,y) = (x/4)^2 + (y/3)^2 - 1$. Se tiene que:

$$\nabla f = \langle 2, 5 \rangle \qquad \nabla g = \left\langle \frac{x}{8}, \frac{2y}{9} \right\rangle$$

Las ecuaciones de Lagrange $\nabla f_P = \lambda \nabla g_P$ son:

$$\langle 2, 5 \rangle = \lambda \left\langle \frac{x}{8}, \frac{2y}{9} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{\lambda x}{8} \qquad 5 = \frac{\lambda(2y)}{9} \qquad \boxed{2}$$

***Etapa 2.* Aísle λ en términos de x y de y**

La ec. (2) proporciona dos ecuaciones para λ:

$$\lambda = \frac{16}{x} \qquad \lambda = \frac{45}{2y} \qquad \boxed{3}$$

Para justif car el dividir por x y por y, observe que x e y deben ser diferentes de cero, pues $x = 0$ o $y = 0$ violaría la ec. (2).

***Etapa 3.* Resuelva x e y usando la restricción**

Las dos expresiones para λ deben ser iguales, por lo que se obtiene $\dfrac{16}{x} = \dfrac{45}{2y}$ o $y = \dfrac{45}{32}x$. Ahora, sustituya en la ecuación de la restricción y resuelva x:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{\frac{45}{32}x}{3}\right)^2 = 1$$
$$x^2\left(\frac{1}{16} + \frac{225}{1024}\right) = x^2\left(\frac{289}{1024}\right) = 1$$

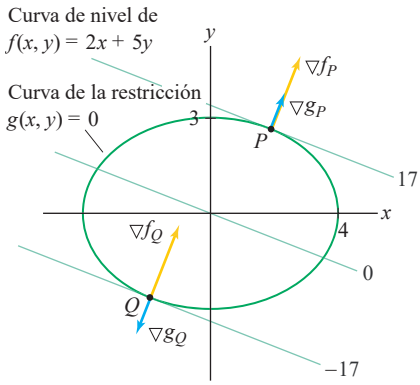


FIGURA 3 El mínimo y el máximo se presentan cuando la curva de nivel de f es tangente a la curva de la restricción

$$g(x,y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 1 = 0.$$

FIGURA 4 El economista Paul Douglas, trabajando con el matemático Charles Cobb, obtuvo las funciones de producción $P(x,y) = Cx^a y^b$ mediante ajuste de datos recogidos sobre las relaciones entre mano de obra, capital y producción en un entorno industrial. Douglas fue profesor de la Universidad de Chicago y también senador de EE.UU. por Illinois de 1949 a 1967.

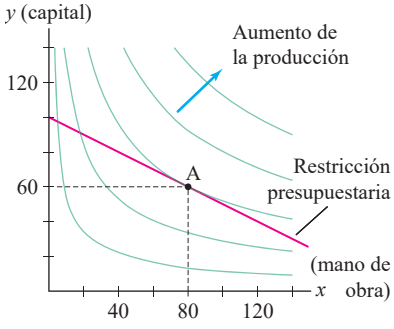


FIGURA 5 Gráf co de contorno de la función de producción de Cobb-Douglas $P(x,y) = 50x^{0,4}y^{0,6}$. Las curvas de nivel de una función de producción se denominan *isocuantas*.

Por tanto $x = \pm\sqrt{\frac{1024}{289}} = \pm\frac{32}{17}$ y como $y = \frac{45x}{32}$, los puntos críticos son $P = (\frac{32}{17}, \frac{45}{17})$ y $Q = (-\frac{32}{17}, -\frac{45}{17})$.

Etapa 4. **Calcule los valores críticos**

$$f(P) = f\left(\frac{32}{17}, \frac{45}{17}\right) = 2\left(\frac{32}{17}\right) + 5\left(\frac{45}{17}\right) = 17$$

y $f(Q) = -17$. La conclusión es que el máximo de $f(x,y)$ sobre la elipse es 17 y el mínimo es −17 (f gura 3). ■

Las hipótesis son importantes Según el teorema 3 de la sección 15.7, una función continua sobre un dominio cerrado y acotado alcanza sus valores extremos. Así, si la curva de la restricción es *acotada* (como en el ejemplo previo, en que la curva de la restricción es una elipse), entonces toda función continua $f(x,y)$ alcanza un máximo y un mínimo sujeta a la restricción. Sin embargo, tenga presente que los valores extremos no tienen por qué existir si la curva de la restricción no es acotada. Por ejemplo, la restricción $x - y = 0$ es una recta no acotada. La función $f(x,y) = x$ no tiene ni máximo ni mínimo sujeta a $x - y = 0$ pues $P = (a,a)$ cumple la restricción, pero $f(a,a) = a$ puede ser arbitrariamente grande o pequeño.

■ **EJEMPLO 2 Función de producción de Cobb-Douglas** Invirtiendo x unidades de mano de obra e y unidades de capital, un fabricante de relojes de gama baja puede producir $P(x,y) = 50x^{0,4}y^{0,6}$ relojes. (Vea la f gura 4.) Encuentre el máximo número de relojes que se pueden producir con un presupuesto de 20 000 $ si la mano de obra cuesta 100 $ por unidad y capital cuesta 200 $ por unidad.

Solución El coste total de x unidades de mano de obra e y unidades de capital es $100x + 200y$. El objetivo es maximizar $P(x,y) = 50x^{0,4}y^{0,6}$ sujeta a la siguiente restricción presupuestaría (f gura 5):

$$g(x,y) = 100x + 200y - 20\ 000 = 0 \qquad \boxed{4}$$

Etapa 1. **Escriba las ecuaciones de Lagrange**

$$P_x(x,y) = \lambda g_x(x,y): \quad 20x^{-0,6}y^{0,6} = 100\lambda$$
$$P_y(x,y) = \lambda g_y(x,y): \quad 30x^{0,4}y^{-0,4} = 200\lambda$$

Etapa 2. **Aísle λ en términos de x y de y**

Estas dos ecuaciones dan lugar a dos ecuaciones para λ que deben ser iguales:

$$\lambda = \frac{1}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^{0,6} = \frac{3}{20}\left(\frac{y}{x}\right)^{-0,4} \qquad \boxed{5}$$

Etapa 3. **Resuelva x e y usando la restricción**

Multiplique la ec. (5) por $5(y/x)^{0,4}$ obteniendo $y/x = 15/20$ o $y = \frac{3}{4}x$. A continuación, sustituya en la ec. (4):

$$100x + 200y = 100x + 200\left(\frac{3}{4}x\right) = 20\ 000 \quad \Rightarrow \quad 250x = 20\ 000$$

Se obtiene que $x = \frac{20\ 000}{250} = 80$ e $y = \frac{3}{4}x = 60$. El punto crítico es $A = (80, 60)$.

Etapa 4. **Calcule los valores críticos**

Como $P(x,y)$ es una función creciente de x e y, ∇P apunta hacia el noreste y $P(x,y)$ alcanza su valor máximo en A (f gura 5). El máximo es $P(80,60) = 50(80)^{0,4}(60)^{0,6} =$ $= 3365{,}87$ o aproximadamente 3365 relojes, con un coste por reloj de $\frac{20\ 000}{3365}$ o aproximadamente 5,94 $. ■

UN APUNTE GRÁFICO En problemas de optimización con restricciones, el valor máximo global es la altura correspondiente al punto más alto sobre la superf cie $z = f(x,y)$ (punto Q de la f gura 6). Cuando se proporciona una restricción, centramos nuestra atención sobre la curva de la superf cie que se encuentra por encima de la curva de la restricción $g(x,y) = 0$. El valor máximo, sujeto a la restricción, es la altura del punto más alto sobre esta curva. La f gura 6(B) muestra el problema de optimización del ejemplo 1 resuelto.

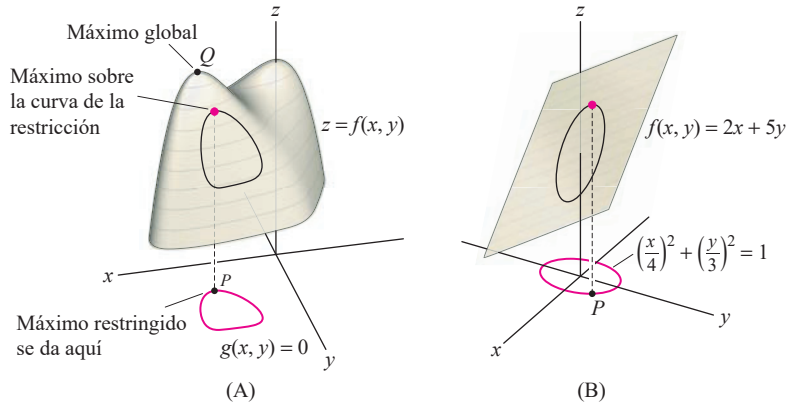


FIGURA 6

El método de los multiplicadores de Lagrange es válido para cualquier número de variables. En el siguiente ejemplo, se considera un problema en tres variables.

EJEMPLO 3 Multiplicadores de Lagrange en tres variables Halle el punto sobre el plano $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$ más cercano al origen en $\mathbb{R}^3$.

Solución El objetivo es minimizar la distancia $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sujeta a la restricción $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$. Pero hallar la distancia mínima d es lo mismo que minimizar el cuadrado de la distancia d^2, por lo que el problema se puede enunciar como:

$$\text{Minimizar } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{sujeta a} \quad g(x,y,z) = \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - 1 = 0$$

La condición de Lagrange es:

$$\underbrace{\langle 2x, 2y, 2z \rangle}_{\nabla f} = \lambda \underbrace{\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\rangle}_{\nabla g}$$

Esto da lugar a:

$$\lambda = 4x = 8y = 8z \quad \Rightarrow \quad z = y = \frac{x}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la restricción, se obtiene:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = \frac{2z}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z}{4} = \frac{3z}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2}{3}$$

Por tanto, $x = 2z = \frac{4}{3}$ e $y = z = \frac{2}{3}$. Este punto crítico debe corresponder al mínimo de f (pues f no tiene máximo sobre el plano de la restricción). Por tanto, el punto más cercano al origen sobre el plano es $P = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (f gura 7). ■

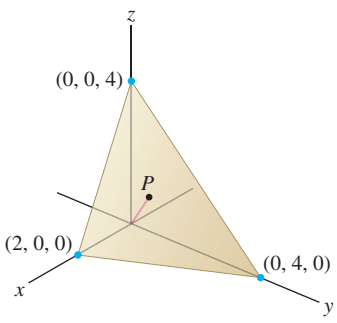


FIGURA 7 Punto P sobre el plano más cercano al origen.

El método de Lagrange se puede utilizar cuando hay más de una ecuación de restricción, pero se debe añadir otro multiplicador por cada restricción adicional. Por ejemplo, si el problema consiste en minimizar $f(x,y,z)$ sujeta a las restricciones $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$, entonces la condición de Lagrange es

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

La intersección de una esfera con un plano que pasa por su centro se denomina ***círculo máximo****.*

EJEMPLO 4 Multiplicadores de Lagrange con varias restricciones La intersección del plano $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 0$ con la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es un gran círculo o círculo máximo (figura 8). Halle el punto sobre este círculo máximo con coordenada x máxima.

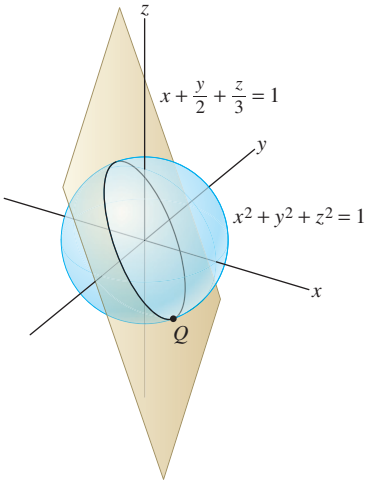


FIGURA 8 El plano interseca la esfera en un círculo máximo. Q es el punto de mayor coordenada x sobre este gran círculo.

Solución El objetivo es maximizar la función $f(x,y,z) = x$ sujeta a las dos ecuaciones de restricción:

$$g(x,y,z) = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 0 \qquad h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

La condición de Lagrange es:

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$
$$\langle 1,0,0 \rangle = \lambda \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle + \mu \langle 2x, 2y, 2z \rangle$$

Observe que μ no puede ser cero. La condición de Lagrange sería entonces $\langle 1,0,0 \rangle = = \lambda \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \rangle$ y esta ecuación no se verif caría para ningún valor de λ. Así, la condición de Lagrange proporciona tres ecuaciones:

$$\lambda + 2\mu x = 1 \qquad \frac{1}{2}\lambda + 2\mu y = 0 \qquad \frac{1}{3}\lambda + 2\mu z = 0$$

Las dos últimas ecuaciones dan lugar a $\lambda = -4\mu y$ y $\lambda = -6\mu z$. Como $\mu \neq 0$, se tiene:

$$-4\mu y = -6\mu z \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{3}{2}z}$$

Ahora utilice esta relación en la primera ecuación de restricción:

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}z\right) + \frac{1}{3}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{13}{12}z}$$

Por último, se puede sustituir en la segunda ecuación de la restricción:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = \left(-\frac{13}{12}z\right)^2 + \left(\frac{3}{2}z\right)^2 + z^2 - 1 = 0$$

para obtener que $\frac{637}{144}z^2 = 1$ o $z = \pm\frac{12}{7\sqrt{13}}$. Como $x = -\frac{13}{12}z$ e $y = \frac{3}{2}z$, los puntos críticos son:

$$P = \left(-\frac{\sqrt{13}}{7}, \frac{18}{7\sqrt{13}}, \frac{12}{7\sqrt{13}}\right) \qquad Q = \left(\frac{\sqrt{13}}{7}, -\frac{18}{7\sqrt{13}}, -\frac{12}{7\sqrt{13}}\right)$$

El punto crítico con mayor coordenada x (el valor máximo de $f(x,y,z)$) es Q, de coordenada x $\frac{\sqrt{13}}{7} \approx 0{,}515$. ■

15.8 RESUMEN

• *Método de los multiplicadores de Lagrange*: los valores extremos locales de $f(x,y)$ sujetos a la restricción $g(x,y) = 0$ se presentan en los puntos P (llamados puntos críticos), que cumplen la condición de Lagrange $\nabla f_P = \lambda \nabla g_P$. Esta condición es equivalente a las *ecuaciones de Lagrange*:

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \qquad f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y)$$

• Si la curva de la restricción $g(x,y) = 0$ es acotada [por ejemplo, si $g(x,y) = 0$ es una circunferencia o una elipse], entonces los valores mínimo y máximo de f sujetos a la restricción existen.

• La condición de Lagrange para una función de tres variables $f(x,y,z)$ sujeta a las restricciones $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$ es:

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

15.8 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Suponga que el máximo de $f(x,y)$ sujeto a la restricción $g(x,y) = 0$ se da en un punto $P = (a,b)$ tal que $\nabla f_P \neq 0$. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones es cierta?

(a) ∇f_P es tangente a $g(x,y) = 0$ en P.

(b) ∇f_P es ortogonal a $g(x,y) = 0$ en P.

2. La f gura 9 muestra una restricción $g(x,y) = 0$ y la curva de nivel de una función f. En cada caso, determine si f tiene un mínimo local, un máximo local o ninguna de las dos cosas en el punto que se ha etiquetado.

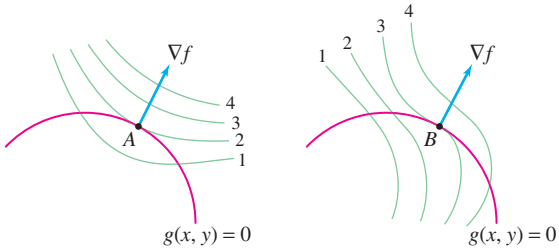
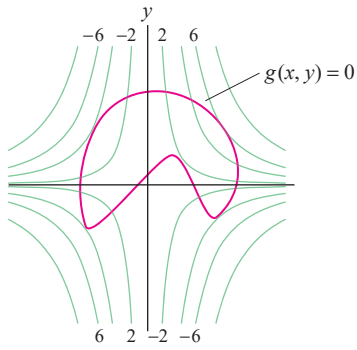


FIGURA 9

3. Sobre el mapa de contorno de la f gura 10:

(a) Identif que los puntos en que $\nabla f = \lambda \nabla g$ para algún escalar λ.

(b) Identif que los valores máximo y mínimo de $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y) = 0$.



Mapa de contorno de $f(x, y)$
(intervalo de contorno 2)

FIGURA 10 Mapa de contorno de $f(x,y)$; intervalo de contorno 2.

Problemas

En los siguientes problemas, utilice el método de los multiplicadores de Lagrange si no se indica lo contrario.

1. Halle los valores extremos de la función $f(x,y) = 2x + 4y$ sujeta a la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$.

(a) Pruebe que la ecuación de Lagrange $\nabla f = \lambda \nabla g$ da lugar a $\lambda x = 1$ y $\lambda y = 2$.

(b) Pruebe que estas ecuaciones implican que $\lambda \neq 0$ e $y = 2x$.

(c) Use la ecuación de la restricción para determinar los posibles puntos críticos (x,y).

(d) Evalúe $f(x,y)$ en los puntos críticos y determine los valores mínimo y máximo.

2. Halle los valores extremos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ sujeta a la restricción $g(x,y) = 4x - 6y = 25$.

(a) Pruebe que la ecuación de Lagrange da lugar a $2x = 4\lambda$, $4y = -6\lambda$.

(b) Pruebe que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces las ecuaciones de Lagrange conducen a $x = y = 0$. Como $(0,0)$ no cumple la restricción, puede suponer que x e y sean diferentes de cero.

(c) Use las ecuaciones de Lagrange para probar que $y = -\frac{3}{4}x$.

(d) Sustituya en la ecuación de la restricción para mostrar que existe un único punto crítico P.

(e) ¿Corresponde P a un valor máximo o a uno mínimo de f? Haga referencia a la f gura 11 para justif car su respuesta. *Indicación:* los valores de $f(x, y)$ aumentan o disminuyen cuando (x, y) se aleja de P sobre la recta $g(x, y) = 0$.

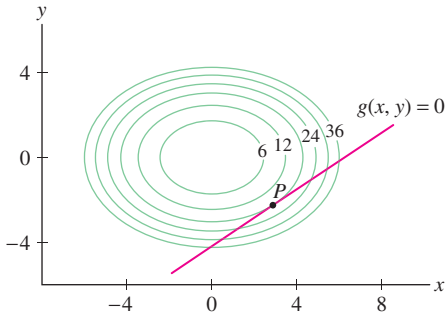


FIGURA 11 Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ y gráf ca de la restricción $g(x, y) = 4x - 6y - 25 = 0$.

3. Aplique el método de los multiplicadores de Lagrange a la función $f(x, y) = (x^2 + 1)y$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 5$. *Indicación:* pruebe, en primer lugar, que $y \neq 0$; a continuación, considere los casos $x = 0$ y $x \neq 0$ por separado.

En los problemas 4-13, halle los valores mínimo y máximo de la función sujeta a la restricción dada.

4. $f(x, y) = 2x + 3y, \quad x^2 + y^2 = 4$

5. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad 2x + 3y = 6$

6. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2, \quad xy = 4$

7. $f(x, y) = xy, \quad 4x^2 + 9y^2 = 32$

8. $f(x, y) = x^2y + x + y, \quad xy = 4$

9. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x^4 + y^4 = 1$

10. $f(x, y) = x^2y^4, \quad x^2 + 2y^2 = 6$

11. $f(x, y, z) = 3x + 2y + 4z, \quad x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^2 - y - z, \quad x^2 - y^2 + z = 0$

13. $f(x, y, z) = xy + 3xz + 2yz, \quad 5x + 9y + z = 10$

14. Sean:

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 \qquad g(x, y) = x^3 - xy + y^3$$

(a) Pruebe que existe un único punto $P = (a, b)$ sobre $g(x, y) = 1$ en el que $\nabla f_P = \lambda \nabla g_P$, para algún escalar λ.

(b) Haga referencia a la f gura 12 para determinar si $f(P)$ es un máximo local, o un mínimo local, de f sujeto a la restricción.

(c) ¿Sugiere la f gura 12 que $f(P)$ es un extremo global sujeto a la restricción?

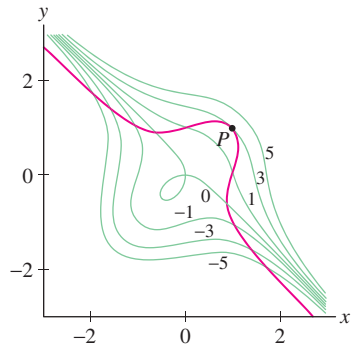


FIGURA 12 Mapa de contorno de $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$ y gráf ca de la restricción $g(x, y) = x^3 - xy + y^3 = 1$.

15. Halle el punto (a, b) sobre la gráf ca de $y = e^x$ en el que el valor ab sea lo más pequeño posible.

16. Halle la caja rectangular de volumen máximo si la suma de las longitudes de sus bordes es igual a 300 cm.

17. El área de un cono circular de radio r y altura h es $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, y su volumen es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

(a) Determine el cociente h/r para el cono de área dada S y máximo volumen V.

(b) ¿A qué es igual el cociente h/r para un cono de volumen dado V y área mínima S?

(c) ¿Existe un cono de volumen dado V y área máxima?

18. En el ejemplo 1, se halló el máximo de $f(x, y) = 2x + 5y$ sobre la elipse $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$. Resuelva nuevamente este problema pero utilizando ahora multiplicadores de Lagrange. En primer lugar, muestre que la elipse se puede parametrizar mediante $x = 4\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$. A continuación, halle el valor máximo de $f(4\cos t, 3\,\text{sen}\,t)$ usando cálculo en una variable. ¿Es más fácil un método que el otro?

19. Halle el punto sobre la elipse:

$$x^2 + 6y^2 + 3xy = 40$$

con mayor coordenada x (f gura 13).

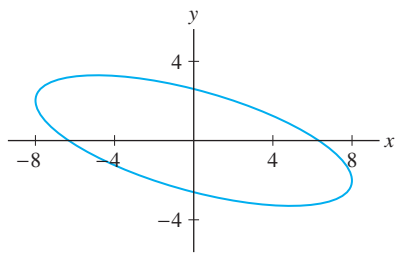


FIGURA 13 Gráf ca de $x^2 + 6y^2 + 3xy = 40$.

20. Halle el área máxima de un rectángulo inscrito en la elipse (f gura 14):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

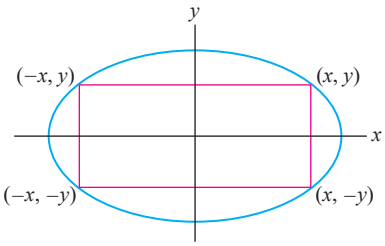


FIGURA 14 Rectángulo inscrito en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

21. Halle el punto (x_0, y_0) sobre la recta $4x + 9y = 12$ que está más cercano al origen.

22. Pruebe que las coordenadas del punto (x_0, y_0) más cercano al origen y sobre $ax + by = c$ son:

$$x_0 = \frac{ac}{a^2 + b^2} \qquad y_0 = \frac{bc}{a^2 + b^2}$$

23. Halle el valor máximo de $f(x, y) = x^a y^b$ para $x \geq 0, y \geq 0$ sobre la recta $x + y = 1$, donde $a, b > 0$ son constantes.

24. Pruebe que el valor máximo de $f(x, y) = x^2 y^3$ sobre la circunferencia unitaria es $\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

25. Halle el valor máximo de $f(x, y) = x^a y^b$ para $x \geq 0, y \geq 0$ sobre la circunferencia unitaria, donde $a, b > 0$ sean constantes.

26. Halle el valor máximo de $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ para $x, y, z \geq 0$ sobre la esfera unitaria, donde $a, b, c > 0$ sean constantes.

27. Pruebe que la distancia mínima del origen a un punto sobre el plano $ax + by + cz = d$ es:

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}}$$

28. Antonio tiene 5,00 $ para gastar en una comida formada por hamburguesas (1,50 $ cada una) y patatas fritas (1,00 $ por paquete). El nivel de satisfacción de Antonio al comer x_1 hamburguesas y x_2 paquetes de patatas fritas queda medido por la función $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. ¿Qué cantidad de comida de cada tipo debe comprar para maximizar su nivel de satisfacción? (Suponga que se pueden comprar cantidades fraccionarias de cada tipo de comida.)

29. Sea Q el punto sobre una elipse que esté más cercano a un punto dado P, fuera de la elipse. El matemático griego Apolonio (siglo tercero A.C.) ya sabía que $\overline{PQ}$ es perpendicular a la tangente a la elipse en Q (figura 15). Explique, con sus palabras, por qué esta conclusión es una consecuencia del método de los multiplicadores de Lagrange. *Indicación:* las circunferencias centradas en P son curvas de nivel de la función a minimizar.

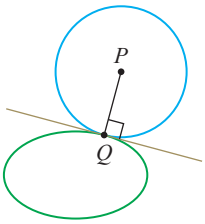


FIGURA 15

30. En una competición, un corredor que parte de A tiene que llegar a un punto P a lo largo de un río y después a B, en el menor tiempo posible (figura 16). El corredor debe elegir el punto P que minimice la longitud total del camino a seguir.

(a) Defina una función:

$$f(x, y) = AP + PB, \quad \text{donde } P = (x, y)$$

Reformule el problema del corredor como un problema de optimización con restricciones, suponiendo que el río viene dado por la ecuación $g(x, y) = 0$.

(b) Explique por qué las curvas de nivel de $f(x, y)$ son elipses.

(c) Use multiplicadores de Lagrange para justificar la siguiente afirmación: la elipse que pasa por el punto P que minimiza la longitud del camino a seguir es tangente al río.

(d) Identifique el punto del río en la figura 16 para el que la longitud sea mínima.

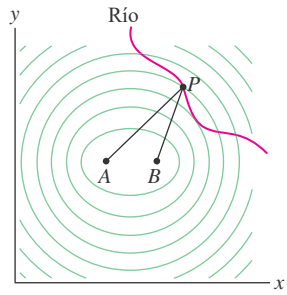


FIGURA 16

En los problemas 31 y 32, sea V el volumen de una lata de radio r y altura h, y sea S su área (incluyendo la base y la tapa).

31. Halle r y h que minimicen S sujeta a la restricción $V = 54\pi$.

32. Pruebe que para los dos problemas siguientes, $P = (r, h)$ es un punto crítico de Lagrange si $h = 2r$:

- Minimice el área S para un volumen fijo V.
- Maximice el volumen V para un área fija S.

A continuación use los mapas de contorno de la figura 17 para explicar por qué S tiene un mínimo para un volumen fijado V pero no tiene máximo y, de forma similar, V tiene un máximo para S fijada pero no tiene mínimo.

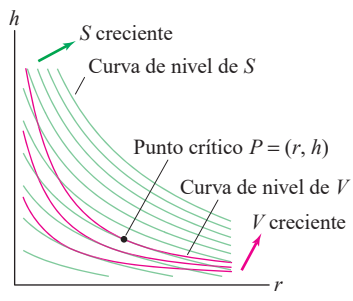


FIGURA 17

33. Un plano de ecuación $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a,b,c>0)$ junto con los planos de coordenadas positivos forman un tetraedro de volumen $V=\frac{1}{6}abc$ (f gura 18). Halle el valor mínimo de V entre todos los planos que pasan por $P=(1,1,1)$.

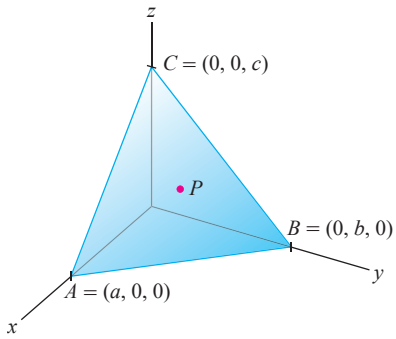


FIGURA 18

34. En la misma situación que en el problema anterior, halle el plano que minimiza V con la restricción que el plano debe pasar por $P=(\alpha,\beta,\gamma)$ siendo $\alpha,\beta,\gamma>0$.

35. Pruebe que las ecuaciones de Lagrange para $f(x,y)=x+y$ sujeta a la restricción $g(x,y)=x+2y=0$ no tienen solución. ¿Qué puede deducir sobre el valor mínimo y máximo de f sujetos a $g=0$? Justif que directamente su respuesta.

36. Pruebe que las ecuaciones de Lagrange para $f(x,y)=2x+y$ sujeta a la restricción $g(x,y)=x^2-y^2=1$ tienen solución, pero que f no tiene ni máximo ni mínimo sobre la curva de la restricción. ¿Contradice este resultado el teorema 1?

37. Sea L la longitud mínima de una escalera para situarse por encima de una valla de altura h y apoyada en una pared, donde la valla se encuentra a una distancia b de la pared.

(a) Use multiplicadores de Lagrange para probar que $L=(h^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ (f gura 19). *Indicación:* pruebe que el problema consiste en minimizar $f(x,y)=(x+b)^2+(y+h)^2$ sujeta a $y/b=h/x$ o $xy=bh$.

(b) Pruebe que el valor de L es también igual al radio de la circunferencia de centro $(-b,-h)$ que es tangente a la gráf ca de $xy=bh$.

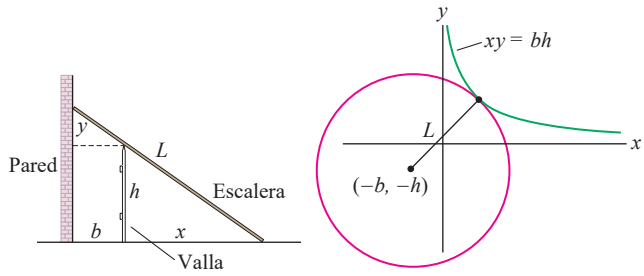


FIGURA 19

38. Halle el valor máximo de $f(x,y,z)=xy+xz+yz-xyz$ sujeta a la restricción $x+y+z=1$, para $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

39. Halle el punto de mayor coordenada z que se encuentra en la intersección del plano $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z=0$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

40. Halle el máximo de $f(x,y,z)=x+y+z$ sujeta a las dos restricciones $x^2+y^2+z^2=9$ y $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2+4z^2=9$.

41. El cilindro $x^2+y^2=1$ interseca con el plano $x+z=1$ formando una elipse. Halle el punto sobre esta elipse que esté más lejos del origen.

42. Halle el mínimo y el máximo de $f(x,y,z)=y+2z$ sujeta a las dos restricciones, $2x+z=4$ y $x^2+y^2=1$.

43. Halle el valor mínimo de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a las dos restricciones, $x+2y+z=3$ y $x-y=4$.

Problemas avanzados

44. Suponga que tanto $f(x,y)$ como la función de restricción $g(x,y)$ son lineales. Use mapas de contorno para explicar por qué $f(x,y)$ no tiene un máximo sujeto a $g(x,y)=0$, salvo si $g=af+b$ para algunas constantes a,b.

45. Las hipótesis son importantes Considere el problema de minimizar $f(x,y)=x$ sujeta a $g(x,y)=(x-1)^3-y^2=0$.

(a) Pruebe, sin utilizar ningún argumento de cálculo diferencial, que el mínimo tiene lugar en $P=(1,0)$.

(b) Pruebe que la condición de Lagrange $\nabla f_P=\lambda\nabla g_P$ no se cumple para ningún valor de λ.

(c) ¿Contradice su resultado el teorema 1?

46. Utilidad marginal Dos bienes 1 y 2 están disponibles al precio de p_1 dólares, por unidad del bien 1, y de p_2 dólares, por unidad del bien 2. Una función de utilidad $U(x_1,x_2)$ es una función que representa la **utilidad** o benef cio de consumir x_j unidades del bien j. La **utilidad marginal** del bien j-ésimo es $\partial U/\partial x_j$, la tasa de incremento en la utilidad por unidad de incremento en el bien j-ésimo. Demuestre la siguiente ley de economía: para un presupuesto de L dólares, la maximización de la utilidad para un nivel de consumo (a,b) ocurre cuando el cociente de las utilidades marginales es igual al cociente de los precios:

$$\frac{\text{Utilidad marginal del bien 1}}{\text{Utilidad marginal del bien 2}}=\frac{U_{x_1}(a,b)}{U_{x_2}(a,b)}=\frac{p_1}{p_2}$$

47. Considere la función de utilidad $U(x_1,x_2)=x_1x_2$ con la restricción presupuestaria $p_1x_1+p_2x_2=c$.

(a) Pruebe que el máximo de $U(x_1,x_2)$ sujeto a la restricción presupuestaria es igual a $c^2/(4p_1p_2)$.

(b) Calcule el valor del multiplicador de Lagrange λ del apartado (a).

(c) Demuestre la siguiente interpretación: λ es la tasa de incremento de la utilidad por incremento unitario en el presupuesto total c.

48. En este problema se muestra que el multiplicador de Lagrange λ se puede interpretar como una tasa de cambio en general. Suponga que el máximo de $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y)=c$ se da en un punto P. Entonces P depende del valor de c, por lo que se puede expresar $P=(x(c),y(c))$ y se tiene que $g(x(c),y(c))=c$.

(a) Pruebe que:

$$\nabla g(x(c),y(c))\cdot\langle x'(c),y'(c)\rangle=1$$

Indicación: derive la ecuación $g(x(c),y(c)) = c$ respecto a c usando la regla de la cadena.

(b) Use la regla de la cadena y la condición de Lagrange $\nabla f_P = \lambda \nabla g_P$ para probar que:

$$\frac{d}{dc} f(x(c),y(c)) = \lambda$$

(c) Deduzca que λ es la tasa de incremento en f por unidad de incremento en el "nivel de presupuesto" c.

49. Sea $B > 0$. Pruebe que el máximo de:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

sujeta a las restricciones $x_1 + \cdots + x_n = B$ y $x_j \geq 0$ para $j = 1,\ldots,n$, se da en $x_1 = \cdots = x_n = B/n$. Use este resultado para deducir que:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

para cualesquiera números positivos $a_1,\ldots,a_n$.

50. Sea $B > 0$. Pruebe que el máximo de $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ sujeta a $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = B^2$ es $\sqrt{n}B$. Concluya que:

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leq \sqrt{n}(a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{1/2}$$

para cualesquiera números $a_1,\ldots,a_n$.

51. Dadas las constantes E, E_1, E_2, E_3, considere el máximo de

$$S(x_1,x_2,x_3) = x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 + x_3 \ln x_3$$

sujeta a las dos restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = N, \qquad E_1 x_1 + E_2 x_2 + E_3 x_3 = E$$

Pruebe que existe una constante μ tal que $x_i = A^{-1} e^{\mu E_i}$ para $i = 1,2,3$, donde $A = N^{-1}(e^{\mu E_1} + e^{\mu E_2} + e^{\mu E_3})$.

52. Distribución de Boltzmann Generalice el problema 51 a n variables: pruebe que existe una constante μ tal que el máximo de

$$S = x_1 \ln x_1 + \cdots + x_n \ln x_n$$

sujeta a las restricciones:

$$x_1 + \cdots + x_n = N, \qquad E_1 x_1 + \cdots + E_n x_n = E$$

ocurre en $x_i = A^{-1} e^{\mu E_i}$, donde:

$$A = N^{-1}(e^{\mu E_1} + \cdots + e^{\mu E_n})$$

Este resultado está en el centro de la mecánica estadística. Se utiliza para determinar la distribución de velocidades de moléculas de gas a la temperatura T; x_i es el número de moléculas de energía cinética E_i; $\mu = -(kT)^{-1}$, donde k es la constante de Boltzmann. La cantidad S se denomina la **entropía**.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Dada $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x+3}$:

(a) Dibuje el dominio de f.

(b) Calcule $f(3,1)$ y $f(-5,-3)$.

(c) Halle un punto que cumpla $f(x,y) = 1$.

2. Halle el dominio y rango de:

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x-y} + \sqrt{y-z}$

(b) $f(x,y) = \ln(4x^2 - y)$

3. Dibuje la gráf ca de $f(x,y) = x^2 - y + 1$ y describa sus trazas verticales y horizontales.

4. SAC Use un programa de representación gráf ca para dibujar la gráf ca de la función $\cos(x^2+y^2)e^{1-xy}$ en los dominios $[-1,1]\times[-1,1]$, $[-2,2]\times[-2,2]$ y $[-3,3]\times[-3,3]$ y explique su comportamiento.

5. Relacione las funciones (a)-(d) con sus gráf cas en la f gura 1.

(a) $f(x,y) = x^2 + y$

(b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

(c) $f(x,y) = \text{sen}(4xy)e^{-x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = \text{sen}(4x)e^{-x^2-y^2}$

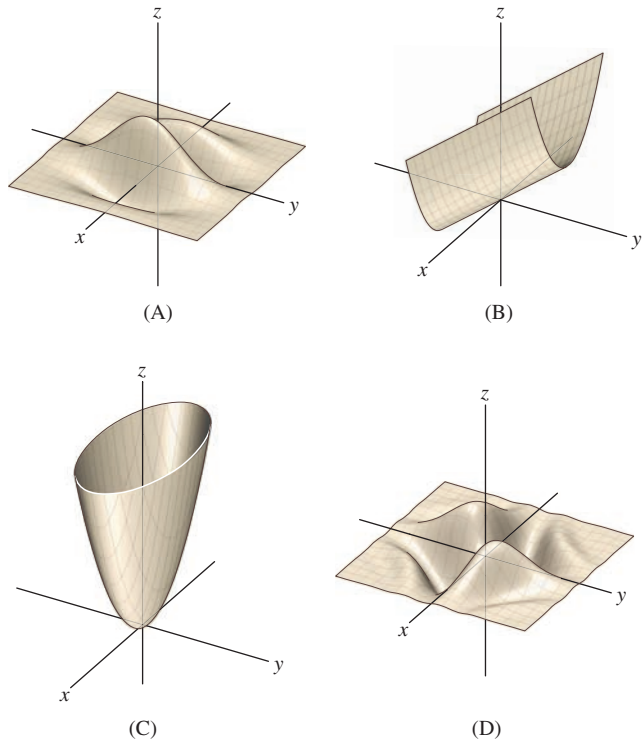


FIGURA 1

6. En referencia al mapa de contorno de la f gura 2:

(a) Estime la tasa media de cambio en la elevación de A a B y de A a D.

(b) Estime la derivada direccional en A en la dirección de $\mathbf{v}$.

(c) ¿Cuáles son los signos de f_x y f_y en D?

(d) ¿En cuál de los puntos etiquetados, tanto f_x como f_y son negativas?

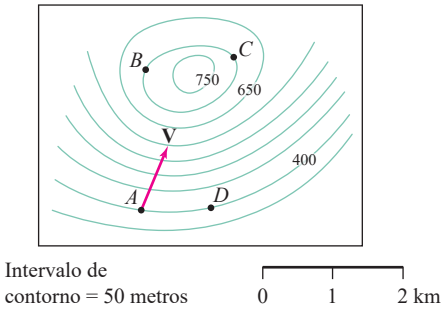


FIGURA 2

7. Describa las curvas de nivel de:

(a) $f(x,y) = e^{4x-y}$ **(b)** $f(x,y) = \ln(4x - y)$

(c) $f(x,y) = 3x^2 - 4y^2$ **(d)** $f(x,y) = x + y^2$

8. Relacione cada función (a)-(c) con su gráf ca de contorno (i)-(iii) de la f gura 3:

(a) $f(x,y) = xy$

(b) $f(x,y) = e^{xy}$

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

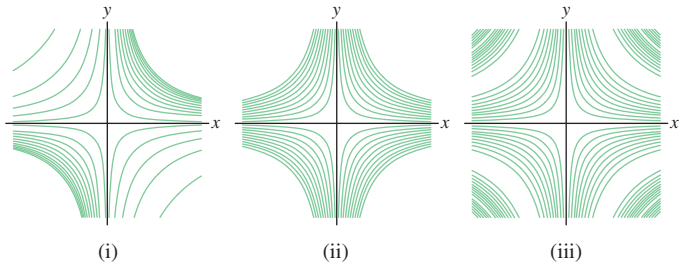


FIGURA 3

En los problemas 9-14, evalúe el límite o bien establezca que el límite no existe.

9. $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} (xy + y^2)$

10. $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} \ln(3x + y)$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy + xy^2}{x^2 + y^2}$

12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2 + x^2y^3}{x^4 + y^4}$

13. $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} (2x + y)e^{-x+y}$

14. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{(e^x - 1)(e^y - 1)}{x}$

15. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(xy)^p}{x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Use coordenadas polares para probar que $f(x,y)$ es continua en todo punto (x,y) si $p > 2$, pero es discontinua en $(0,0)$ si $p \leq 2$.

16. Calcule $f_x(1,3)$ y $f_y(1,3)$ para $f(x,y) = \sqrt{7x + y^2}$.

En los problemas 17-20, calcule f_x y f_y.

17. $f(x,y) = 2x + y^2$ **18.** $f(x,y) = 4xy^3$

19. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)e^{-x-y}$ **20.** $f(x,y) = \ln(x^2 + xy^2)$

21. Calcule f_{xxyz} para $f(x,y,z) = y\operatorname{sen}(x + z)$.

22. Sea $c > 0$. Pruebe que para cualesquiera constantes α, β, la función $u(t,x) = \operatorname{sen}(\alpha ct + \beta)\operatorname{sen}(\alpha x)$ cumple la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

23. Halle una ecuación del plano tangente a la gráf ca de $f(x,y) = xy^2 - xy + 3x^3y$ en $P = (1,3)$.

24. Suponga que $f(4,4) = 3$ y $f_x(4,4) = f_y(4,4) = -1$. Use la aproximación lineal para estimar $f(4{,}1, 4)$ y $f(3{,}88, 4{,}03)$.

25. Use una aproximación lineal de $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z}$ para estimar $\sqrt{7{,}1^2 + 4{,}9^2 + 69{,}5}$. Compare con el valor proporcionado por una calculadora.

26. El plano $z = 2x - y - 1$ es tangente a la gráf ca de $z = f(x,y)$ en $P = (5,3)$.

(a) Determine $f(5,3)$, $f_x(5,3)$ y $f_y(5,3)$.

(b) Aproxime $f(5{,}2, 2{,}9)$.

27. La f gura 4 muestra el mapa de contorno de una función $f(x,y)$ junto con una trayectoria $c(t)$ recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj. Los puntos $c(1)$, $c(2)$ y $c(3)$ se indican sobre la trayectoria. Sea $g(t) = f(c(t))$. ¿Cuáles de las af rmaciones (i)-(iv) son ciertas? Justif que su respuesta.

(i) $g'(1) > 0$.

(ii) $g(t)$ tiene un mínimo local para algún $1 \leq t \leq 2$.

(iii) $g'(2) = 0$. **(iv)** $g'(3) = 0$.

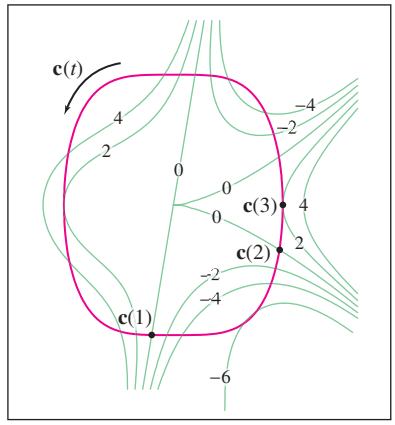


FIGURA 4

28. Jason gana $S(h,c) = 20h\left(1 + \frac{c}{100}\right)^{1,5}$ dólares al mes trabajando en una tienda de coches usados, donde h es el número de las horas trabajadas y c es el número de coches vendidos. Ya ha trabajado 160 horas y ha vendido 69 coches. Jason se quiere ir ya a casa, pero se pregunta cuánto dinero más podría ganar si se queda otros 10 minutos con un cliente que está considerando comprar un coche. Use la aproximación lineal para estimar cuánto dinero extra ganará Jason si vende su coche número 70 durante estos 10 minutos.

En los problemas 29-32, calcule $\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))$ *en el valor indicado de t.*

29. $f(x,y) = x + e^y$, $\mathbf{c}(t) = (3t-1, t^2)$ en $t = 2$

30. $f(x,y,z) = xz - y^2$, $\mathbf{c}(t) = (t, t^3, 1-t)$ en $t = -2$

31. $f(x,y) = xe^{3y} - ye^{3x}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, \ln t)$ en $t = 1$

32. $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, en $t = \frac{\pi}{3}$

En los problemas 33-36, calcule la derivada direccional en P en la dirección de **v**.

33. $f(x,y) = x^3y^4$, $P = (3,-1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

34. $f(x,y,z) = zx - xy^2$, $P = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = \langle 2,-1,2\rangle$

35. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{v} = \langle 3,-4\rangle$

36. $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy+z)$, $P = (0,0,0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. Halle el vector unitario **e** en $P = (0,0,1)$ que apunte en la dirección sobre la que $f(x,y,z) = xz + e^{-x^2+y}$ aumente más rápidamente.

38. Halle una ecuación del plano tangente en $P = (0,3,-1)$ a la superf cie de ecuación:

$$ze^x + e^{z+1} = xy + y - 3$$

39. Sea $n \neq 0$ un entero y r una constante arbitraria. Pruebe que la ecuación del plano tangente a la superf cie $x^n+y^n+z^n = r$ en $P = (a,b,c)$ es:

$$a^{n-1}x + b^{n-1}y + c^{n-1}z = r$$

40. Sea $f(x,y) = (x-y)e^x$. Use la regla de la cadena para calcular $\partial f/\partial u$ y $\partial f/\partial v$ (en términos de u y v), donde $x = u - v$ y $y = u + v$.

41. Sea $f(x,y,z) = x^2y + y^2z$. Use la regla de la cadena para calcular $\partial f/\partial s$ y $\partial f/\partial t$ (en términos de s y t), donde:

$$x = s + t, \quad y = st, \quad z = 2s - t$$

42. Sea P de coordenadas esféricas $(\rho,\theta,\phi) = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \phi}\Big|_P$ suponiendo que:

$$f_x(P) = 4, \quad f_y(P) = -3, \quad f_z(P) = 8$$

Recuerde que $x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, $z = \rho\cos\phi$.

43. Sea $g(u,v) = f(u^3 - v^3, v^3 - u^3)$. Demuestre que:

$$v^2\frac{\partial g}{\partial u} - u^2\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

44. Sea $f(x,y) = g(u)$, donde $u = x^2+y^2$ y $g(u)$ es derivable. Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 4u\left(\frac{dg}{du}\right)^2$$

45. Calcule $\partial z/\partial x$, donde $xe^z + ze^y = x + y$.

46. Sea $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 - 6y$.

(a) Halle los puntos críticos de f, y use el criterio de la segunda derivada para determinar si se trata de máximos o de mínimos locales.

(b) Halle el valor mínimo de f completando cuadrados y sin ningún argumento de cálculo diferencial.

En los problemas 47-50, halle los puntos críticos de la función y estúdielos usando el criterio de la segunda derivada.

47. $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2$

48. $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - xy$

49. $f(x,y) = e^{x+y} - xe^{2y}$

50. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) - \frac{1}{2}(x+y^2)$

51. Demuestre que $f(x,y) = (x+2y)e^{xy}$ no tiene puntos críticos.

52. Halle los extremos globales de $f(x,y) = x^3 - xy - y^2 + y$ sobre el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

53. Halle los extremos globales de $f(x,y) = 2xy - x - y$ sobre el dominio $\{y \le 4, y \ge x^2\}$.

54. Halle el máximo de $f(x,y,z) = xyz$ sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 2x + y + 4z = 1$.

55. Use multiplicadores de Lagrange para hallar el valor máximo y mínimo de $f(x,y) = 3x - 2y$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

56. Halle el valor mínimo de $f(x,y) = xy$ sujeta a la restricción $5x - y = 4$ de dos maneras: usando multiplicadores de Lagrange y sustituyendo $y = 5x - 4$ en $f(x,y)$.

57. Halle los valores máximo y mínimo de $f(x,y) = x^2y$ sobre la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

58. Halle el punto del primer cuadrante más cercano al origen que esté sobre la curva $y = x + x^{-1}$.

59. Halle los valores extremos de $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sujeta a las dos restricciones $x + y + z = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

60. Halle los valores máximo y mínimo de $f(x,y,z) = x - z$ sobre la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ (f gura 5).

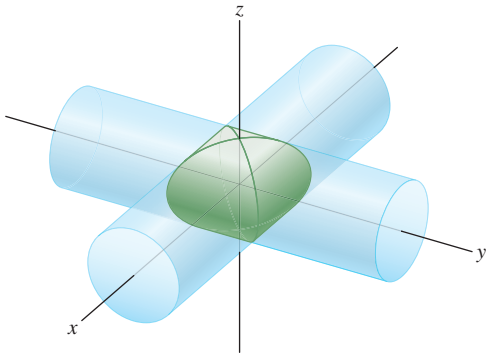


FIGURA 5

61. Use multiplicadores de Lagrange para hallar las dimensiones de una lata cilíndrica con base pero sin tapa, de volumen f jo V y que tenga mínima área.

62. Halle las dimensiones de la caja de máximo volumen con sus lados paralelos a los planos de coordenadas, que se pueda inscribir en el elipsoide de ecuación (f gura 6):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

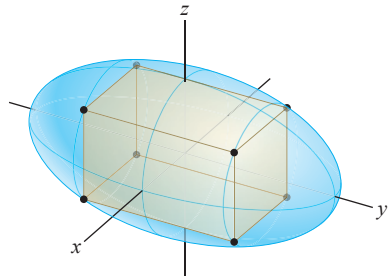


FIGURA 6

63. Dados n números $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ diferentes de cero, pruebe que el valor mínimo de:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2\sigma_1^2 + \cdots + x_n^2\sigma_n^2$$

sujeta a $x_1 + \cdots + x_n = 1$ es c, donde $c = \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{-2}\right)^{-1}$.

Estos arrozales ilustran cómo el volumen por debajo de un gráfico se calcula mediante la integración iterada.

16 INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

Las integrales de funciones de varias variables, llamadas **integrales múltiples**, son una extensión natural de las integrales en una variable que se estudiaron en la primera parte del texto. Se utilizan para calcular muchas de las cantidades que aparecen en aplicaciones, tales como volúmenes, áreas de superficies, centros de masa, probabilidades y valores esperados.

16.1 Integración en dos variables

La integral de una función de dos variables $f(x,y)$, llamada **integral doble**, se denota como:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$$

Representa el *volumen con signo* de la región sólida entre la gráfica de $f(x,y)$ y un dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy (figura 1), siendo positivo el volumen para regiones por encima del plano xy y negativo para regiones por debajo.

Hay muchas similaridades entre las integrales dobles y las simples:

- Las integrales dobles se definen como límites de sumas.
- Las integrales se evalúan utilizando el teorema fundamental del cálculo (pero se debe utilizar dos veces; vea la discusión sobre integrales iteradas más abajo).

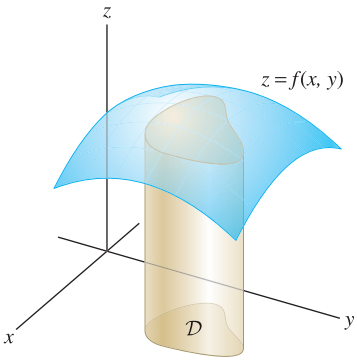


FIGURA 1 La integral doble calcula el volumen de la región entre la gráfica de $f(x,y)$ y el plano xy sobre un dominio $\mathcal{D}$.

Sin embargo, una diferencia importante es que el dominio de integración desempeña un papel prominente en el caso multivariante. Para una variable, el dominio de integración es simplemente el intervalo $[a,b]$. En dos variables, el dominio $\mathcal{D}$ es una región plana cuya frontera puede ser una región curvada (figura 1).

En esta sección, se considerará el caso más sencillo en que el dominio es un rectángulo, dejando los dominios más generales para la sección 16.2. Sea:

$$\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$$

un rectángulo en el plano (figura 2) formado por todos los puntos (x,y) tales que:

$$\mathcal{R}: \quad a \le x \le b \qquad c \le y \le d$$

Como ocurría con las integrales en una variable, las integrales dobles se definen vía un proceso de tres etapas: subdivisión, sumatorio y paso al límite. La figura 3 ilustra de qué manera se subdivide el rectángulo $\mathcal{R}$:

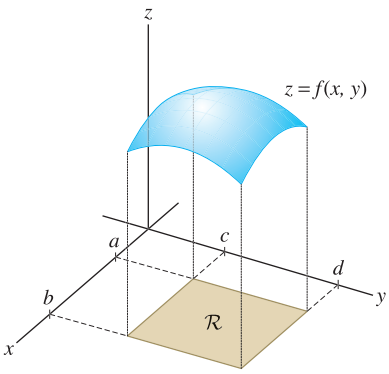


FIGURA 2

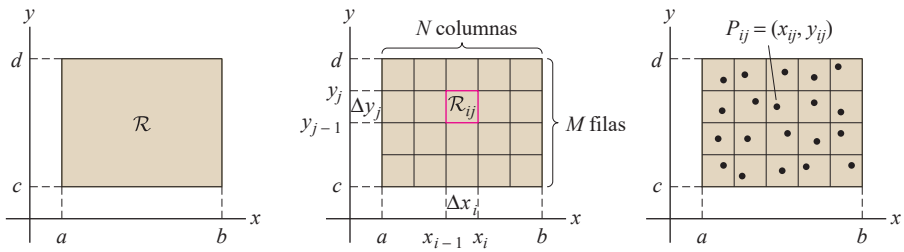
1. Subdivida $[a,b]$ y $[c,d]$ eligiendo particiones:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d$$

donde N y M son enteros positivos.

2. Cree una $N \times M$ cuadrícula de subrectángulos $\mathcal{R}_{ij}$.

3. Seleccione un punto intermedio P_{ij} en cada $\mathcal{R}_{ij}$.



(A) Rectángulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ (B) Cree la cuadrícula $N \times M$ (C) Punto intermedio P_{ij}

FIGURA 3

Observe que el área de $\mathcal{R}_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, así pues el área de $\mathcal{R}_{ij}$ es:

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Ahora, se construye la suma de Riemann con los valores de la función $f(P_{ij})$:

$$S_{N,M} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij}) \, \Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij}) \, \Delta x_i \, \Delta y_j$$

La suma doble se realiza para todo i y j entre $1 \le i \le N$ y $1 \le j \le M$ respectivamente, dando lugar a un total de NM términos.

La interpretación geométrica de $S_{N,M}$ se muestra en la figura 4. Cada término $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$ de la suma es igual al volumen con signo de la delgada caja de altura $f(P_{ij})$ por encima de $\mathcal{R}_{ij}$:

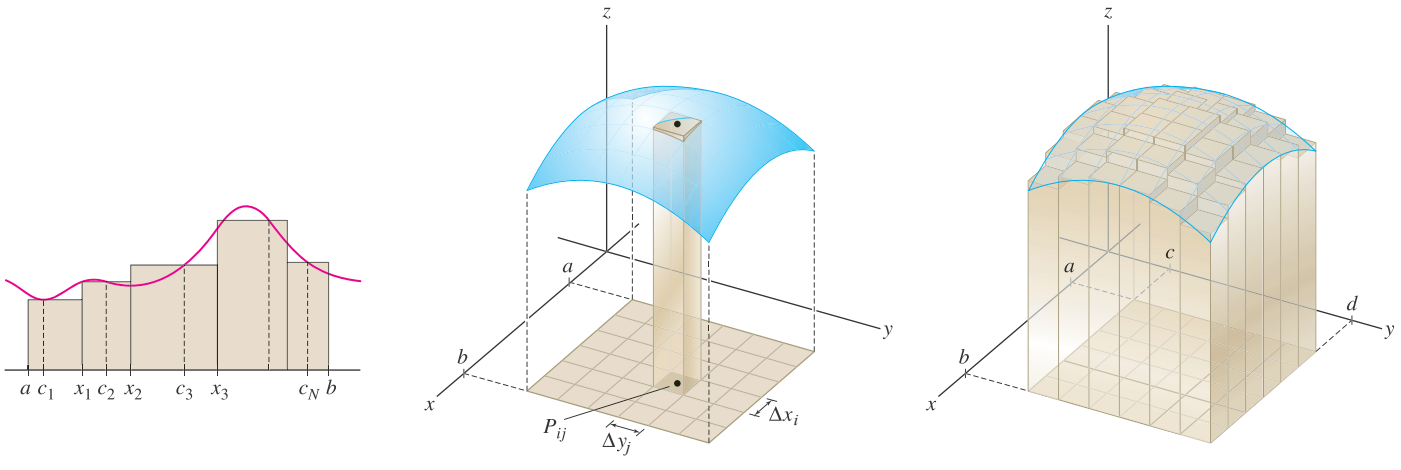
$$f(P_{ij}) \, \Delta A_{ij} = f(P_{ij}) \, \Delta x_i \, \Delta y_j = \underbrace{\text{altura} \times \text{área}}_{\text{Volumen con signo de la caja}}$$

Cuando $f(P_{ij})$ es negativo, la caja se encuentra por debajo del plano xy y tiene volumen con signo negativo. La suma $S_{N,M}$ de los volúmenes con signo de estas delgadas cajas se aproxima al volumen total, de la misma manera que las sumas de Riemann en una variable se aproximan al área mediante rectángulos [figura 4(A)].

Recuerde que una suma de Riemann depende de la elección de la partición y de los puntos intermedios. Sería más apropiado escribir:

$$S_{N,M}(\{P_{ij}\}, \{x_i\}, \{y_j\})$$

pero se escribe $S_{N,M}$ para que la notación sea más simple.



(A) En una variable, una suma de Riemann se aproxima al área bajo la curva mediante una suma de áreas de rectángulos.

(B) El volumen de la caja es $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$, donde $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.

(C) La suma de Riemann $S_{N,M}$ es la suma de los volúmenes de las cajas.

FIGURA 4

El paso final en la definición de la integral doble es el paso al límite. Denote $\mathcal{P} = \{\{x_i\}, \{y_j\}\}$ como la partición y $\|\mathcal{P}\|$ como el máximo de las amplitudes Δx_i, Δy_j. Cuando $\|\mathcal{P}\|$ tiende a cero (y tanto M como N tienden a infinito), las cajas se aproximan cada vez mejor a la región sólida por debajo de la gráfica (figura 5). He aquí una definición precisa del límite:

Límite de sumas de Riemann La suma de Riemann $S_{N,M}$ tiende a un límite L cuando $\|\mathcal{P}\| \to 0$ si, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

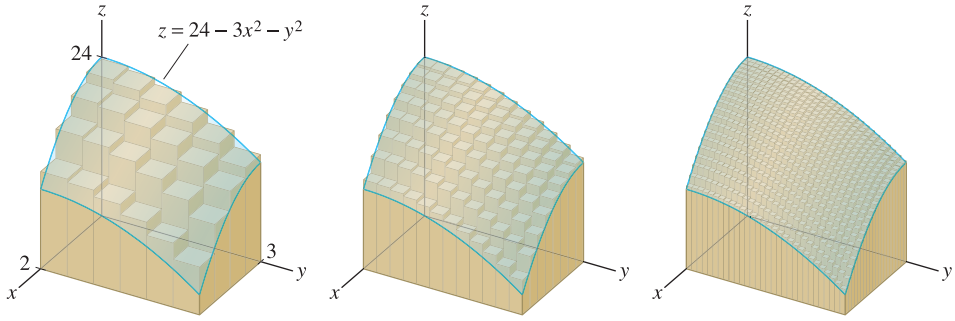
$$|L - S_{N,M}| < \epsilon$$

para toda partición que cumpla $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y cualquier elección de puntos intermedios.

En tal caso, se escribe:

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} S_{N,M} = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta A_{ij} = L$$

Este límite L, si existe, es la integral doble $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$.



(A) $M = 6$, $N = 4$ (B) $M = 12$, $N = 8$ (C) $M = 30$, $N = 20$

FIGURA 5 Aproximaciones basadas en el punto medio para el volumen por debajo de $z = 24 - 3x^2 - y^2$.

DEFINICIÓN Integral doble sobre un rectángulo La integral doble de $f(x,y)$ sobre un rectángulo $\mathcal{R}$ se define como el límite:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\Delta A_{ij}$$

Si este límite existe, se dice que $f(x,y)$ es **integrable** sobre $\mathcal{R}$.

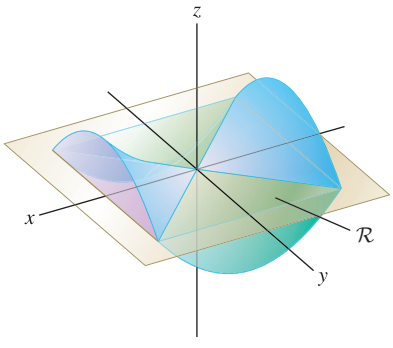


FIGURA 6 $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$ es el volumen con signo de la región comprendida entre la gráfica de $z = f(x,y)$ y el rectángulo $\mathcal{R}$.

La integral doble permite definir el volumen V de la región sólida comprendida entre la gráfica de una función positiva $f(x,y)$ y el rectángulo $\mathcal{R}$ como:

$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$$

Si $f(x,y)$ alcanza tanto valores positivos como negativos, la integral doble da lugar al volumen con signo (figura 6).

Al realizar los cálculos, se suele asumir que la partición $\mathcal{P}$ es **regular**, lo que quiere decir que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ se dividen ambos en subintervalos de igual longitud. Dicho de otro modo, la partición es regular si $\Delta x_i = \Delta x$ y $\Delta y_j = \Delta y$, donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{N} \qquad \Delta y = \frac{d-c}{M}$$

Para una partición regular, $\|\mathcal{P}\|$ tiende a cero cuando N y M tienden a ∞.

EJEMPLO 1 Estimación de una integral doble Sea $\mathcal{R} = [1, 2{,}5] \times [1, 2]$. Calcule $S_{3,2}$ para la integral (f gura 7):

$$\iint_{\mathcal{R}} xy\, dA$$

usando las dos elecciones siguientes de puntos intermedios:

(a) Vértice inferior-izquierdo **(b)** Punto medio del rectángulo

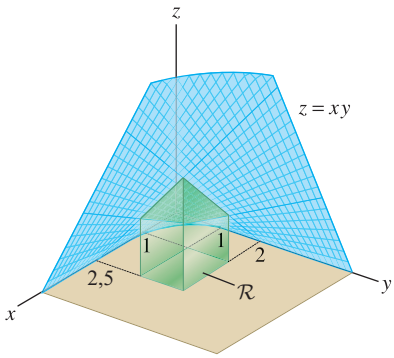


FIGURA 7 Gráf ca de $z = xy$.

Solución Como se considera una partición regular para calcular $S_{3,2}$, cada subrectángulo (en este caso cuadrados) tiene lados de longitudes:

$$\Delta x = \frac{2{,}5-1}{3} = \frac{1}{2} \qquad \Delta y = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

y área $\Delta A = \Delta x\, \Delta y = \frac{1}{4}$. La correspondiente suma de Riemann es:

$$S_{3,2} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(P_{ij})\, \Delta A = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(P_{ij})$$

donde $f(x, y) = xy$.

(a) Si se utilizan los vértices inferior-izquierdo que se muestran en la f gura 8(A), la suma de Riemann es:

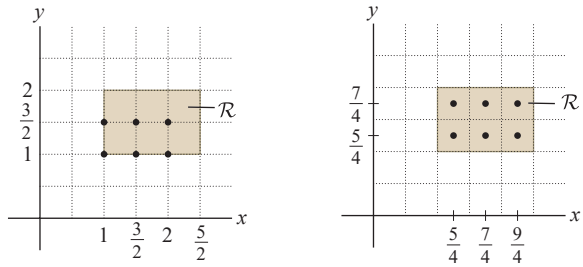
$$S_{3,2} = \tfrac{1}{4}\left(f(1,1) + f(1,\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{3}{2},1) + f(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}) + f(2,1) + f(2,\tfrac{3}{2})\right) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{4} + 2 + 3) = \tfrac{1}{4}(\tfrac{45}{4}) = 2{,}8125$$

(b) Utilizando los puntos medios de los rectángulos que se muestran en la f gura 8(B), se obtiene:

$$S_{3,2} = \tfrac{1}{4}\left(f\left(\tfrac{5}{4},\tfrac{5}{4}\right) + f\left(\tfrac{5}{4},\tfrac{7}{4}\right) + f\left(\tfrac{7}{4},\tfrac{5}{4}\right) + f\left(\tfrac{7}{4},\tfrac{7}{4}\right) + f(\tfrac{9}{4},\tfrac{5}{4}) + f(\tfrac{9}{4},\tfrac{7}{4})\right) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(\tfrac{25}{16} + \tfrac{35}{16} + \tfrac{35}{16} + \tfrac{49}{16} + \tfrac{45}{16} + \tfrac{63}{16}) = \tfrac{1}{4}(\tfrac{252}{16}) = 3{,}9375$$



(A) Los puntos intermedios son los vértices inferior izquierdo.

(B) Los puntos intermedios son los puntos medios.

FIGURA 8

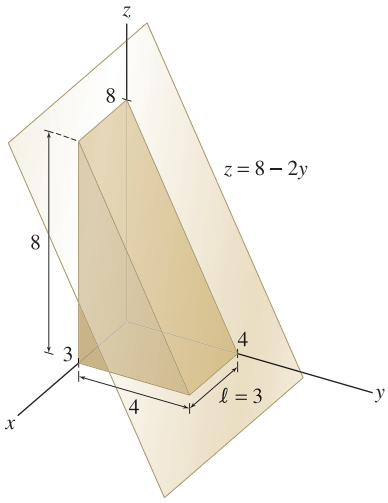


FIGURA 9 Cuña sólida bajo la gráfica de $z = 8 - 2y$.

■ **EJEMPLO 2** Evalúe $\iint_{\mathcal{R}} (8 - 2y)\,dA$, donde $\mathcal{R} = [0,3] \times [0,4]$.

Solución La figura 9 muestra la gráfica de $z = 8-2y$. La integral doble es igual al volumen V de la cuña sólida por debajo de la gráfica. El área de la cara triangular de la cuña es $A = \frac{1}{2}(8)4 = 16$. El volumen de la cuña es igual al área A multiplicada por la longitud $\ell = 3$; es decir, $V = \ell A = 3 \cdot 16 = 48$. Por tanto:

$$\iint_{\mathcal{R}} (8 - 2y)\,dA = 48$$

■

El siguiente teorema nos asegura que toda función continua es integrable. Como todavía no se ha definido la continuidad en los puntos frontera de un dominio, a efectos del siguiente teorema, se define la continuidad en $\mathcal{R}$ como que f esté definida y sea continua sobre cualquier conjunto abierto que contenga a $\mathcal{R}$. Se omite la demostración, que es similar al caso de una sola variable.

TEOREMA 1 Las funciones continuas son integrables Si $f(x,y)$ es continua sobre un rectángulo $\mathcal{R}$, entonces $f(x,y)$ es integrable sobre $\mathcal{R}$.

Como en el caso de una variable, se suelen utilizar las propiedades de linealidad de la integral doble. Se deducen de la definición de la integral doble como un límite de sumas de Riemann.

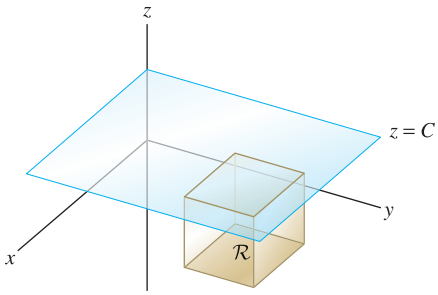


FIGURA 10 La integral doble de $f(x,y) = C$ sobre un rectángulo $\mathcal{R}$ es $C \cdot \text{Área}(\mathcal{R})$.

TEOREMA 2 Linealidad de la integral doble Suponga que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son integrables sobre un rectángulo $\mathcal{R}$. Entonces:

(i) $$\iint_{\mathcal{R}} (f(x,y) + g(x,y))\,dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA + \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)\,dA$$

(ii) Para cualquier constante C, $$\iint_{\mathcal{R}} Cf(x,y)\,dA = C \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$$

Si $f(x,y) = C$ es una función constante, entonces:

$$\iint_{\mathcal{R}} C\,dA = C \cdot \text{Área}(\mathcal{R})$$

La integral doble es el volumen con signo de la caja de base $\mathcal{R}$ y altura C (figura 10). Si $C < 0$, entonces el rectángulo se encuentra por debajo del plano xy y la integral es igual al volumen con signo, que es negativo.

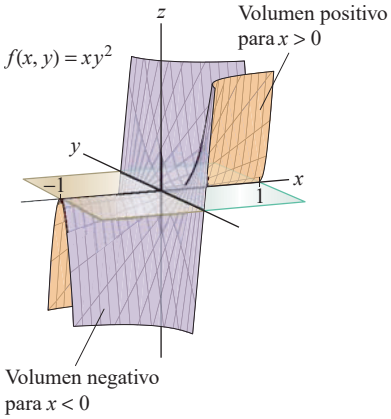


FIGURA 11

■ **EJEMPLO 3 Utilizando la simetría** Razone, mediante argumentos de simetría, que $\iint_{\mathcal{R}} xy^2\,dA = 0$, donde $\mathcal{R} = [-1,1] \times [-1,1]$.

Solución La integral doble es el volumen con signo de la región comprendida entre la gráfica de $f(x,y) = xy^2$ y el plano xy (figura 11). Sin embargo, $f(x,y)$ alcanza valores opuestos en (x,y) y $(-x,y)$:

$$f(-x,y) = -xy^2 = -f(x,y)$$

Debido a la simetría, el volumen con signo (negativo) de la región por debajo del plano xy para $-1 \le x \le 0$ se cancela con el volumen con signo (positivo) de la región por encima del plano xy para $0 \le x \le 1$. El resultado neto es $\iint_{\mathcal{R}} xy^2\,dA = 0$. ■

Integrales iteradas

Se suelen omitir los paréntesis en la notación para las integrales iteradas:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

El orden de las variables en $dy\,dx$ indica que se debe integrar primero respecto a y entre los límites $y = c$ e $y = d$.

La principal herramienta para evaluar integrales dobles es el teorema fundamental del cálculo (TFC), tal y como ocurría en el caso de una variable. Para utilizar el TFC, se expresa la integral doble como una **integral iterada**, que es una expresión de la forma:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Las integrales iteradas se evalúan en dos etapas. Primera etapa: mantenga x constante y evalúe la integral en el interior respecto a y. De esta manera, se obtiene una función que únicamente depende de x:

$$S(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Segunda etapa: integre la función resultante $S(x)$ respecto a x.

EJEMPLO 4 Evalúe $\displaystyle\int_2^4 \left(\int_1^9 ye^x\,dy \right) dx$.

Solución En primer lugar, evalúe la integral en el interior tratando a x como una constante:

$$S(x) = \int_1^9 ye^x\,dy = e^x \int_1^9 y\,dy = e^x \left(\frac{1}{2}y^2 \right)\Big|_{y=1}^{9} = e^x \left(\frac{81-1}{2} \right) = 40e^x$$

A continuación integre $S(x)$ respecto a x:

$$\int_2^4 \left(\int_1^9 ye^x\,dy \right) dx = \int_2^4 40e^x\,dx = 40e^x\Big|_2^4 = 40(e^4 - e^2)$$

En una integral iterada en la que dx preceda a dy, integre primero respecto a x:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx \right) dy$$

En algunas ocasiones para clarif car, como en la expresión a la derecha anterior, se incluyen las variables en los límites de integración.

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int_{y=0}^{4} \int_{x=0}^{3} \frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}}$.

Solución En primer lugar se evalúa la integral interior, tratando a y como a una constante. Como se está integrando respecto a x, se necesita una primitiva de $1/\sqrt{3x+4y}$ como función de x. Se puede utilizar $\frac{2}{3}\sqrt{3x+4y}$ pues:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3x+4y} \right) = \frac{1}{\sqrt{3x+4y}}$$

Así, se obtiene:

$$\int_{x=0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{3x+4y}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4y}\Big|_{x=0}^{3} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{4y+9} - \sqrt{4y} \right)$$

$$\int_{y=0}^{4} \int_{x=0}^{3} \frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}} = \frac{2}{3}\int_{y=0}^{4} \left(\sqrt{4y+9} - \sqrt{4y} \right) dy$$

Por tanto:

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3}\frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}(4y+9)^{3/2} - \frac{1}{6}(4y)^{3/2}\right)\Big|_{y=0}^{4} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(25^{3/2} - 16^{3/2} - 9^{3/2}\right) = \frac{34}{9}$$

■

■ **EJEMPLO 6 Intercambiando el orden de integración** Compruebe que:

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3}\frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}} = \int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4}\frac{dy\,dx}{\sqrt{3x+4y}}$$

Solución Se ha evaluado la integral iterada de la izquierda en el ejemplo previo. A continuación se va a calcular la integral de la derecha y comprobar que el resultado también es $\frac{34}{9}$:

$$\int_{y=0}^{4}\frac{dy}{\sqrt{3x+4y}} = \frac{1}{2}\sqrt{3x+4y}\Big|_{y=0}^{4} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3x+16} - \sqrt{3x}\right)$$

$$\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4}\frac{dy\,dx}{\sqrt{3x+4y}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{3}\left(\sqrt{3x+16} - \sqrt{3x}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}(3x+16)^{3/2} - \frac{2}{9}(3x)^{3/2}\right)\Big|_{x=0}^{3} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(25^{3/2} - 9^{3/2} - 16^{3/2}\right) = \frac{34}{9}$$

■

El ejemplo anterior ilustra un hecho general: el valor de una integral iterada no depende del orden en el que el la integración se lleve a cabo. Se trata de parte del teorema de Fubini. Incluso más aún, el teorema de Fubini establece que una integral doble sobre un rectángulo se puede evaluar como una integral iterada.

ATENCIÓN *Cuando se invierte el orden de integración en una integral iterada, recuerde intercambiar los límites de integración (los límites internos pasan a ser los límites externos).*

TEOREMA 3 Teorema de Fubini La integral doble de una función continua $f(x,y)$ sobre un rectángulo $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$ es igual a la integral iterada (en cualquier orden):

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=c}^{d}\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\,dy$$

Demostración Se proporciona un esbozo de la demostración. La integral doble se puede calcular como un límite de sumas de Riemann que consideran una partición regular $\mathcal{R}$ y puntos intermedios $P_{ij} = (x_i, y_j)$, donde $\{x_i\}$ son puntos intermedios para una partición regular de $[a,b]$, y $\{y_j\}$ son puntos intermedios para una partición regular de $[c,d]$:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \lim_{N,M\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(x_i,y_j)\Delta y\Delta x$$

Aquí $\Delta x = (b-a)/N$ y $\Delta y = (d-c)/M$. El teorema de Fubini se deriva del hecho elemental de que podemos sumar los valores de la suma en cualquier orden. Así, si se escriben los valores $f(P_{ij})$ en una tabla $N\times M$ como se muestra al margen, se pueden sumar primero las columnas y después sumar los valores de las sumas obtenidos en cada columna. De esta manera, se obtiene:

3	$f(P_{13})$	$f(P_{23})$	$f(P_{33})$
2	$f(P_{12})$	$f(P_{22})$	$f(P_{32})$
1	$f(P_{11})$	$f(P_{21})$	$f(P_{31})$
j / i	1	2	3

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \lim_{N,M\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{M} f(x_i,y_j)\Delta y\right)}_{\substack{\text{Sume primero las columnas;}\\ \text{después sume las sumas de cada columna.}}}\Delta x$$

Fijado i, $f(x_i, y)$ es una función continua de y y la suma interior de la derecha es una suma de Riemann que tiende a la integral en una variable $\int_c^d f(x_i, y)\,dy$. Dicho de otro modo, para $S(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$, se tiene:

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} f(x_i, y_j) = \int_c^d f(x_i, y)\,dy = S(x_i)$$

Para completar la demostración, se dan dos hechos por sentado. En primer lugar, que $S(x)$ es una función continua para $a \le x \le b$. En segundo, que el límite cuando N, $M \to \infty$ se puede calcular considerando primero el límite respecto a M y después respecto a N. Suponiendo esto cierto:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)\,dA = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\lim_{M\to\infty} \sum_{j=1}^{M} f(x_i, y_j)\Delta y \right) \Delta x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} S(x_i)\Delta x$$

$$= \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx$$

Observe que las sumas de la derecha en la primera línea son sumas de Riemann para $S(x)$ que convergen a la integral de $S(x)$ en la segunda línea. Esto demuestra en teorema de Fubini para el orden de $dy\,dx$. Un argumento similar se aplica para el orden de $dx\,dy$. ■

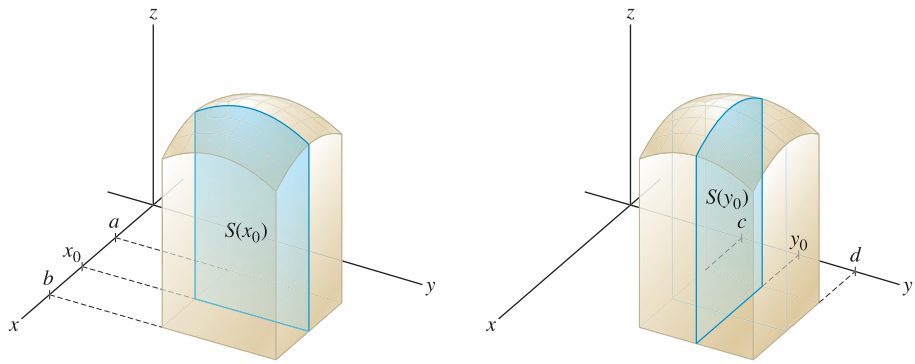
UN APUNTE GRÁFICO Cuando se expresa una integral doble como una integral iterada en el orden $dy\,dx$, para cada valor f jado de $x = x_0$, la integral interior es el área de la sección transversal de S en el plano vertical $x = x_0$ perpendicular al eje x (f gura 12(A)):

$$S(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\,dy = \text{área de la sección transversal en el plano vertical } x = x_0 \text{ perpendicular el eje } x$$

Lo que dice el teorema de Fubini es que el volumen V de S se puede calcular como la integral del área de la sección transversal $S(x)$:

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b S(x)\,dx = \text{integral del área de la sección transversal}$$

Análogamente, la integral iterada en el orden $dx\,dy$ calcula V como la integral del área de las secciones transversales perpendiculares al eje y (f gura 12(B)).



(A) (B)

FIGURA 12

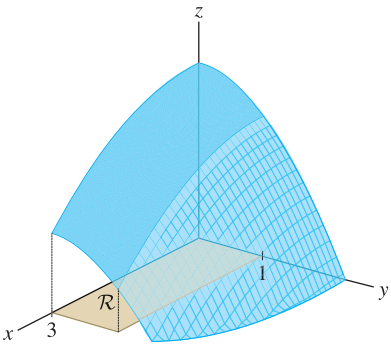


FIGURA 13 Gráfica de $f(x,y) = 16 - x^2 - 3y^2$ sobre $\mathcal{R} = [0,3] \times [0,1]$.

EJEMPLO 7 Halle el volumen V comprendido entre la gráfica de $f(x,y) = 16 - x^2 - 3y^2$ y el rectángulo $\mathcal{R} = [0,3] \times [0,1]$ (figura 13).

Solución El volumen V es igual a la integral doble de $f(x,y)$, que se puede expresar como una integral iterada:

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (16 - x^2 - 3y^2)\, dA = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{1} (16 - x^2 - 3y^2)\, dy\, dx$$

Evalúe la integral interior primero y después calcule V:

$$\int_{y=0}^{1} (16 - x^2 - 3y^2)\, dy = (16y - x^2 y - y^3)\Big|_{y=0}^{1} = 15 - x^2$$

$$V = \int_{x=0}^{3} (15 - x^2)\, dx = \left(15x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = 36$$

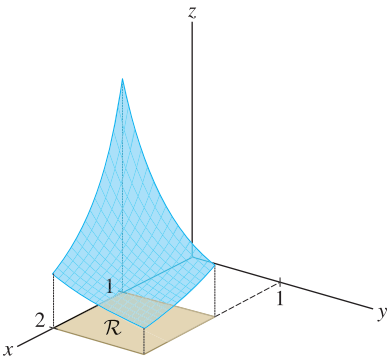


FIGURA 14 Gráfica de $z = (x+y)^{-2}$ sobre $\mathcal{R} = [1,2] \times [0,1]$.

EJEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{dA}{(x+y)^2}$, donde $\mathcal{R} = [1,2] \times [0,1]$ (figura 14).

Solución

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{dA}{(x+y)^2} = \int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=0}^{1} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+y}\Big|_{y=0}^{1} \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \right) dx = (\ln x - \ln(x+1))\Big|_1^2 =$$

$$= (\ln 2 - \ln 3) - (\ln 1 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

Cuando una función es un producto $f(x,y) = g(x)h(y)$, la integral doble sobre un rectángulo es simplemente el producto de las integrales simples. Se puede comprobar escribiendo la integral doble como una integral iterada. Si $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$, entonces:

$$\iint_{\mathcal{R}} g(x)h(y)\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)\, dy \right) dx = \int_a^b g(x) \left(\int_c^d h(y)\, dy \right) dx =$$

$$= \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int_c^d h(y)\, dy \right) \tag{1}$$

EJEMPLO 9 **Integral iterada de una función producto** Calcule:

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} e^x \cos y\, dy\, dx$$

Solución El integrando $f(x,y) = e^x \cos y$ es un producto, por lo que se obtiene:

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} e^x \cos y\, dy\, dx = \left(\int_0^2 e^x\, dx \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos y\, dy \right) = \left(e^x\Big|_0^2 \right) \left(\operatorname{sen} y\Big|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= (e^2 - 1)(1) = e^2 - 1$$

16.1 RESUMEN

- Una *suma de Riemann* para $f(x,y)$ sobre un rectángulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ es una suma de la forma:

$$S_{N,M} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

correspondiente a las particiones de $[a,b]$ y de $[c,d]$ y a la elección de los puntos intermedios P_{ij} en el subrectángulo $\mathcal{R}_{ij}$.

- La integral doble de $f(x,y)$ sobre $\mathcal{R}$ se def ne como el límite (si éste existe):

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

Se dice que $f(x,y)$ es *integrable* sobre $\mathcal{R}$ si este límite existe.

- Una función continua sobre un rectángulo $\mathcal{R}$ es integrable.
- La integral doble es igual al *volumen con signo* de la región comprendida entre la gráf ca de $z = f(x,y)$ y el rectángulo $\mathcal{R}$. El volumen con signo de una región es positivo si se encuentra por encima del plano xy, y negativo si se encuentra por debajo del plano xy.
- Si $f(x,y) = C$ es una función constante, entonces:

$$\iint_{\mathcal{R}} C\,dA = C \cdot \text{Área}(\mathcal{R})$$

- Teorema de Fubini: la integral doble de una función continua $f(x,y)$ sobre un rectángulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ se puede evaluar como una integral iterada (en cualquier orden):

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\,dy$$

16.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Si $S_{8,4}$ es una suma de Riemann para una integral doble sobre $\mathcal{R} = [1,5] \times [2,10]$ usando una partición regular, ¿a qué es igual el área de cada subrectángulo? ¿Cuántos subrectángulos hay?

2. Estime la integral doble de una función continua f sobre un pequeño rectángulo $\mathcal{R} = [0{,}9, 1{,}1] \times [1{,}9, 2{,}1]$ si $f(1,2) = 4$.

3. ¿A qué es igual la integral de la función constante $f(x,y) = 5$ sobre el rectángulo $[-2,3] \times [2,4]$?

4. ¿Cuál es la interpretación de $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$ si $f(x,y)$ alcanza valores tanto positivos como negativos en $\mathcal{R}$?

5. ¿Cuál de las integrales en (a) o (b) es igual a $\displaystyle\int_1^2 \int_4^5 f(x,y)\,dy\,dx$?

(a) $\displaystyle\int_1^2 \int_4^5 f(x,y)\,dx\,dy$ **(b)** $\displaystyle\int_4^5 \int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy$

6. ¿Para cuál de las siguientes funciones es igual a cero la integral doble sobre el rectángulo de la f gura 15? Justif que su respuesta.

(a) $f(x,y) = x^2 y$ **(b)** $f(x,y) = xy^2$

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x$ **(d)** $f(x,y) = e^x$

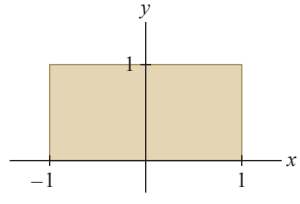


FIGURA 15

Problemas

1. Calcule la suma de Riemann $S_{4,3}$ para estimar la integral doble de $f(x,y) = xy$ sobre $\mathcal{R} = [1,3] \times [1,2{,}5]$. Use la partición regular y los vértices superior-derecho de los subrectángulos como puntos intermedios.

2. Calcule la suma de Riemann con $N = M = 2$ para estimar la integral de $\sqrt{x+y}$ sobre $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$. Use la partición regular y los puntos medios de los subrectángulos como puntos intermedios.

En los problemas 3-6, calcule la suma de Riemann para la integral doble $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA$, *donde* $\mathcal{R} = [1,4] \times [1,3]$, *para la cuadrícula y dos elecciones de puntos intermedios que se muestran en la figura 16.*

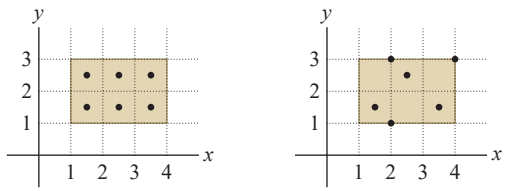


FIGURA 16

3. $f(x,y) = 2x + y$

4. $f(x,y) = 7$

5. $f(x,y) = 4x$

6. $f(x,y) = x - 2y$

7. Sea $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$. Estime $\iint_{\mathcal{R}} (x+y)\,dA$ calculando dos sumas de Riemann diferentes, cada una de ellas con, por lo menos, seis rectángulos.

8. Evalúe $\iint_{\mathcal{R}} 4\,dA$, donde $\mathcal{R} = [2,5] \times [4,7]$.

9. Evalúe $\iint_{\mathcal{R}} (15 - 3x)\,dA$, donde $\mathcal{R} = [0,5] \times [0,3]$, y represente la correspondiente región sólida (vea el ejemplo 2).

10. Evalúe $\iint_{\mathcal{R}} (-5)\,dA$, donde $\mathcal{R} = [2,5] \times [4,7]$.

11. La siguiente tabla muestra la altura aproximada a intervalos de un cuarto de metro de un montículo de grava. Estime el volumen del montículo calculando el promedio de las dos sumas de Riemann $S_{4,3}$ que se obtienen al considerar como puntos intermedios los vértices inferior-izquierdo y superior-derecho de los subrectángulos.

0,75	0,1	0,2	0,2	0,15	0,1
0,5	0,2	0,3	0,5	0,4	0,2
0,25	0,15	0,2	0,4	0,3	0,2
0	0,1	0,15	0,2	0,15	0,1
y \ x	0	0,25	0,5	0,75	1

12. Use la siguiente tabla para calcular una suma de Riemann $S_{3,3}$ para $f(x,y)$ sobre el cuadrado $\mathcal{R} = [0,1{,}5] \times [0{,}5,2]$. Use la partición regular y puntos intermedios de su elección.

Valores de $f(x,y)$					
2	2,6	2,17	1,86	1,62	1,44
1,5	2,2	1,83	1,57	1,37	1,22
1	1,8	1,5	1,29	1,12	1
0,5	1,4	1,17	1	0,87	0,78
0	1	0,83	0,71	0,62	0,56
y \ x	0	0,5	1	1,5	2

13. SAC Sea $S_{N,N}$ la suma de Riemann para $\int_0^1 \int_0^1 e^{x^3 - y^3}\,dy\,dx$ usando la partición regular y el vértice inferior-izquierdo de cada subrectángulo como punto intermedio. Use un programa informático de cálculo simbólico para calcular $S_{N,N}$ para $N = 25, 50, 100$.

14. SAC Sea $S_{N,M}$ la suma de Riemann para:

$$\int_0^4 \int_0^2 \ln(1 + x^2 + y^2)\,dy\,dx$$

usando la partición regular y el vértice superior-derecho de cada subrectángulo como punto intermedio. Use un programa informático de cálculo simbólico para calcular $S_{2N,N}$ para $N = 25, 50, 100$.

En los problemas 15-18, aplique simetría para calcular la integral doble.

15. $\iint_{\mathcal{R}} x^3\,dA, \quad \mathcal{R} = [-4,4] \times [0,5]$

16. $\iint_{\mathcal{R}} 1\,dA, \quad \mathcal{R} = [2,4] \times [-7,7]$

17. $\iint_{\mathcal{R}} \operatorname{sen} x\,dA, \quad \mathcal{R} = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$

18. $\iint_{\mathcal{R}} (2 + x^2 y)\,dA, \quad \mathcal{R} = [0,1] \times [-1,1]$

En los problemas 19-36, evalúe la integral iterada.

19. $\int_1^3 \int_0^2 x^3 y\,dy\,dx$

20. $\int_0^2 \int_1^3 x^3 y\,dx\,dy$

21. $\int_4^9 \int_{-3}^8 1\,dx\,dy$

22. $\int_{-4}^{-1} \int_4^8 (-5)\,dx\,dy$

23. $\int_{-1}^1 \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} y\,dy\,dx$

24. $\int_{-1}^1 \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} y\,dx\,dy$

25. $\int_2^6 \int_1^4 x^2\,dx\,dy$

26. $\int_2^6 \int_1^4 y^2\,dx\,dy$

27. $\int_0^1 \int_0^2 (x + 4y^3)\,dx\,dy$

28. $\int_0^2 \int_0^2 (x^2 - y^2)\,dy\,dx$

29. $\int_0^4 \int_0^9 \sqrt{x + 4y}\,dx\,dy$

30. $\int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(2x + y)\,dy\,dx$

31. $\int_1^2 \int_0^4 \frac{dy\,dx}{x+y}$

32. $\int_1^2 \int_2^4 e^{3x-y}\,dy\,dx$

33. $\int_0^4 \int_0^5 \frac{dy\,dx}{\sqrt{x+y}}$

34. $\displaystyle\int_0^8 \int_1^2 \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y}}$

35. $\displaystyle\int_1^2 \int_1^3 \frac{\ln(xy)\,dy\,dx}{y}$

36. $\displaystyle\int_0^1 \int_2^3 \frac{1}{(x+4y)^3}\,dx\,dy$

En los problemas 37-42, use la ec. (1) para evaluar la integral.

37. $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{x}{y}\,dA, \quad \mathcal{R} = [-2,4]\times[1,3]$

38. $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x^2 y\,dA, \quad \mathcal{R} = [-1,1]\times[0,2]$

39. $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \cos x \operatorname{sen} 2y\,dA, \quad \mathcal{R} = [0,\tfrac{\pi}{2}]\times[0,\tfrac{\pi}{2}]$

40. $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{y}{x+1}\,dA, \quad \mathcal{R} = [0,2]\times[0,4]$

41. $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^x \operatorname{sen} y\,dA, \quad \mathcal{R} = [0,2]\times[0,\tfrac{\pi}{4}]$

42. $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^{3x+4y}\,dA, \quad \mathcal{R} = [0,1]\times[1,2]$

43. Sea $f(x,y) = mxy^2$, donde m es una constante. Halle un valor de m tal que $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = 1$, siendo $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,2]$.

44. Evalúe $I = \displaystyle\int_1^3 \int_0^1 ye^{xy}\,dy\,dx$. Necesitará aplicar integración por partes y la fórmula:

$$\int e^x(x^{-1} - x^{-2})\,dx = x^{-1}e^x + C$$

A continuación, evalúe I de nuevo usando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración (es decir, integre primero respecto a x). ¿Qué método es más fácil?

45. Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{1+xy}\,dy\,dx$. *Indicación:* cambie el orden de integración.

46. Calcule una suma de Riemann $S_{3,3}$ sobre el cuadrado $\mathcal{R} = [0,3]\times[0,3]$ para la función $f(x,y)$ cuyo mapa de contorno se muestra en la figura 17. Elija los puntos intermedios y utilice la representación para hallar los valores de $f(x,y)$ en estos puntos.

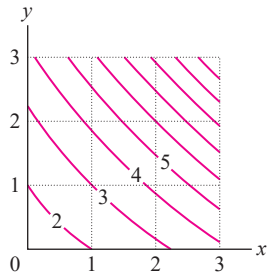


FIGURA 17 Mapa de contorno de $f(x,y)$.

47. Uando el teorema de Fubini, justif que que el volumen del sólido de la f gura 18 es AL, donde A es el área de la cara frontal del sólido.

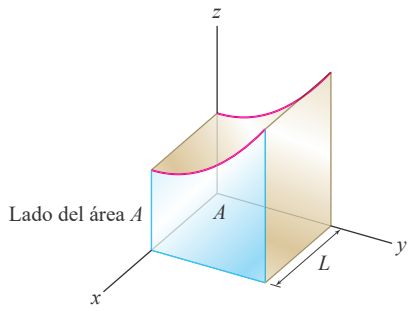


FIGURA 18

Problemas avanzados

48. Demuestre la siguiente extensión del teorema fundamental del cálculo en dos variables: si $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = f(x,y)$, entonces:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

donde $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d]$.

49. Sea $F(x,y) = x^{-1}e^{xy}$. Pruebe que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = ye^{xy}$ y use el resultado del problema 48 para evaluar $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} ye^{xy}\,dA$ para el rectángulo $\mathcal{R} = [1,3]\times[0,1]$.

50. Halle una función $F(x,y)$ que cumpla $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y$ y use el resultado del problema 48 para evaluar $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} 6x^2y\,dA$ para el rectángulo $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,4]$.

51. En este problema se utiliza la integración doble para evaluar la siguiente integral impropia, donde $a > 0$ es una constante positiva:

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\,dx$$

(a) Use la regla de L'Hôpital para probar que $f(x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}$, aunque no está def nida en $x = 0$, se puede hacer continua asignando a 0 el valor $f(0) = a - 1$.

(b) Demuestre que $|f(x)| \le e^{-x} + e^{-ax}$ para $x > 1$ (use la desigualdad triangular) y aplique el teorema de comparación para probar que $I(a)$ converge.

(c) Pruebe que $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \int_1^a e^{-xy}\,dy\,dx$.

(d) Demuestre, intercambiando el orden de integración, que:

$$I(a) = \ln a - \lim_{T\to\infty} \int_1^a \frac{e^{-Ty}}{y}\, dy \qquad \boxed{2}$$

(e) Use el teorema de comparación para demostrar que el límite en la ec. (2) es cero. *Indicación:* si $a \geq 1$, pruebe que $e^{-Ty}/y \leq e^{-T}$ para $y \geq 1$, y si $a < 1$, pruebe que $e^{-Ty}/y \leq e^{-aT}/a$ para $a \leq y \leq 1$. Deduzca que $I(a) = \ln a$ (f gura 19).

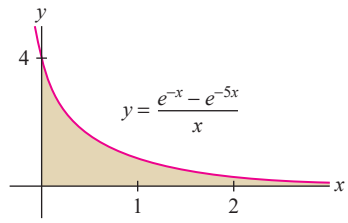
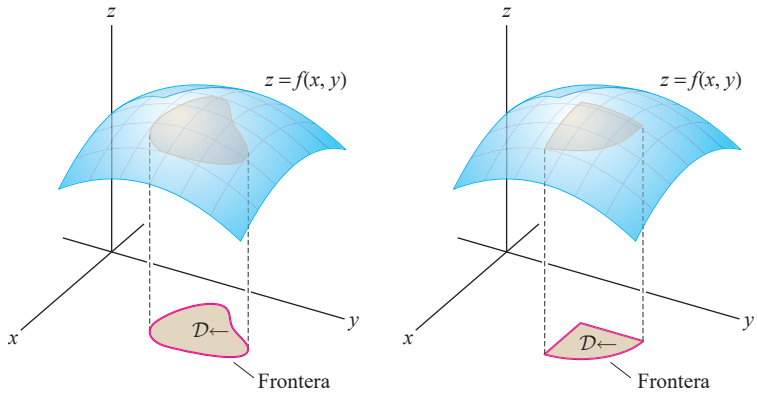


FIGURA 19 El área de la región sombreada es ln 5.

16.2 Integrales dobles sobre regiones más generales

En la sección anterior se trataron únicamente dominios rectangulares. Ahora se considerarán dominios más generales $\mathcal{D}$, cuyas fronteras sean curvas cerradas simples (una curva es *simple* si no se corta a sí misma). Se supondrá que la frontera de $\mathcal{D}$ es suave, como en la f gura 1(A), o que está formada por un número f nito de curvas cerradas, unidas entre ellas y posiblemente formando picos, como en la f gura 1(B). Una frontera de este tipo se llama **suave a trozos**. Se supone que $\mathcal{D}$ es un dominio cerrado; es decir, $\mathcal{D}$ contiene a su frontera.



(A) La frontera de $\mathcal{D}$ es suave.

(B) La frontera de $\mathcal{D}$ es suave a trozos, formada por tres curvas suaves que se unen en los picos.

FIGURA 1

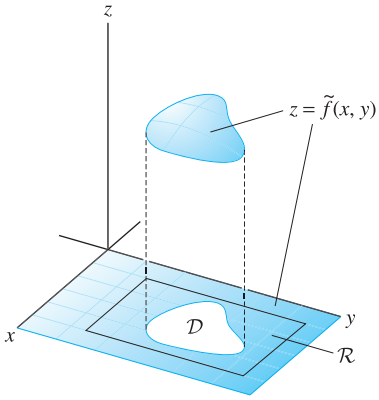


FIGURA 2 La función $\tilde{f}$ es cero fuera de $\mathcal{D}$.

Afortunadamente, no es necesario empezar por el principio para def nir la integral doble sobre un dominio $\mathcal{D}$ de este tipo. Dada una función $f(x,y)$ sobre $\mathcal{D}$, se selecciona un rectángulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ que contiene a $\mathcal{D}$ y se def ne una nueva función $\tilde{f}(x,y)$ que coincida con $f(x,y)$ sobre $\mathcal{D}$ y sea cero fuera de $\mathcal{D}$ (f gura 2):

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \mathcal{D} \end{cases}$$

La integral doble de f sobre $\mathcal{D}$ se def ne como la integral de $\tilde{f}$ sobre $\mathcal{R}$:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA = \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}(x,y)\, dA \qquad \boxed{1}$$

Se dice que f es **integrable** sobre $\mathcal{D}$ si la integral de $\tilde{f}$ sobre $\mathcal{R}$ existe. El valor de la integral no depende de la elección concreta de $\mathcal{R}$ pues $\tilde{f}$ es cero fuera de $\mathcal{D}$.

Esta definición parece razonable pues la integral de $\tilde{f}$ únicamente "recoge" los valores de f sobre $\mathcal{D}$. Sin embargo, $\tilde{f}$ podría ser discontinua pues sus valores van rápidamente a cero una vez sobrepasada la frontera. A pesar de esta posible discontinuidad, el siguiente teorema garantiza que la integral de $\tilde{f}$ sobre $\mathcal{R}$ existe si la función original f es continua.

TEOREMA 1 Si $f(x,y)$ es continua sobre un dominio cerrado $\mathcal{D}$ cuya frontera es una curva cerrada simple suave a trozos, entonces $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$ existe.

En el teorema 1, se define la continuidad sobre $\mathcal{D}$ con el significado que f está definida y es continua sobre cualquier conjunto abierto que contenga a $\mathcal{D}$.

Como en la sección anterior, la integral doble define el volumen con signo de la región comprendida entre la gráfica de $f(x,y)$ y el plano xy, donde regiones por debajo del plano xy contribuyen al volumen con signo negativo.

Se puede aproximar la integral doble mediante sumas de Riemann para la función $\tilde{f}$ sobre un rectángulo $\mathcal{R}$ que contenga a $\mathcal{D}$. Como $\tilde{f}(P) = 0$ para puntos P en $\mathcal{R}$ que no pertenecen a $\mathcal{D}$, cualquier suma de Riemann de este tipo se reduce a una suma de Riemann sobre aquellos puntos intermedios que se encuentran en $\mathcal{D}$:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \tilde{f}(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \underbrace{\sum f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j}_{\substack{\text{Suma sólo sobre los puntos} \\ P_{ij} \text{ que se encuentran en } \mathcal{D}}} \qquad 2$$

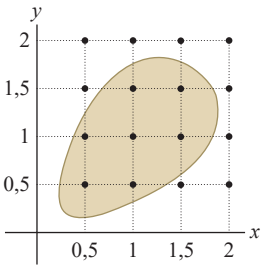


FIGURA 3 Dominio $\mathcal{D}$.

EJEMPLO 1 Calcule $S_{4,4}$ para la integral $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es el dominio sombreado de la figura 3. Use las esquinas superior-derecha de los cuadrados como puntos intermedios.

Solución Sea $f(x,y) = x+y$. Los subrectángulos de la figura 3 tienen lados de longitudes $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{2}$ y área $\Delta A = \frac{1}{4}$. Únicamente 7 de los 16 puntos intermedios se encuentran en $\mathcal{D}$, por lo que:

$$S_{4,4} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \tilde{f}(P_{ij})\,\Delta x\,\Delta y = \frac{1}{4}(f(0{,}5,0{,}5) + f(1,0{,}5) + f(0{,}5,1) + f(1,1) +$$

$$+ f(1{,}5,1) + f(1,1{,}5) + f(1{,}5,1{,}5)) =$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 1{,}5 + 1{,}5 + 2 + 2{,}5 + 2{,}5 + 3) = \frac{7}{2}$$

Las propiedades de linealidad de las integrales dobles se continúan cumpliendo sobre dominios generales: si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son integrables y C es una constante, entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} (f(x,y) + g(x,y))\,dA = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA + \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dA$$

$$\iint_{\mathcal{D}} Cf(x,y)\,dA = C\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$$

Aunque se suele pensar en integrales dobles como en volúmenes, vale la pena mencionar que se puede expresar el *área* de un dominio $\mathcal{D}$ en el plano como la integral de la función constante $f(x,y) = 1$:

$$\text{Área}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} 1\,dA \qquad 3$$

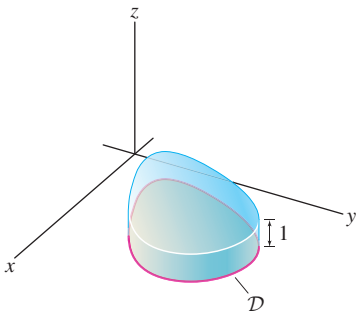


FIGURA 4 El volumen del cilindro de altura 1 con $\mathcal{D}$ como base es igual al área de $\mathcal{D}$.

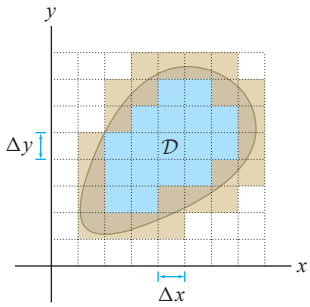


FIGURA 5 El área de $\mathcal{D}$ se aproxima mediante la suma de las áreas de los rectángulos contenidos en $\mathcal{D}$.

Cuando se escribe una integral doble sobre una región verticalmente simple como una integral reiterada, la integral interior es una integral sobre el segmento de trazo discontinuo que se muestra en la figura 6(A). Para una región horizontalmente simple, la integral interior es una integral sobre el segmento de trazo discontinuo en la figura 6(B).

De hecho, tal y como se ve en la f gura 4, el área de $\mathcal{D}$ es igual al volumen del "cilindro" de altura 1 siendo $\mathcal{D}$ su base. De forma más general, para cualquier constante C:

$$\iint_{\mathcal{D}} C\,dA = C\,\text{Área}(\mathcal{D}) \qquad \boxed{4}$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Según la ec. (3), se puede aproximar el área de un dominio $\mathcal{D}$ por una suma de Riemann para $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} 1\,dA$. En este caso, $f(x,y) = 1$ y se obtiene una suma de Riemann añadiendo las áreas $\Delta x_i\,\Delta y_j$ de aquellos rectángulos en una cuadrícula que esté contenida en $\mathcal{D}$, o que interseque con la frontera de $\mathcal{D}$ (f gura 5). Cuanto más f na sea la cuadrícula, mejor será la aproximación. El área exacta es el límite cuando los lados de los rectángulos tienden a cero.

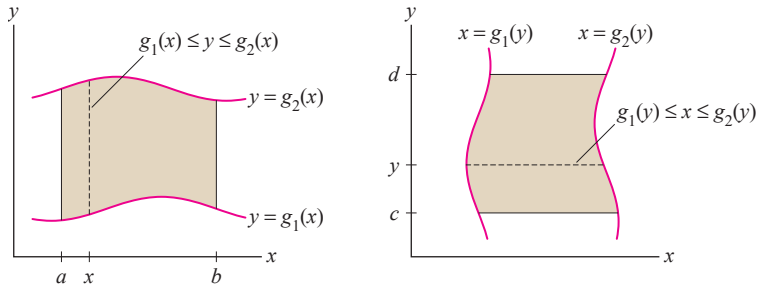
Regiones comprendidas entre dos gráficas

Cuando $\mathcal{D}$ es una región entre dos gráf cas en el plano xy, se pueden evaluar las integrales sobre $\mathcal{D}$ como integrales iteradas. Se dice que $\mathcal{D}$ es **verticalmente simple** si es la región comprendida entre las gráf cas de dos funciones continuas $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$ (f gura 6):

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

Análogamente, $\mathcal{D}$ es **horizontalmente simple** si:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : c \le y \le d, \quad g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$$



(A) Región verticalmente simple (B) Región horizontalmente simple

FIGURA 6

TEOREMA 2 Si $\mathcal{D}$ es verticalmente simple, de descripción:

$$a \le x \le b \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

Entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Si $\mathcal{D}$ es una región horizontalmente simple, de descripción:

$$c \le y \le d \qquad g_1(y) \le x \le g_2(y)$$

entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Aunque $\tilde{f}$ no tiene por qué ser continua, el uso del teorema de Fubini en la ec. (5) se puede justificar. En particular, la integral $\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy$ existe y es una función continua de x.

Demostración Se proporciona un esbozo de la demostración, suponiendo que $\mathcal{D}$ es verticalmente simple (el caso horizontalmente simple es similar). Seleccione un rectángulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d]$ que contenga a $\mathcal{D}$. Entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\,dx \qquad \boxed{5}$$

Por definición, $\tilde{f}(x,y)$ es cero fuera de $\mathcal{D}$, por lo que fijado x, $\tilde{f}(x,y)$ es cero salvo si y cumple $g_1(x) \le y \le g_2(x)$. Por tanto:

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Sustituyendo en la ec. (5), se obtiene la igualdad del enunciado:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

La integración sobre una región simple es igual a la integración sobre un rectángulo, aunque con una diferencia: los límites de la integral interior pueden ser funciones en lugar de constantes.

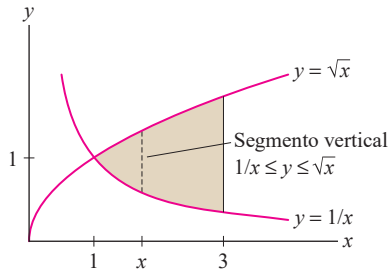


FIGURA 7 Dominio comprendido entre $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$.

EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_{\mathcal{D}} x^2 y\,dA$, siendo $\mathcal{D}$ la región de la figura 7.

Solución

Etapa 1. **Describa $\mathcal{D}$ como una región vertical simple**

$$\underbrace{1 \le x \le 3}_{\text{Límites de la integral exterior}} \qquad \underbrace{\frac{1}{x} \le y \le \sqrt{x}}_{\text{Límites de la integral interior}}$$

En este caso, $g_1(x) = 1/x$ y $g_2(x) = \sqrt{x}$.

Etapa 2. **Determine la integral iterada**

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y\,dA = \int_1^3 \int_{y=1/x}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy\,dx$$

Observe que la integral interna es una integral sobre un segmento vertical entre las gráficas de $y = 1/x$ y de $y = \sqrt{x}$.

Etapa 3. **Calcule la integral iterada**

Como es habitual, se evalúa la integral interna considerando a x como una constante, pero ahora los límites superior e inferior dependen de x:

$$\int_{y=1/x}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy = \frac{1}{2}x^2 y^2\Big|_{y=1/x}^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^2(\sqrt{x})^2 - \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}$$

Se finaliza el cálculo integrando respecto a x:

$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 y\,dA = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x\right)\Big|_1^3 =$$
$$= \frac{69}{8} - \left(-\frac{3}{8}\right) = 9$$

EJEMPLO 3 La descripción horizontal simple es mejor Halle el volumen V de la región comprendida entre el plano $z = 2x + 3y$ y el triángulo $\mathcal{D}$ de la f gura 8.

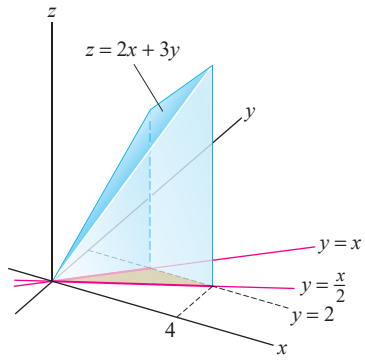


FIGURA 8

Solución El triángulo $\mathcal{D}$ está limitado por las rectas $y = x/2$, $y = x$ e $y = 2$. En la f gura 9 se observa que $\mathcal{D}$ es verticalmente simple, pero la curva superior no viene dada por una única fórmula: la fórmula cambia de $y = x$ a $y = 2$. Por tanto, es más cómodo describir $\mathcal{D}$ como una región horizontalmente simple (f gura 9):

$$\mathcal{D} : 0 \le y \le 2 \quad y \le x \le 2y$$

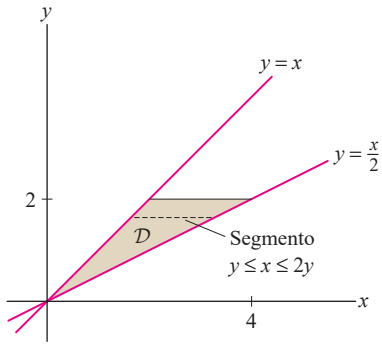


FIGURA 9

El volumen es igual a la integral doble de $f(x, y) = 2x + 3y$ sobre $\mathcal{D}$,

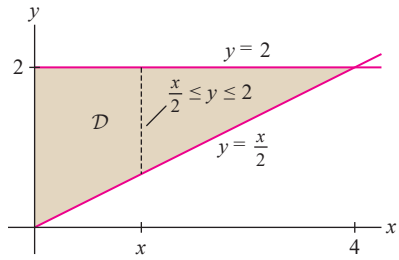
$$V = \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{x=y}^{2y} (2x + 3y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 (x^2 + 3yx)\Big|_{x=y}^{2y} dy = \int_0^2 ((4y^2 + 6y^2) - (y^2 + 3y^2))\,dy =$$

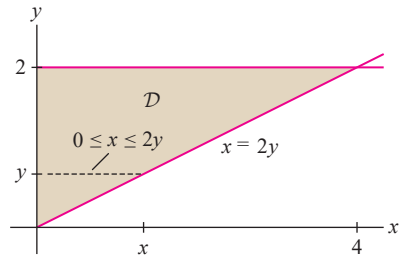
$$= \int_0^2 6y^2\,dy = 2y^3\Big|_0^2 = 16$$

El siguiente ejemplo muestra que, en algunas ocasiones, una integral iterada es más fácil de evaluar que la otra.

EJEMPLO 4 Elección de la mejor integral iterada Evalúe $\iint_{\mathcal{D}} e^{y^2}\,dA$ para $\mathcal{D}$ según se representa en la f gura 10.



(A) $\mathcal{D}$ como un dominio verticalmente simple: $0 \le x \le 4,\ x/2 \le y \le 2$



(B) $\mathcal{D}$ como un dominio horizontalmente simple: $0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2y$

FIGURA 10 La región $\mathcal{D}$ es horizontalmente y verticalmente simple.

Solución En primer lugar, se va a intentar describir $\mathcal{D}$ como un dominio verticalmente simple. Según la f gura 10(A), se tiene

$$\mathcal{D} : 0 \le x \le 4, \quad \frac{1}{2}x \le y \le 2 \quad \Rightarrow \quad \iint_{\mathcal{D}} e^{y^2}\, dA = \int_{x=0}^{4} \int_{y=x/2}^{2} e^{y^2}\, dy\, dx$$

La integral interior no se puede evaluar porque no se dispone de una primitiva explícita para e^{y^2}. Por tanto, se va a intentar describir $\mathcal{D}$ como horizontalmente simple [f gura 10(B)]:

$$\mathcal{D} : 0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le 2y$$

Esto conduce a una integral iterada que se puede evaluar:

$$\int_0^2 \int_{x=0}^{2y} e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^2 \left(x\, e^{y^2} \Big|_{x=0}^{2y} \right) dy = \int_0^2 2ye^{y^2}\, dy =$$

$$= e^{y^2}\Big|_0^2 = e^4 - 1$$

■ **EJEMPLO 5 Cambiando el orden de integración** Dibuje el dominio de integración $\mathcal{D}$ correspondiente a:

$$\int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^{3} x\, e^{y}\, dx\, dy$$

A continuación, cambie el orden de integración y evalúe.

Solución Los límites de integración proporcionan desigualdades que permiten describir el dominio $\mathcal{D}$ (como una región horizontalmente simple, pues dx precede a dy):

$$1 \le y \le 9 \qquad \sqrt{y} \le x \le 3$$

La representación de la región se encuentra en la f gura 11. Observe ahora que $\mathcal{D}$ también es verticalmente simple:

$$1 \le x \le 3 \qquad 1 \le y \le x^2$$

por lo que se puede reescribir la integral y evaluar:

$$\int_1^9 \int_{x=\sqrt{y}}^{3} x\, e^{y}\, dx\, dy = \int_1^3 \int_{y=1}^{x^2} x\, e^{y}\, dy\, dx = \int_1^3 \left(\int_{y=1}^{x^2} x\, e^{y}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \left(x\, e^{y} \Big|_{y=1}^{x^2} \right) dx = \int_1^3 (x\, e^{x^2} - ex)\, dx = \frac{1}{2}(e^{x^2} - ex^2)\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(e^9 - 9e) - 0 = \frac{1}{2}(e^9 - 9e)$$

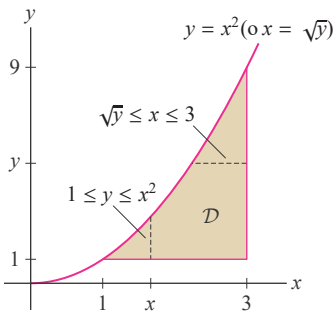


FIGURA 11 Descripción de $\mathcal{D}$ como una región horizontalmente, o verticalmente, simple.

La parte (a) del siguiente teorema es un enunciado formal del hecho que las funciones mayores tienen integrales mayores, un resultado que también se mencionó en el caso de una sola variable. La parte (b) es útil para estimar integrales.

TEOREMA 3 Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ funciones integrables sobre $\mathcal{D}$.

(a) Si $f(x,y) \le g(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathcal{D}$, entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \le \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dA \qquad \boxed{6}$$

(b) Si $m \le f(x,y) \le M$ para todo $(x,y) \in \mathcal{D}$, entonces:

$$m\,\text{Área}(\mathcal{D}) \le \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \le M\,\text{Área}(\mathcal{D}) \qquad \boxed{7}$$

Demostración Si $f(x,y) \le g(x,y)$, entonces toda suma de Riemann para $f(x,y)$ es menor o igual que la correspondiente suma de Riemann para g:

$$\sum f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j \le \sum g(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

Pasando al límite se obtiene (6). Ahora suponga que $f(x,y) \le M$ y aplique (6) con $g(x,y) = M$:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \le \iint_{\mathcal{D}} M\,dA = M\,\text{Área}(\mathcal{D})$$

Esto demuestra la mitad de (7). La otra mitad se demuestra de forma similar. ■

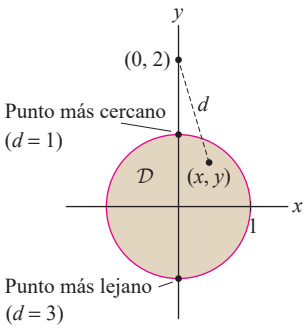


FIGURA 12 La distancia d de (x,y) a $(0,2)$ varía entre 1 y 3 para (x,y) en el disco unitario.

■ **EJEMPLO 6** Estime $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{dA}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}}$ siendo $\mathcal{D}$ el disco de radio 1 centrado en el origen.

Solución La cantidad $\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ es la distancia d desde (x,y) a $(0,2)$ y, según se observa en la f gura 12, $1 \le d \le 3$. Considerando los recíprocos, se tiene:

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} \le 1$$

Aplicando (7) con $m = \frac{1}{3}$ y $M = 1$,y usando el hecho que Área$(\mathcal{D}) = \pi$, se obtiene:

$$\frac{\pi}{3} \le \iint_{\mathcal{D}} \frac{dA}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} \le \pi$$

■

El **valor medio** (o **valor promedio**) de una función $f(x,y)$ sobre un dominio $\mathcal{D}$, que se denotará como $\overline{f}$, es la cantidad:

$$\overline{f} = \frac{1}{\text{Área}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \frac{\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,dA} \qquad \boxed{8}$$

◀··· ***RECORDATORIO*** *La ecuación (8) es similar a la definición de valor medio en una variable:*

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b 1\,dx}$$

Equivalentemente, $\overline{f}$ es el valor que cumple la relación:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \overline{f} \cdot \text{Área}(\mathcal{D})$$

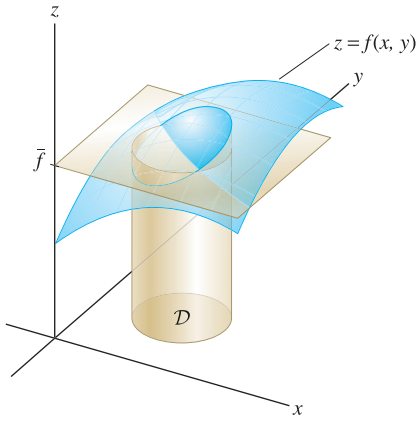


FIGURA 13

UN APUNTE GRÁFICO La región sólida por debajo de la gráf ca tiene el mismo volumen (con signo) que el cilindro de base $\mathcal{D}$ y altura $\overline{f}$ (f gura 13).

EJEMPLO 7 Un arquitecto necesita saber la altura media $\overline{H}$ del techo de una pagoda cuya base $\mathcal{D}$ es el cuadrado $[-4,4] \times [-4,4]$ y su techo es la gráf ca de:

$$H(x,y) = 32 - x^2 - y^2$$

donde las distancias se encuentran expresadas en pies (f gura 14). Calcule $\overline{H}$.

Solución En primer lugar, calcule la integral de $H(x,y)$ sobre $\mathcal{D}$:

$$\iint_{\mathcal{D}} (32 - x^2 - y^2)\,dA = \int_{-4}^{4}\int_{-4}^{4} (32 - x^2 - y^2)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-4}^{4} \left(\left(32y - x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-4}^{4} \right) dx = \int_{-4}^{4} \left(\frac{640}{3} - 8x^2 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{640}{3}x - \frac{8}{3}x^3 \right) \Big|_{-4}^{4} = \frac{4096}{3}$$

El área de $\mathcal{D}$ es $8 \times 8 = 64$, por lo que la altura media del techo de la pagoda es:

$$\overline{H} = \frac{1}{\text{Área}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} H(x,y)\,dA = \frac{1}{64}\left(\frac{4096}{3} \right) = \frac{64}{3} \approx 21{,}3 \text{ ft}$$

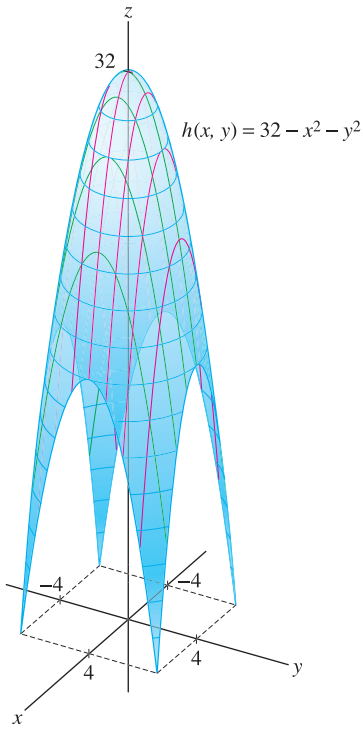


FIGURA 14 Pagoda de techo $H(x,y) = 32 - x^2 - y^2$.

El teorema del valor medio af rma que una función continua sobre un dominio $\mathcal{D}$ debe alcanzar su valor medio en algún punto P de $\mathcal{D}$, siempre que $\mathcal{D}$ sea cerrado, acotado y también **arcoconexo** (vea una demostración en el problema 63). Por def nición, un dominio $\mathcal{D}$ es arcoconexo sii dos puntos cualesquiera de $\mathcal{D}$ se pueden unir mediante una curva en $\mathcal{D}$ (f gura 15).

(A) Dominio arcoconexo: dos puntos cualesquiera de $\mathcal{D}$ se pueden unir mediante una curva que se encuentra totalmente en $\mathcal{D}$.

(B) Dominio no arcoconexo.

FIGURA 15

TEOREMA 4 Teorema del valor medio para integrales dobles Si $f(x,y)$ es continua y $\mathcal{D}$ es cerrado, acotado y arcoconexo, entonces existe un punto $P \in \mathcal{D}$ tal que:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = f(P)\,\text{Área}(\mathcal{D}) \qquad 9$$

Equivalentemente, $f(P) = \overline{f}$, donde $\overline{f}$ es el valor medio de f sobre $\mathcal{D}$.

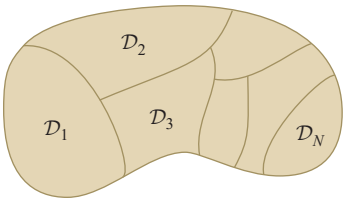


FIGURA 16 La región $\mathcal{D}$ es una unión de dominios más pequeños.

Descomponiendo el dominio en dominios más pequeños

Las integrales dobles son aditivas respecto al dominio: si $\mathcal{D}$ es la unión de dominios $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_N$ que no se superponen, con la posible excepción de las curvas de la frontera (figura 16), entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\,dA + \cdots + \iint_{\mathcal{D}_N} f(x,y)\,dA$$

La aditividad se puede usar para evaluar integrales sobre dominios $\mathcal{D}$ que no son simples pero que se pueden descomponer en un número finito de dominios simples.

Finalizamos esta sección con una observación simple pero útil. Si $f(x,y)$ es una función continua sobre un *pequeño* dominio $\mathcal{D}$, entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \approx \underbrace{f(P)\,\text{Área}(\mathcal{D})}_{\text{Valor de la función} \times \text{área}} \qquad \textbf{10}$$

donde P es cualquier punto intermedio en $\mathcal{D}$. En realidad se puede escoger P de manera que (10) sea una igualdad, según el teorema 4. Pero si $\mathcal{D}$ es pequeño, entonces f es prácticamente constante sobre $\mathcal{D}$ y (10) proporciona una buena aproximación para todo $P \in \mathcal{D}$.

En general, la aproximación (10) es útil solamente si $\mathcal{D}$ es pequeño tanto en amplitud como en longitud, es decir, si $\mathcal{D}$ se encuentra contenido en una circunferencia de radio pequeño. Si el área de $\mathcal{D}$ es pequeña pero $\mathcal{D}$ es muy largo y estrecho, entonces f puede ser muy diferente de una constante sobre $\mathcal{D}$.

Si el dominio $\mathcal{D}$ no es pequeño, se puede dividir en N subdominios más pequeños $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_N$ y seleccionar puntos intermedios P_j en $\mathcal{D}_j$. Según la aditividad:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \sum_{j=1}^{N} \iint_{\mathcal{D}_j} f(x,y)\,dA \approx \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\,\text{Área}(\mathcal{D}_j)$$

con lo que se obtiene la aproximación:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \approx \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\,\text{Área}(\mathcal{D}_j) \qquad \textbf{11}$$

Se puede pensar en la ec. (11) como en una generalización de la aproximación por sumas de Riemann. En una suma de Riemann, $\mathcal{D}$ se divide en rectángulos $\mathcal{R}_{ij}$ de área $\Delta A_{ij} = \Delta x_i\,\Delta y_j$.

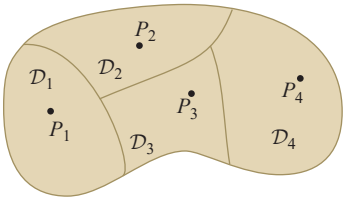


FIGURA 17

j	1	2	3	4
Área($\mathcal{D}_j$)	1	1	0,9	1,2
$f(P_j)$	1,8	2,2	2,1	2,4

EJEMPLO 8 Estime $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$ para el dominio $\mathcal{D}$ de la figura 17, usando las áreas y valores proporcionados allí y en la tabla que se encuentra adjunta.

Solución

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \approx \sum_{j=1}^{4} f(P_j)\,\text{Area}(\mathcal{D}_j) =$$
$$= (1{,}8)(1) + (2{,}2)(1) + (2{,}1)(0{,}9) + (2{,}4)(1{,}2) \approx 8{,}8$$

16.2 RESUMEN

- Supondremos que $\mathcal{D}$ es un dominio cerrado y acotado cuya frontera es una curva cerrada simple que, o bien es suave, o bien presenta un número finito de picos. La integral doble se define como:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}(x,y)\,dA$$

donde $\mathcal{R}$ es un rectángulo que contiene a $\mathcal{D}$ y $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ si $(x,y) \in \mathcal{D}$, y $\tilde{f}(x,y) = 0$ en caso contrario. El valor de la integral no depende de la elección de $\mathcal{R}$.

- La integral doble def ne el volumen con signo entre la gráf ca de $f(x,y)$ y el plano xy, donde a las regiones por debajo del plano xy se les asigna un volumen negativo.
- Para cualquier constante C, $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} C\,dA = C \cdot \text{Área}(\mathcal{D})$.
- Si $\mathcal{D}$ es verticalmente, u horizontalmente, simple, $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$ se puede evaluar como una integral iterada:

Dominio verticalmente simple: $a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)$	$\displaystyle\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$
Dominio horizontalmente simple: $c \le y \le d, \quad g_1(y) \le x \le g_2(y)$	$\displaystyle\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

- Si $f(x,y) \le g(x,y)$ sobre $\mathcal{D}$, entonces $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \le \iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dA$.
- Si m es el valor mínimo y M es el valor máximo de f sobre $\mathcal{D}$, entonces:

$$m\ \text{Área}(\mathcal{D}) \le \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \le \iint_{\mathcal{D}} M\,dA = M\ \text{Área}(\mathcal{D})$$

- El *valor medio* de f en $\mathcal{D}$ es:

$$\overline{f} = \frac{1}{\text{Área}(\mathcal{D})} \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \frac{\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA}{\iint_{\mathcal{D}} 1\,dA}$$

- *Teorema del valor medio para integrales*: si $f(x,y)$ es continua y $\mathcal{D}$ es cerrado, acotado y arcoconexo, entonces existe un punto $P \in \mathcal{D}$ tal que:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = f(P)\ \text{Área}(\mathcal{D})$$

Equivalentemente, $f(P) = \overline{f}$, donde $\overline{f}$ es el valor medio de f sobre $\mathcal{D}$.

- *Aditividad respecto al dominio:* si $\mathcal{D}$ es la unión de dominios $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_N$ que no se superponen (con la posible excepción de sus fronteras), entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \sum_{j=1}^{N} \iint_{\mathcal{D}_j} f(x,y)\,dA$$

- Si los dominios $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_N$ son pequeños y P_j es un punto intermedio en $\mathcal{D}_j$, entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \approx \sum_{j=1}^{N} f(P_j)\text{Área}(\mathcal{D}_j)$$

16.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones no tiene sentido?

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^x f(x,y)\,dy\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_1^y f(x,y)\,dy\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^y f(x,y)\,dy\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx$

2. Dibuje un dominio en el plano que no sea ni horizontal ni verticalmente simple.

3. ¿Cuál de las cuatro regiones de la f gura 18 es el dominio de integración para $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}/2}^{0} \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$?

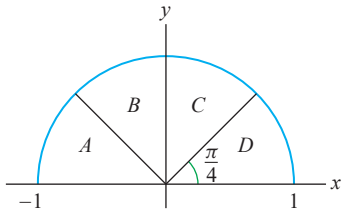


FIGURA 18

4. Sea $\mathcal{D}$ el disco unitario. Si el valor máximo de $f(x,y)$ sobre $\mathcal{D}$ es 4, entonces el mayor valor de $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$ es (elija la respuesta correcta):

(a) 4 **(b)** 4π **(c)** $\dfrac{4}{\pi}$

Problemas

1. Calcule la suma de Riemann para $f(x,y) = x - y$ y el dominio sombreado $\mathcal{D}$ de la f gura 19 con las dos elecciones de los puntos intermedios, • y ○. ¿Cuál de ellas considera que proporciona una mejor aproximación de la integral de f sobre $\mathcal{D}$? ¿Por qué?

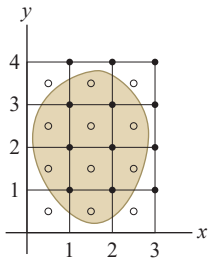


FIGURA 19

2. Los valores aproximados de $f(x,y)$ en los puntos intermedios de una cuadrícula se encuentran en la f gura 20. Estime $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$ para el dominio sombreado calculando la suma de Riemann con los puntos intermedios indicados.

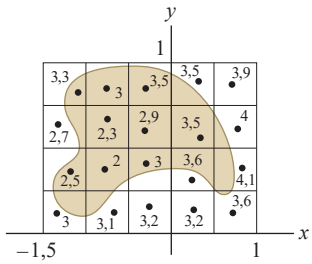


FIGURA 20

3. Exprese el dominio $\mathcal{D}$ de la f gura 21 como una región verticalmente simple, y también como una región horizontalmente simple; y evalúe la integral de $f(x,y) = xy$ sobre $\mathcal{D}$ como una integral iterada de dos maneras.

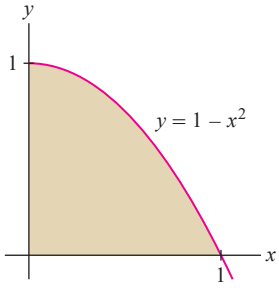


FIGURA 21

4. Dibuje el dominio

$$\mathcal{D} : 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le 4 - x^2$$

y evalúe $\iint_{\mathcal{D}} y\,dA$ como una integral iterada.

En los problemas 5-7, calcule la integral doble de $f(x,y) = x^2y$ sobre el dominio sombreado dado por la f gura 22.

5. (A) **6.** (B) **7.** (C)

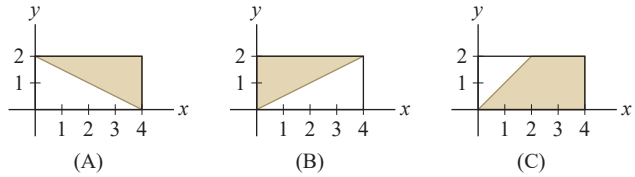


FIGURA 22

8. Dibuje el dominio $\mathcal{D}$ def nido por $x + y \le 12$, $x \ge 4$, $y \ge 4$ y calcule $\iint_{\mathcal{D}} e^{x+y}\,dA$.

9. Integre $f(x,y) = x$ sobre la región limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

10. Dibuje la región $\mathcal{D}$ entre $y = x^2$ e $y = x(1 - x)$. Exprese $\mathcal{D}$ como una región simple y calcule la integral de $f(x,y) = 2y$ sobre $\mathcal{D}$.

11. Evalúe $\iint_{\mathcal{D}} \dfrac{y}{x}\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es la parte sombreada del semicírculo de radio 2 de la f gura 23.

12. Calcule la integral doble de $f(x,y) = y^2$ sobre el rombo $\mathcal{R}$ de la f gura 24.

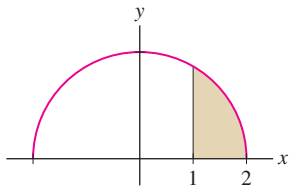


FIGURA 23 $y = \sqrt{4 - x^2}$.

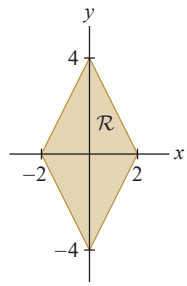


FIGURA 24 $|x| + \frac{1}{2}|y| \le 1$.

13. Calcule la integral doble de $f(x,y) = x + y$ sobre el dominio $\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$.

14. Integre $f(x,y) = (x + y + 1)^{-2}$ sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ y $(0,8)$.

15. Calcule la integral de $f(x,y) = x$ sobre la región $\mathcal{D}$ limitada, por encima, por $y = x(2 - x)$ y, por debajo, por $x = y(2 - y)$. *Indicación:* aplique la fórmula cuadrática a la curva que limita inferiormente para expresar y como función de x.

16. Integre $f(x,y) = x$ sobre la región limitada por $y = x$, $y = 4x - x^2$ e $y = 0$ de dos maneras: como una región verticalmente simple y como una región horizontalmente simple.

En los problemas 17-24, calcule la integral doble de $f(x,y)$ sobre el dominio $\mathcal{D}$ que se indica.

17. $f(x,y) = x^2y$; $\quad 1 \le x \le 3, \quad x \le y \le 2x + 1$

18. $f(x,y) = 1$; $\quad 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e^x$

19. $f(x,y) = x$; $\quad 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e^{x^2}$

20. $f(x,y) = \cos(2x + y)$; $\quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le y \le 2x$

21. $f(x,y) = 2xy$; limitado por $x = y$, $x = y^2$

22. $f(x,y) = \operatorname{sen} x$; limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = \cos x$

23. $f(x,y) = e^{x+y}$; limitado por $y = x - 1$, $y = 12 - x$ para $2 \le y \le 4$

24. $f(x,y) = (x + y)^{-1}$; limitado por $y = x$, $y = 1$, $y = e$, $x = 0$

En los problemas 25-28, dibuje el dominio de integración y exprese la integral en el orden opuesto.

25. $\displaystyle\int_0^4 \int_x^4 f(x,y)\,dy\,dx$

26. $\displaystyle\int_4^9 \int_{\sqrt{y}}^3 f(x,y)\,dx\,dy$

27. $\displaystyle\int_4^9 \int_2^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

28. $\displaystyle\int_0^1 \int_{e^x}^e f(x,y)\,dy\,dx$

29. Dibuje el dominio $\mathcal{D}$ correspondiente a:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{4x^2 + 5y}\,dx\,dy$$

A continuación, cambie el orden de integración y evalúe.

30. Cambie el orden de integración y evalúe:

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} x\cos(xy)\,dx\,dy$$

Explique la simplificación que ha conseguido al cambiar el orden de integración.

31. Calcule la integral de $f(x,y) = (\ln y)^{-1}$ sobre el dominio $\mathcal{D}$ limitado por $y = e^x$ e $y = e^{\sqrt{x}}$. *Indicación:* elija un orden de integración que haga posible la evaluación de la integral.

32. Evalúe, por medio de un cambio en el orden de integración:

$$\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x\,dx\,dy}{(3x^2 + y)^{1/2}}$$

En los problemas 33-36, dibuje el dominio de integración. A continuación, cambie el orden de integración y evalúe. Explique la simplificación que consigue al cambiar el orden.

33. $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,dy$

34. $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1}\,dx\,dy$

35. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y=x}^1 x\,e^{y^3}\,dy\,dx$

36. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y=x^{2/3}}^1 x\,e^{y^4}\,dy\,dx$

37. Dibuje el dominio $\mathcal{D}$ donde $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, y x, *o* y, es mayor que 1. A continuación calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} e^{x+y}\,dA$.

38. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} e^x\,dA$, donde $\mathcal{D}$ está limitado por las rectas $y = x + 1$, $y = x$, $x = 0$ y $x = 1$.

En los problemas 39-42, calcule la integral doble de $f(x,y)$ sobre el triángulo que se indica en la figura 25.

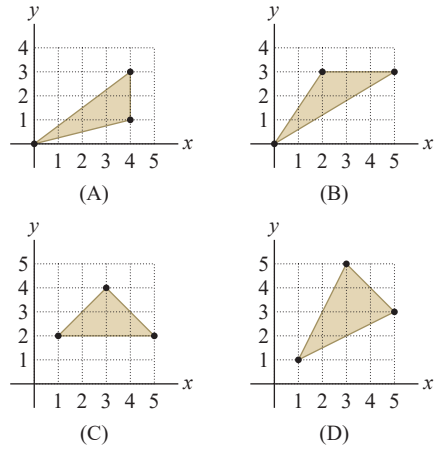


FIGURA 25

39. $f(x,y) = e^{x^2}$, (A)

40. $f(x,y) = 1 - 2x$, (B)

41. $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$, (C)

42. $f(x,y) = x + 1$, (D)

43. Calcule la integral doble de $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}$ sobre la región $\mathcal{D}$ de la figura 26.

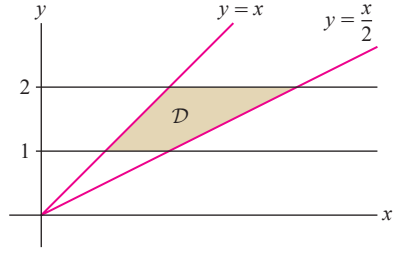


FIGURA 26

44. Evalúe $\iint_{\mathcal{D}} x\,dA$ para $\mathcal{D}$ dado por la figura 27.

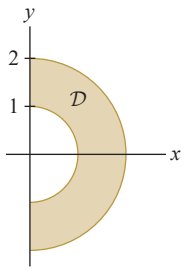


FIGURA 27

45. Halle el volumen de la región limitada por $z = 40 - 10y$, $z = 0$, $y = 0$ e $y = 4 - x^2$.

46. Halle el volumen de la región comprendida entre $z = 1 - y^2$ y $z = y^2 - 1$ para $0 \le x \le 2$.

47. Calcule el valor medio de $f(x,y) = e^{x+y}$ sobre el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

48. Calcule la altura media sobre el eje x de un punto en la región $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$.

49. Calcule la altura media del "techo" de la figura 28 definido por $z = y^2 \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$.

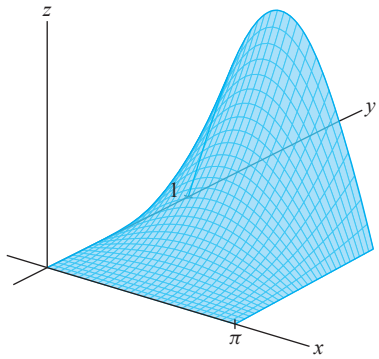


FIGURA 28

50. Calcule el valor medio de la coordenada x de un punto sobre la semicircunferencia $x^2 + y^2 \le R^2$, $x \ge 0$. ¿Cuál es el valor medio de la coordenada y?

51. ¿Cuál es el valor medio de la función lineal:

$$f(x,y) = mx + ny + p$$

sobre la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1$? Razone más por simetría que utilizando cálculo.

52. Halle el valor medio del cuadrado de la distancia desde el origen a un punto en el dominio $\mathcal{D}$ de la figura 29.

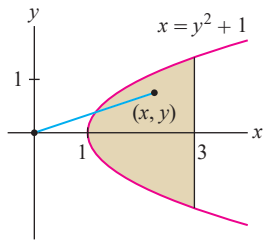


FIGURA 29

53. Sea $\mathcal{D}$ el rectángulo $0 \le x \le 2$, $-\frac{1}{8} \le y \le \frac{1}{8}$ y sea $f(x,y) = \sqrt{x^3 + 1}$. Demuestre que:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \le \frac{3}{2}$$

54. (a) Use la desigualdad $0 \le \operatorname{sen} x \le x$ para $x \ge 0$, para demostrar que:

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(xy)\,dx\,dy \le \frac{1}{4}$$

(b) Use un programa informático de cálculo simbólico para evaluar la integral doble con tres decimales de precisión.

55. Demuestre la desigualdad $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dA}{4 + x^2 + y^2} \le \pi$, donde $\mathcal{D}$ es el disco $x^2 + y^2 \le 4$.

56. Sea $\mathcal{D}$ el dominio limitado por $y = x^2 + 1$ y $y = 2$. Demuestre la desigualdad:

$$\frac{4}{3} \le \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)dA \le \frac{20}{3}$$

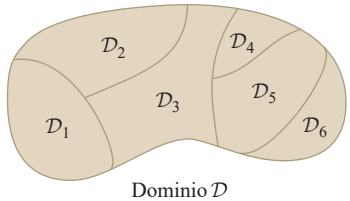
57. Sea $\overline{f}$ el valor medio de $f(x,y) = xy^2$ sobre $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,4]$. Halle un punto $P \in \mathcal{D}$ tal que $f(P) = \overline{f}$ (la existencia de este punto queda garantizada por el teorema del valor medio para integrales dobles).

58. Compruebe el teorema del valor medio para integrales dobles, para $f(x,y) = e^{x-y}$ sobre el triángulo limitado por $y = 0$, $x = 1$ e $y = x$.

En los problemas 59 y 60, utilice (11) para estimar la integral doble.

59. La siguiente tabla recoge las áreas de los subdominios $\mathcal{D}_j$ del dominio $\mathcal{D}$ de la figura 30 y los valores de una función $f(x,y)$ en los puntos intermedios $P_j \in \mathcal{D}_j$. Estime $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$.

j	1	2	3	4	5	6
Área($\mathcal{D}_j$)	1,2	1,1	1,4	0,6	1,2	0,8
$f(P_j)$	9	9,1	9,3	9,1	8,9	8,8



Dominio $\mathcal{D}$

FIGURA 30

60. El dominio $\mathcal{D}$ entre las circunferencias de radios 5 y 5,2 en el primer cuadrante, en la figura 31 se divide en seis subdominios de amplitud angular $\Delta\theta = \frac{\pi}{12}$; los valores de la función $f(x,y)$ en los puntos intermedios también se encuentran dados en la figura. Calcule el área de los subdominios y estime $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$.

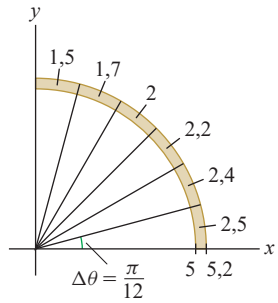


FIGURA 31

61. Según la ec. (3), el área de un dominio $\mathcal{D}$ es igual a $\iint_{\mathcal{D}} 1\,dA$. Demuestre que si $\mathcal{D}$ es la región comprendida entre dos curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, con $g_2(x) \le g_1(x)$ para $a \le x \le b$, entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} 1\,dA = \int_a^b (g_1(x) - g_2(x))\,dx$$

Problemas avanzados

62. Sea $\mathcal{D}$ un dominio cerrado y arcoconexo y sean $P, Q \in \mathcal{D}$. Según el teorema del valor intermedio (TVI), si f es continua sobre $\mathcal{D}$, entonces $f(x,y)$ alcanza cualquier valor entre $f(P)$ y $f(Q)$ en algún punto de $\mathcal{D}$.

(a) Muestre, mediante un contraejemplo, que el TVI es falso si $\mathcal{D}$ no es arcoconexo.

(b) Demuestre el TVI de la siguiente manera: sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria tal que $\mathbf{c}(0) = P$ y $\mathbf{c}(1) = Q$ (una trayectoria así existe porque $\mathcal{D}$ es arcoconexo). Aplique el TVI en una variable a la función compuesta $f(\mathbf{c}(t))$.

63. Use el hecho que una función continua sobre un dominio cerrado $\mathcal{D}$ alcanza un valor mínimo m y uno máximo M, junto con el teorema 3, para demostrar que el valor medio $\overline{f}$ se encuentra entre m y M. A continuación, use el TVI del problema 62 para demostrar el teorema del valor medio para integrales dobles.

64. Sea $f(y)$ una función únicamente de y, y sea

$$G(t) = \int_0^t \int_0^x f(y)\,dy\,dx.$$

(a) Use el teorema fundamental del cálculo para demostrar que $G''(t) = f(t)$.

(b) Pruebe, cambiando el orden de la integral doble, que $G(t) = \int_0^t (t-y)f(y)\,dy$. Esto demuestra que la "segunda primitiva" de $f(y)$ se puede expresar como una sola integral.

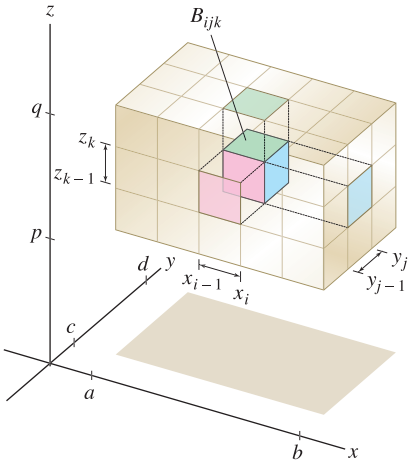


FIGURA 1 La caja $\mathcal{B} = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ descompuesta en cajas menores.

16.3 Integrales triples

Las integrales triples de funciones $f(x,y,z)$ de tres variables son una generalización bastante sencilla de las integrales dobles. En lugar de un rectángulo en el plano, el dominio es ahora un ortoedro o cuboide (figura 1), al que nos referiremos como a una caja:

$$\mathcal{B} = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$$

formada por todos los puntos (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ tales que:

$$a \le x \le b \qquad c \le y \le d \qquad p \le z \le q$$

Para integrar sobre esta caja, se divide la caja (como es habitual) en "sub"-cajas:

$$\mathcal{B}_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

seleccionando particiones en los tres intervalos:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d$$
$$p = z_0 < z_1 < \cdots < z_L = q$$

Aquí N, M y L son enteros positivos. El volumen de $\mathcal{B}_{ijk}$ es $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$ donde:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \qquad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

A continuación, elija un punto intermedio P_{ijk} en cada caja $\mathcal{B}_{ijk}$ y construya la suma de Riemann:

$$S_{N,M,L} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} f(P_{ijk})\,\Delta V_{ijk}$$

Como en la sección anterior, se denota $\mathcal{P} = \{\{x_i\}, \{y_j\}, \{z_k\}\}$ como la partición y $\|\mathcal{P}\|$ como el máximo de las amplitudes $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$. Si las sumas $S_{N,M,L}$ tienden a un límite cuando $\|\mathcal{P}\| \to 0$ para cualquier elección de puntos intermedios, se dice que f es **integrable** sobre $\mathcal{B}$. El valor límite se denota como:

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} S_{N,M,L}$$

Las integrales triples cumplen la mayor parte de las propiedades de las integrales dobles y simples. Las propiedades de linealidad se verif can y las funciones continuas son integrables sobre una caja $\mathcal{B}$. Además las integrales triples se pueden evaluar como integrales iteradas.

TEOREMA 1 Teorema de Fubini para integrales triples La integral triple de una función continua $f(x,y,z)$ sobre una caja $\mathcal{B} = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ es igual a la integral iterada:

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\,dV = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \int_{z=p}^{q} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Además, la integral iterada se puede evaluar en cualquier orden.

La notación dA, que se utilizó en la sección previa, sugiere área y es así para integrales dobles. Análogamente, dV sugiere volumen y se utiliza en la notación para integrales triples.

Tal y como se observó en el enunciado del teorema, se tiene libertad para evaluar la integral iterada en cualquier orden (hay seis órdenes diferentes). Por ejemplo:

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \int_{z=p}^{q} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_{z=p}^{q} \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

■ **EJEMPLO 1 Integración sobre una caja** Calcule la integral $\iiint_{\mathcal{B}} x^2 e^{y+3z}\,dV$, donde $\mathcal{B} = [1,4] \times [0,3] \times [2,6]$.

Solución Escribimos esta integral triple como una integral iterada:

$$\iiint_{\mathcal{B}} x^2 e^{y+3z}\,dV = \int_{1}^{4} \int_{0}^{3} \int_{2}^{6} x^2 e^{y+3z}\,dz\,dy\,dx$$

Etapa 1. **Evalúe la integral interna respecto a z, manteniendo x e y constantes**

$$\int_{z=2}^{6} x^2 e^{y+3z}\,dz = \frac{1}{3} x^2 e^{y+3z}\Big|_2^6 = \frac{1}{3} x^2 e^{y+18} - \frac{1}{3} x^2 e^{y+6} = \frac{1}{3}(e^{18} - e^6) x^2 e^y$$

Etapa 2. **Evalúe la integral intermedia respecto a y, manteniendo x constante**

$$\int_{y=0}^{3} \frac{1}{3}(e^{18} - e^6) x^2 e^y\,dy = \frac{1}{3}(e^{18} - e^6) x^2 \int_{y=0}^{3} e^y\,dy = \frac{1}{3}(e^{18} - e^6)(e^3 - 1) x^2$$

Etapa 3. **Evalúe la integral externa respecto a x**

$$\iiint_{\mathcal{B}} (x^2 e^{y+3z})\,dV = \frac{1}{3}(e^{18} - e^6)(e^3 - 1) \int_{x=1}^{4} x^2\,dx = 7(e^{18} - e^6)(e^3 - 1)$$ ■

Observe que, en el ejemplo previo, el integrando factoriza como producto de tres funciones $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$, que son:

$$f(x,y,z) = x^2 e^{y+3z} = x^2 e^y e^{3z}$$

Debido a esto, la integral se puede evaluar simplemente como el producto de tres integrales simples:

$$\iiint_{\mathcal{B}} x^2 e^y e^{3z}\, dV = \left(\int_1^4 x^2\, dx\right)\left(\int_0^3 e^y\, dy\right)\left(\int_2^6 e^{3z}\, dz\right) =$$

$$= (21)(e^3 - 1)\left(\frac{e^{18} - e^6}{3}\right) = 7(e^{18} - e^6)(e^3 - 1)$$

A continuación, en lugar de sobre una caja, se va a integrar sobre una región sólida $\mathcal{W}$ que sea *simple* como en la f gura 2. Dicho de otro modo, $\mathcal{W}$ es la región entre las superf cies $z = z_1(x,y)$ y $z = z_2(x,y)$ sobre un dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy. En este caso:

$$\mathcal{W} = \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\} \qquad \boxed{1}$$

El dominio $\mathcal{D}$ es la **proyección** ortogonal de $\mathcal{W}$ sobre el plano xy.

En términos formales, como en el caso de las integrales dobles, se def ne la integral triple de $f(x,y,z)$ sobre $\mathcal{W}$ como:

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\, dV = \iiint_{\mathcal{B}} \tilde{f}(x,y,z)\, dV$$

donde $\mathcal{B}$ es una caja que contiene a $\mathcal{W}$ y $\tilde{f}$ es la función que es igual a f sobre $\mathcal{W}$ e igual a cero fuera de $\mathcal{W}$. La integral triple existe, suponiendo que $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ y el integrando f sean funciones continuas. Sin embargo, en la práctica, las integrales triples se evalúan como integrales iteradas. Esto queda justif cado por el siguiente teorema, cuya demostración es análoga a la del teorema 2 de la sección 16.2.

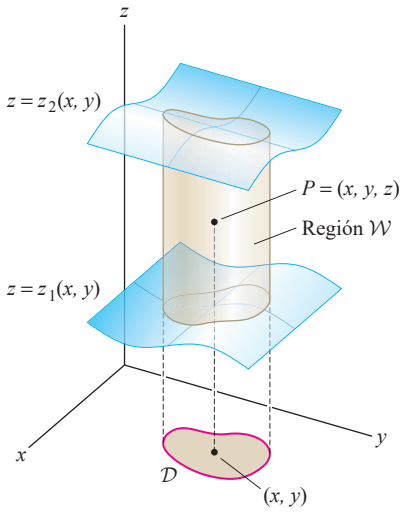


FIGURA 2 El punto $P = (x,y,z)$ se halla en la región simple $\mathcal{W}$ si $(x,y) \in \mathcal{D}$ y $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$.

TEOREMA 2 La integral triple de una función continua f sobre la región:

$$\mathcal{W} : (x,y) \in \mathcal{D}, \quad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$$

es igual a la integral iterada:

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\, dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right) dA$$

Una cuestión que no se ha tratado hasta el momento es la interpretación geométrica de las integrales triples. Una integral doble representa el volumen con signo de la región tridimensional comprendida entre la gráf ca de $z = f(x,y)$ y el plano xy. La gráf ca de una función $f(x,y,z)$ de tres variables se encuentra en un espacio *de cuatro dimensiones* y, por tanto, una integral triple representa un volumen cuatridimensional. Resulta difícil o incluso imposible visualizar este volumen. Por otra parte, las integrales triples pueden representar muchos otros tipos de cantidades. Algunos ejemplos son la masa total, el valor esperado, probabilidades y centros de masas (vea la sección 16.5).

Además, el volumen V de una región $\mathcal{W}$ se def ne como la integral de la función constante $f(x,y,z) = 1$:

$$V = \iiint_{\mathcal{W}} 1\, dV$$

De forma más general, las integrales de funciones de n variables (para cualquier n) aparecen de forma natural en diferentes contextos. Por ejemplo, la distancia media entre dos puntos en una bola se expresa como una integral en seis variables porque se integra sobre todas las posibles coordenadas de los dos puntos. Cada punto tiene tres coordenadas, lo que da lugar a seis variables.

En particular, si $\mathcal{W}$ es una región simple entre $z = z_1(x,y)$ y $z = z_2(x,y)$, entonces:

$$\iiint_{\mathcal{W}} 1\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} 1\,dz \right) dA = \iint_{\mathcal{D}} (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dA$$

Así, la integral triple es igual a la doble integral definiendo el volumen de la región comprendida entre las dos superficies.

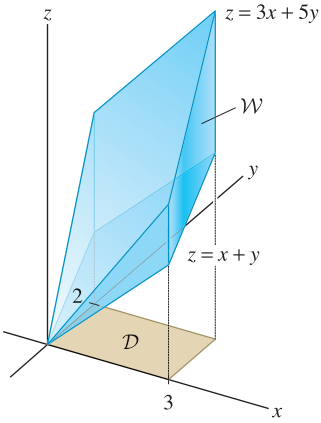


FIGURA 3 Región $\mathcal{W}$ entre los planos $z = x + y$ y $z = 3x + 5y$ que se encuentra por encima de $\mathcal{D} = [0,3] \times [0,2]$.

EJEMPLO 2 Región sólida con una base rectangular Evalúe $\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV$, donde $\mathcal{W}$ es la región comprendida entre los planos $z = x + y$ y $z = 3x + 5y$ que se encuentra por encima del rectángulo $\mathcal{D} = [0,3] \times [0,2]$ (figura 3).

Solución Aplique el teorema 2 con $z_1(x,y) = x + y$ y $z_2(x,y) = 3x + 5y$:

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz \right) dA = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{2} \int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz\,dy\,dx$$

Etapa 1. **Evalúe la integral interior respecto a z**

$$\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=x+y}^{3x+5y} = \frac{1}{2}(3x+5y)^2 - \frac{1}{2}(x+y)^2 = 4x^2 + 14xy + 12y^2 \qquad \boxed{2}$$

Etapa 2. **Evalúe el resultado respecto a y**

$$\int_{y=0}^{2} (4x^2 + 14xy + 12y^2)\,dy = (4x^2y + 7xy^2 + 4y^3)\Big|_{y=0}^{2} = 8x^2 + 28x + 32$$

Etapa 3. **Evalúe el resultado respecto a x**

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \int_{x=0}^{3} (8x^2 + 28x + 32)\,dx = \left(\frac{8}{3}x^3 + 14x^2 + 32x \right)\Big|_0^3 =$$

$$= 72 + 126 + 96 = 294$$

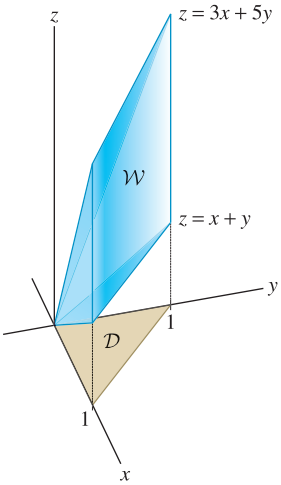


FIGURA 4 Región $\mathcal{W}$ entre los planos $z = x + y$ y $z = 3x + 5y$ que se encuentra por encima del triángulo $\mathcal{D}$.

EJEMPLO 3 Región sólida con una base triangular Evalúe $\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV$, donde $\mathcal{W}$ es la región de la figura 4.

Solución Este ejemplo es similar al anterior, pero ahora $\mathcal{W}$ se encuentra por encima del triángulo $\mathcal{D}$ en el plano xy definido por:

$$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1 - x$$

Por tanto, la integral triple es igual a la integral iterada:

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz \right) dA = \underbrace{\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x}}_{\substack{\text{Integral} \\ \text{sobre el triángulo}}} \int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz\,dy\,dx$$

La integral interna se ha calculado como en el ejemplo previo [vea la ec. (2)]:

$$\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{x+y}^{3x+5y} = 4x^2 + 14xy + 12y^2$$

Ahora, integre respecto a y:

$$\int_{y=0}^{1-x} (4x^2 + 14xy + 12y^2)\,dy = (4x^2y + 7xy^2 + 4y^3)\Big|_{y=0}^{1-x} =$$

$$= 4x^2(1-x) + 7x(1-x)^2 + 4(1-x)^3 =$$

$$= 4 - 5x + 2x^2 - x^3$$

Y f nalmente:

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \int_{x=0}^{1} (4 - 5x + 2x^2 - x^3)\,dx =$$

$$= 4 - \frac{5}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{23}{12}$$

■

■ **EJEMPLO 4 Región entre dos superficies que se cortan** Integre $f(x,y,z) = x$ sobre la región $\mathcal{W}$ limitada superiormente por $z = 4 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = x^2 + 3y^2$ en el octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Solución La región $\mathcal{W}$ es simple, por lo que:

$$\iiint_{\mathcal{W}} x\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \int_{z=x^2+3y^2}^{4-x^2-y^2} x\,dz\,dA$$

donde $\mathcal{D}$ es la proyección de $\mathcal{W}$ sobre el plano xy. Para evaluar la integral sobre $\mathcal{D}$, se debe hallar la ecuación de la trayectoria curvada de la frontera de $\mathcal{D}$.

Etapa 1. **Halle la frontera de $\mathcal{D}$**

Las superf cies superior e inferior se cortan en los puntos que tienen la misma altura:

$$z = x^2 + 3y^2 = 4 - x^2 - y^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 + 2y^2 = 2$$

Por tanto, como se ve en la f gura 5, $\mathcal{W}$ se proyecta sobre el dominio $\mathcal{D}$ formado por la cuarta parte de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ que está en el primer cuadrante. Esta elipse corta a los ejes en $(\sqrt{2}, 0)$ y en $(0, 1)$.

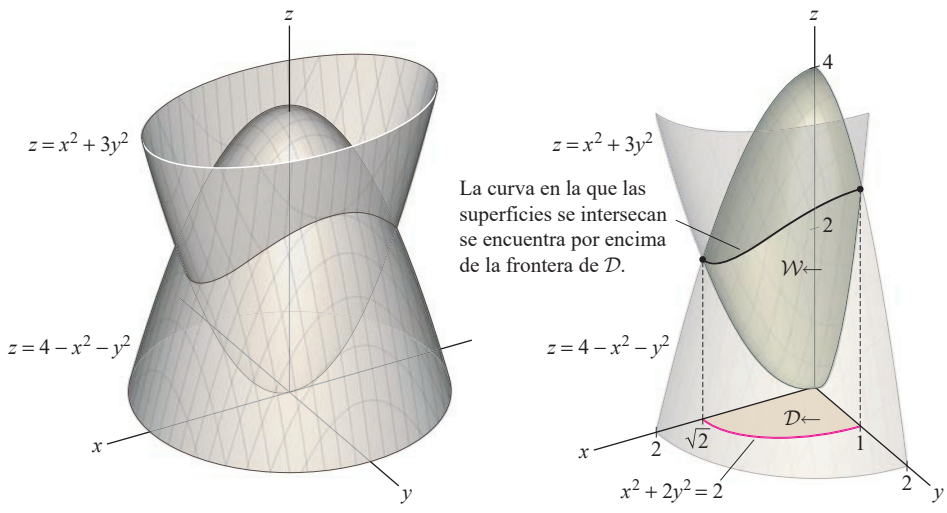


FIGURA 5 Región $x^2 + 3y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

Etapa 2. **Exprese $\mathcal{D}$ como un dominio simple**

Se puede integrar en cualquiera de los órdenes $dy\,dx$ o $dx\,dy$. Si se elige $dx\,dy$, entonces y varía de 0 a 1 y el dominio se describe como:

$$\mathcal{D}: 0 \le y \le 1 \quad 0 \le x \le \sqrt{2-2y^2}$$

Etapa 3. **Exprese la integral triple como una integral iterada**

$$\iiint_{\mathcal{W}} x\,dV = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{2-2y^2}} \int_{z=x^2+3y^2}^{4-x^2-y^2} x\,dz\,dx\,dy$$

Etapa 4. **Evalúe**

He aquí los resultados de evaluar la integral en este orden:

$$\text{Integral interior: } \int_{z=x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} x\,dz = xz\Big|_{z=x^2+3y^2}^{4-x^2-y^2} = 4x - 2x^3 - 4y^2x$$

Integral intermedia:

$$\int_{x=0}^{\sqrt{2-2y^2}} (4x - 2x^3 - 4y^2x)\,dx = \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^2y^2\right)\Big|_{x=0}^{\sqrt{2-2y^2}} = 2 - 4y^2 + 2y^4$$

$$\text{Integral triple: } \iiint_{\mathcal{W}} x\,dV = \int_0^1 (2 - 4y^2 + 2y^4)\,dy = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$ ■

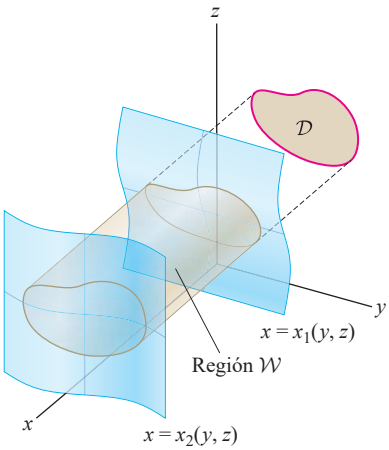


FIGURA 6 $\mathcal{D}$ es la proyección de $\mathcal{W}$ sobre el plano yz.

De momento, se han evaluado las integrales triples proyectando la región $\mathcal{W}$ sobre un dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy. Se puede integrar también proyectando sobre dominios en el plano xz o en el plano yz. Por ejemplo, si $\mathcal{W}$ es la región simple comprendida entre las gráf cas de $x = x_1(y,z)$ y $x = x_2(y,z)$ que se encuentra sobre un dominio $\mathcal{D}$ en el plano yz (f gura 6), se tiene:

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{x=x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dA$$

■ **EJEMPLO 5** **Expresión de una integral triple en tres formas** La región $\mathcal{W}$ de la f - gura 7 está limitada por:

$$z = 4 - y^2 \qquad y = 2x \qquad z = 0 \qquad x = 0$$

Exprese $\iiint_{\mathcal{W}} xyz\,dV$ como una integral iterada de tres maneras, proyectando sobre cada uno de los tres planos de coordenadas (pero no evalúe).

Solución Se considerará cada plano de coordenadas por separado.

Etapa 1. **El plano *xy***

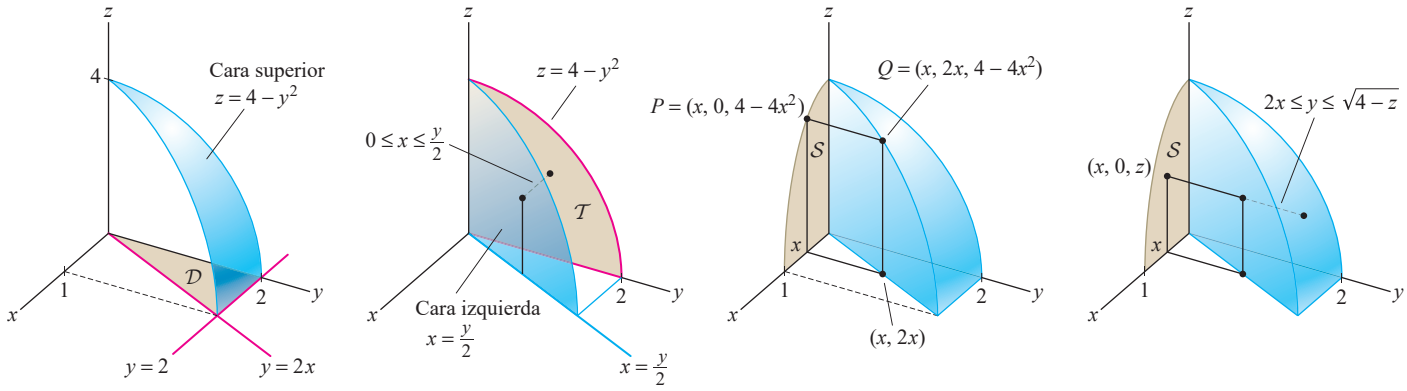
La cara superior $z = 4 - y^2$ interseca con el primer cuadrante del plano xy ($z = 0$) en la recta $y = 2$ [f gura 7(A)]. Por tanto, al ser la proyección de $\mathcal{W}$ sobre el plano xy un triángulo $\mathcal{D}$ def nido por $0 \le x \le 1$, $2x \le y \le 2$, se tiene:

$$\mathcal{W}: 0 \le x \le 1 \quad 2x \le y \le 2 \quad 0 \le z \le 4 - y^2$$

$$\iiint_{\mathcal{W}} xyz\,dV = \int_{x=0}^{1} \int_{y=2x}^{2} \int_{z=0}^{4-y^2} xyz\,dz\,dy\,dx$$ 3

Puede comprobar que las tres maneras de escribir la integral del ejemplo 5 dan lugar a la misma solución:

$$\iiint_{\mathcal{W}} xyz\,dV = \frac{2}{3}$$



(A) Proyección sobre el plano xy (B) Proyección sobre el plano yz (C) Proyección sobre el plano xz (D) Las coordenadas y de los puntos en la región sólida verifican que $2x \le y \le \sqrt{4 - z}$.

FIGURA 7

Etapa 2. **El plano yz**

La proyección de $\mathcal{W}$ sobre el plano yz es el dominio $\mathcal{T}$ [f gura 7(B)]:

$$\mathcal{T} : 0 \le y \le 2 \quad 0 \le z \le 4 - y^2$$

La región $\mathcal{W}$ está formada por todos los puntos que se encuentran entre $\mathcal{T}$ y la "cara izquierda" $x = \frac{1}{2}y$. Dicho de otro modo, la coordenada x debe cumplir que $0 \le x \le \frac{1}{2}y$. Por tanto:

$$\mathcal{W} : 0 \le y \le 2 \quad 0 \le z \le 4 - y^2 \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}y$$

$$\iiint_{\mathcal{W}} xyz\, dV = \int_{y=0}^{2} \int_{z=0}^{4-y^2} \int_{x=0}^{y/2} xyz\, dx\, dz\, dy$$

Etapa 3. **El plano xz**

En este caso, el objetivo es determinar la proyección de $\mathcal{W}$ sobre el plano xz, es decir, la región S de la f gura 7(C). Se necesita hallar la ecuación de la curva frontera de S. Un punto P sobre esta curva es la proyección de un punto $Q = (x, y, z)$ sobre la frontera de la cara izquierda. Como Q se encuentra tanto en el plano $y = 2x$ como en la superf cie $z = 4 - y^2$, tiene que ser $Q = (x, 2x, 4 - 4x^2)$. La proyección de Q es $P = (x, 0, 4 - 4x^2)$. Así, la proyección de $\mathcal{W}$ sobre el plano xz es el dominio:

$$S : 0 \le x \le 1 \quad 0 \le z \le 4 - 4x^2$$

De esta manera se han obtenido límites para las variables x y z, por lo que la integral triple se puede expresar como:

$$\iiint_{\mathcal{W}} xyz\, dV = \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{4-4x^2} \int_{y=??}^{??} xyz\, dy\, dz\, dx$$

¿Cuáles son los límites para y? La ecuación de la cara superior $z = 4 - y^2$ se puede expresar como $y = \sqrt{4 - z}$. Según la f gura 7(D), se tiene que $\mathcal{W}$ está limitada por la cara izquierda $y = 2x$ y por la cara superior $y = \sqrt{4 - z}$. Dicho de otro modo, la coordenada y de un punto en $\mathcal{W}$ cumple:

$$2x \le y \le \sqrt{4 - z}$$

Ahora se puede expresar la integral triple como la siguiente integral iterada:

$$\iiint_{\mathcal{W}} xyz\, dV = \int_{x=0}^{1} \int_{z=0}^{4-4x^2} \int_{y=2x}^{\sqrt{4-z}} xyz\, dy\, dz\, dx$$

El **valor medio** de una función de tres variables se define como en el caso de dos variables:

$$\overline{f} = \frac{1}{\text{Volumen}(\mathcal{W})} \iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV \qquad \boxed{4}$$

donde $\text{Volumen}(\mathcal{W}) = \iiint_{\mathcal{W}} 1\,dV$. Y, como ocurría para dos variables, $\overline{f}$ se encuentra entre el valor mínimo y máximo de f en $\mathcal{D}$. Además, el teorema del valor medio se cumple: si $\mathcal{W}$ es arcoconexa y f es continua sobre $\mathcal{W}$, entonces existe un punto $P \in \mathcal{W}$ tal que $f(P) = \overline{f}$.

El volumen de la esfera en dimensiones mayores

Arquímedes (287-212 A.C.) demostró la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ para el volumen de una esfera cerca de 2000 años antes de que surgiera el cálculo infinitesimal, por medio de un brillante razonamiento por el que se muestra que el volumen de una esfera es igual a dos tercios de volumen del cilindro circunscrito. Según Plutarco (aproximadamente 45-120 d.C.), Arquímedes estaba tan satisfecho de este logro que pidió que se grabara una esfera con un cilindro circunscrito en su tumba.

Se puede utilizar integración para generalizar el resultado de Arquímedes a n dimensiones. La bola de radio r en $\mathbb{R}^n$, que se denota por $B_n(r)$, es el conjunto de puntos $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ tales que:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le r^2$$

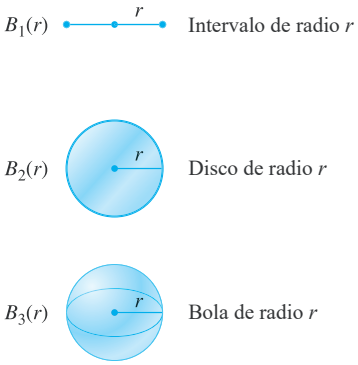


FIGURA 8 Bolas de radio r en dimensiones $n = 1, 2, 3$.

Las bolas $B_n(r)$ en dimensiones 1, 2 y 3 son el intervalo, disco y bola que se muestran en la figura 8. En dimensiones $n \ge 4$, es difícil, o imposible, visualizar la bola $B_n(r)$ pero se puede calcular su volumen. Denote este volumen como $V_n(r)$. Para $n = 1$, el "volumen" $V_1(r)$ es la longitud del intervalo $B_1(r)$ y para $n = 2$, $V_2(r)$ es el área del disco $B_2(r)$. Es conocido que:

$$V_1(r) = 2r \qquad V_2(r) = \pi r^2 \qquad V_3(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Para $n \ge 4$, $V_n(r)$ se denomina, en ocasiones, **hipervolumen**.

La idea clave es determinar $V_n(r)$ de la fórmula para $V_{n-1}(r)$ integrando el volumen de la sección transversal. Considere el caso $n = 3$, en que la sección horizontal a la altura $z = c$ es una bola en dos dimensiones (un disco) de radio $\sqrt{r^2 - c^2}$ (figura 9). El volumen $V_3(r)$ es igual a la integral de esas secciones horizontales:

$$V_3(r) = \int_{z=-r}^{r} V_2\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right) dz = \int_{z=-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)\,dz = \frac{4}{3}\pi r^3$$

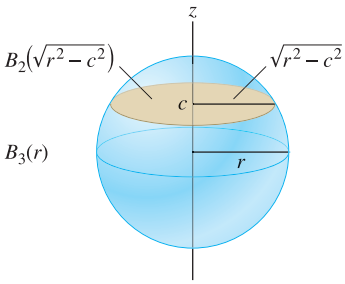


FIGURA 9 El volumen $V_3(r)$ es la integral del área de la sección transversal $V_2(\sqrt{r^2 - c^2})$.

Por inducción, se puede demostrar que para todo $n \ge 1$, existe una constante A_n (igual al volumen de la bola unitaria n-dimensional) tal que:

$$\boxed{V_n(r) = A_n r^n} \qquad \boxed{5}$$

La ecuación de la sección de $B_n(r)$ a altura $x_n = c$ es:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + c^2 = r^2$$

Esta sección es la bola $B_{n-1}(\sqrt{r^2 - c^2})$ de radio $\sqrt{r^2 - c^2}$ y $V_n(r)$ se obtiene integrando el volumen de estas secciones:

$$V_n(r) = \int_{x_n=-r}^{r} V_{n-1}\left(\sqrt{r^2 - x_n^2}\right) dx_n = A_{n-1} \int_{x_n=-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x_n^2}\right)^{n-1} dx_n$$

Usando la sustitución $x_n = r \operatorname{sen} \theta$ y $dx_n = r \cos\theta \, d\theta$, se tiene:

$$V_n(r) = A_{n-1} r^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta = A_{n-1} C_n r^n$$

donde $C_n = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta$. De esta manera se demuestra la ec. (5) con:

$$\boxed{A_n = A_{n-1} C_n} \qquad 6$$

En el problema 39, se le pide utilizar integración por partes para verif car la relación:

$$C_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) C_{n-2} \qquad 7$$

Es fácil comprobar directamente que $C_0 = \pi$ y que $C_1 = 2$. Según la ec. (7), $C_2 = \frac{1}{2}C_0 = = \frac{\pi}{2}$, $C_3 = \frac{2}{3}(2) = \frac{4}{3}$ y así sucesivamente. He aquí algunos de los primeros valores de C_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	π	2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{32}{35}$

TABLA 1

n	A_n
1	2
2	$\pi \approx 3{,}14$
3	$\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}19$
4	$\frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93$
5	$\mathbf{\frac{8\pi^2}{15} \approx 5{,}26}$
6	$\frac{\pi^3}{6} \approx 5{,}17$
7	$\frac{16\pi^3}{105} \approx 4{,}72$

También se tiene que $A_1 = 2$ y $A_2 = \pi$, por lo que se puede utilizar los valores de C_n junto con la ec. (6) para obtener los valores de A_n de la tabla 1. Se observa que, por ejemplo, el volumen de la bola de radio r en cuatro dimensiones es $V_4(r) = \frac{1}{2}\pi^2 r^4$. La fórmula general depende de si n es par o impar. Usando inducción y las fórmulas (6) y (7), se puede demostrar que:

$$A_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} \qquad A_{2m+1} = \frac{2^{m+1}\pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2m+1)}$$

Esta sucesión de números A_n cumple una propiedad interesante. Considerando $r = 1$ en la ec. (5), se tiene que A_n es el volumen de la bola unitaria en n dimensional. Según la tabla 1, el volumen va aumentando hasta que se llega a la dimensión 5 y, después, empieza a decrecer. En el problema 40, se le pide comprobar que el volumen mayor se alcanza en la bola unitaria del espacio de cinco dimensiones. Además, los volúmenes A_n tienden a 0 cuando $n \to \infty$.

16.3 RESUMEN

- La integral triple sobre una caja $\mathcal{B} = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ es igual a la integral iterada:

$$\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\, dV = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \int_{z=p}^{q} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

La integral iterada se puede expresar en cualquiera de los seis órdenes posibles, por ejemplo:

$$\int_{z=p}^{q} \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

- Una *región simple* $\mathcal{W}$ en $\mathbb{R}^3$ es una región formada por los puntos (x,y,z) entre dos superf cies $z = z_1(x,y)$ y $z = z_2(x,y)$, donde $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$, que se encuentran por encima de un dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy. Dicho de otro modo, $\mathcal{W}$ se def ne mediante:

$$(x,y) \in \mathcal{D} \qquad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$$

La integral triple sobre $\mathcal{W}$ es igual a una integral iterada:

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA$$

- El *valor medio* de $f(x,y,z)$ sobre una región $\mathcal{W}$ de volumen V es la cantidad:

$$\overline{f} = \frac{1}{V} \iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV \qquad V = \iiint_{\mathcal{W}} 1\,dV$$

16.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las integrales (a)-(c) no es igual a $\int_0^1 \int_3^4 \int_6^7 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$?

(a) $\int_6^7 \int_0^1 \int_3^4 f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$

(b) $\int_3^4 \int_0^1 \int_6^7 f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

(c) $\int_0^1 \int_3^4 \int_6^7 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$

2. ¿Cuál de las siguientes no es una integral triple que tenga sentido?

(a) $\int_0^1 \int_0^x \int_{x+y}^{2x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx$

(b) $\int_0^1 \int_0^z \int_{x+y}^{2x+y} e^{x+y+z}\,dz\,dy\,dx$

3. Describa la proyección de la región de integración $\mathcal{W}$ sobre el plano xy:

(a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

(b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_2^4 f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

Problemas

En los problemas 1-8, evalúe $\iiint_{\mathcal{B}} f(x,y,z)\,dV$ *para la función* f *y la caja* $\mathcal{B}$ *que se indican.*

1. $2 \le x \le 8, \quad 0 \le y \le 5, \quad 0 \le z \le 1$

2. $f(x,y,z) = xz^2; \quad [-2,3] \times [1,3] \times [1,4]$

3. $f(x,y,z) = x\,e^{y-2z}; \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$

4. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{(y+z)^2}; \quad [0,2] \times [2,4] \times [-1,1]$

5. $f(x,y,z) = (x-y)(y-z); \quad [0,1] \times [0,3] \times [0,3]$

6. $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x}; \quad 1 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 4$

7. $f(x,y,z) = (x+z)^3; \quad [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$

8. $f(x,y,z) = (x+y-z)^2; \quad [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$

En los problemas 9-14, evalúe $\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV$ *para la función* f *y la región* $\mathcal{W}$ *especif cadas.*

9. $f(x,y,z) = x + y; \quad \mathcal{W} : y \le z \le x, \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 1$

10. $f(x,y,z) = e^{x+y+z}; \quad \mathcal{W} : 0 \le z \le 1, \quad 0 \le y \le x, \quad 0 \le x \le 1$

11. $f(x,y,z) = xyz; \quad \mathcal{W} : 0 \le z \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1$

12. $f(x,y,z) = x; \quad \mathcal{W} : x^2 + y^2 \le z \le 4$

13. $f(x,y,z) = e^z; \quad \mathcal{W} : x + y + z \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0$

14. $f(x,y,z) = z; \quad \mathcal{W} : x^2 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le 1, \quad x - y \le z \le x + y$

15. Calcule la integral de $f(x,y,z) = z$ sobre la región $\mathcal{W}$ de la f gura 10 por debajo del hemisferio de radio 3 y que se encuentra por encima del triángulo $\mathcal{D}$ en el plano xy limitado por $x = 1$, $y = 0$ y $x = y$.

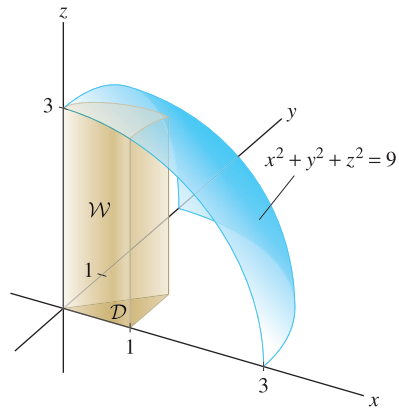


FIGURA 10

16. Calcule la integral de $f(x,y,z) = e^z$ sobre el tetraedro $\mathcal{W}$ de la figura 11.

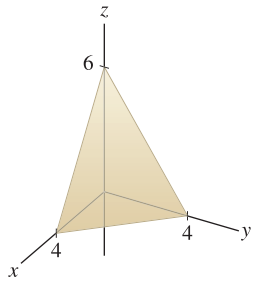


FIGURA 11

17. Integre $f(x,y,z) = x$ sobre la región del primer octante ($x \geq 0$, $y \geq 0, z \geq 0$) por encima de $z = y^2$ y por debajo de $z = 8 - 2x^2 - y^2$.

18. Calcule la integral de $f(x,y,z) = y^2$ sobre la región dentro del cilindro en que $x^2 + y^2 = 4$ donde $0 \leq z \leq y$.

19. Halle la integral triple de la función z sobre la rampa de la figura 12. En este problema, z es la altura por encima del suelo.

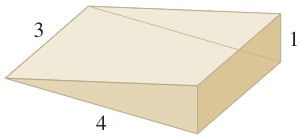


FIGURA 12

20. Halle el volumen del sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado por $y = x^2$, $x = y^2$, $z = x + y + 5$ y $z = 0$.

21. Halle el volumen del sólido en el octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ limitado por $x + y + z = 1$ y $x + y + 2z = 1$.

22. Calcule $\iiint_{\mathcal{W}} y\,dV$, donde $\mathcal{W}$ es la región por encima de $z = x^2 + y^2$ y por debajo de $z = 5$ que está limitada por $y = 0$ y por $y = 1$.

23. Evalúe $\iiint_{\mathcal{W}} xz\,dV$, donde $\mathcal{W}$ es el dominio limitado por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en el primer octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (figura 13).

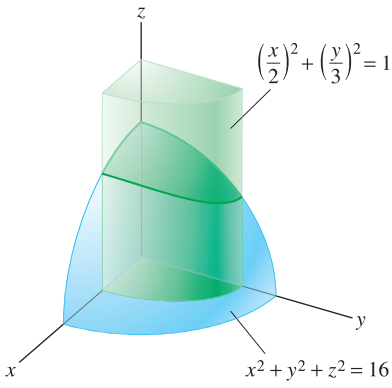


FIGURA 13

24. Describa el dominio de integración y evalúe:

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$$

25. Describa el dominio de integración de la siguiente integral:

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \int_1^{\sqrt{5-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

26. Sea $\mathcal{W}$ la región por debajo del paraboloide:

$$x^2 + y^2 = z - 2$$

que queda por encima de la parte del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Exprese:

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV$$

como una integral iterada (para una función arbitraria f).

27. En el ejemplo 5, se expresó una integral triple como una integral iterada en los tres órdenes:

$$dz\,dy\,dx, \quad dx\,dz\,dy \quad \text{y} \quad dy\,dz\,dx$$

Exprese esta misma integral en los tres órdenes:

$$dz\,dx\,dy, \quad dx\,dy\,dz \quad \text{y} \quad dy\,dx\,dz$$

28. Sea $\mathcal{W}$ la región limitada por:

$$y + z = 2, \quad 2x = y, \quad x = 0, \quad \text{y } z = 0$$

(figura 14). Exprese y evalúe la integral triple de $f(x,y,z) = z$ proyectando $\mathcal{W}$ sobre el:

(a) plano xy **(b)** plano yz **(c)** plano xz

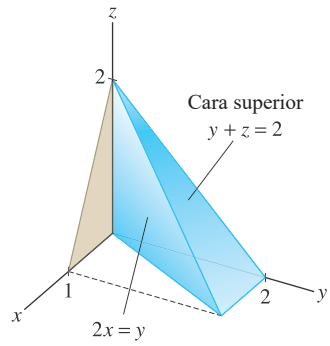


FIGURA 14

29. Sea:

$$\mathcal{W} = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$$

(vea la figura 15). Exprese $\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV$ como una integral iterada con el orden $dz\,dy\,dx$ (para una función arbitraria f).

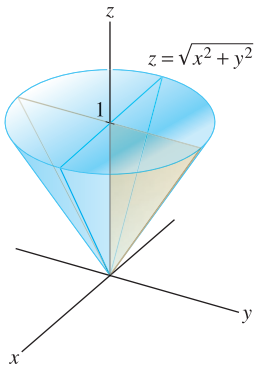


FIGURA 15

30. Repita el problema 29 para el orden $dx\,dy\,dz$.

31. Sea $\mathcal{W}$ la región limitada por $z = 1 - y^2$, $y = x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 1$. Calcule el volumen de $\mathcal{W}$ como una integral triple con el orden $dz\,dy\,dx$.

32. Calcule el volumen de la región $\mathcal{W}$ del problema 31 como una integral triple con los siguientes órdenes:

(a) $dx\,dz\,dy$ **(b)** $dy\,dz\,dx$

En los problemas 33-36, calcule la media de $f(x,y,z)$ sobre la región $\mathcal{W}$.

33. $f(x,y,z) = xy\,\text{sen}(\pi z)$; $\mathcal{W} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

34. $f(x,y,z) = xyz$; $\mathcal{W} : 0 \le z \le y \le x \le 1$

35. $f(x,y,z) = e^y$; $\mathcal{W} : 0 \le y \le 1 - x^2$, $0 \le z \le x$

36. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\mathcal{W}$ limitada por los planos $2y + z = 1$, $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $y = 0$.

En los problemas 37 y 38, sea $I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,dV$ *y sea* $S_{N,N,N}$ *la aproximación de la suma de Riemann:*

$$S_{N,N,N} = \frac{1}{N^3} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}, \frac{k}{N}\right)$$

37. SAC Calcule $S_{N,N,N}$ para $f(x,y,z) = e^{x^2-y-z}$ y para $N = 10, 20, 30$. A continuación, evalúe I y halle una N tal que $S_{N,N,N}$ aproxime a I con dos decimales de precisión.

38. SAC Calcule $S_{N,N,N}$ para $f(x,y,z) = \text{sen}(xyz)$ y para $N = 10, 20, 30$. A continuación, utilice un programa informático de cálculo simbólico para calcular I numéricamente y estime el error $|I - S_{N,N,N}|$.

Problemas avanzados

39. Use integración por partes para comprobar la ec. (7).

40. Calcule el volumen A_n de la bola unitaria en $\mathbf{R}^n$ para $n = 8, 9, 10$. Pruebe que $C_n \le 1$ para $n \ge 6$ y use este resultado para demostrar que, entre todas las bolas unitarias, la bola en el espacio de cinco dimensiones es la que tiene el volumen mayor. ¿Puede explicar por qué A_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$?

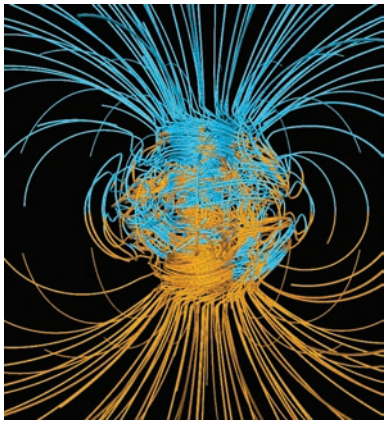


FIGURA 1 Las coordenadas esféricas se utilizan en los modelos matemáticos del campo magnético terrestre. Esta simulación por ordenador, basada en el modelo de Glatzmaier-Roberts, muestra las líneas de fuerza magnética, que representan las entradas y salidas de las líneas del campo, en azul y amarillo, respectivamente.

16.4 Integración en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

En cálculo en una variable, una sustitución bien escogida (también llamada cambio de variables) suele transformar una integral complicada en una más simple. El cambio de variables también es útil en el cálculo multivariante, pero el énfasis es diferente. En el caso multivariante, se suele estar interesado en la simplif cación de no sólo el integrando, sino también del dominio de integración.

Esta sección trata sobre tres de los cambios de variables más útiles, en que una integral se expresa en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas. La fórmula general del cambio de variables se analiza en la sección 16.6.

Integrales dobles en coordenadas polares

Las coordenadas polares resultan convenientes cuando el dominio de integración es un sector angular o un **rectángulo polar** (f gura 2):

$$\mathcal{R} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \quad r_1 \le r \le r_2 \qquad \boxed{1}$$

Se supondrá a partir de ahora que $r_1 \ge 0$ y que todas las coordenadas radiales son no negativas. Recuerde que las coordenadas rectangulares y polares están relacionadas por:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

La ec. (2) expresa la integral de $f(x,y)$ sobre el rectángulo polar de la figura 2 como la integral de una nueva función $rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ sobre el rectángulo ordinario $[\theta_1,\theta_2]\times[r_1,r_2]$. En este sentido, el cambio de variable "simplifica" el dominio de integración.

De esta manera, se expresa una función $f(x,y)$ en coordenadas polares como $f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. La fórmula del cambio de variables para un rectángulo polar es $\mathcal{R}$ es:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad \boxed{2}$$

Observe el factor extra r en el integrando de la derecha.

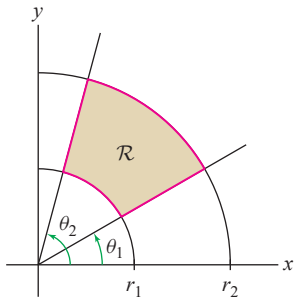


FIGURA 2 Rectángulo polar.

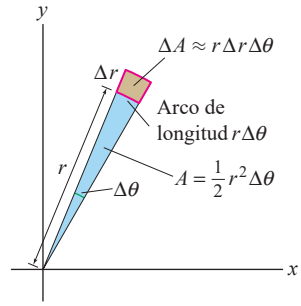


FIGURA 3 Pequeño rectángulo polar.

Para deducir la ec. (2), el punto clave es estimar el área ΔA del pequeño rectángulo polar que se muestra en la f gura 3. Si Δr y $\Delta\theta$ son pequeños, entonces este rectángulo polar es prácticamente un rectángulo ordinario de lados Δr y $r\Delta\theta$ y, por tanto, $\Delta A \approx \approx r\,\Delta r\,\Delta\theta$. De hecho, ΔA es la diferencia de áreas de los dos sectores:

$$\Delta A = \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\theta - \frac{1}{2}r^2\,\Delta\theta = r(\Delta r\,\Delta\theta) + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta \approx r\,\Delta r\,\Delta\theta$$

El error en esta aproximación es el término $\frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta$, que tiene un orden de magnitud menor que $\Delta r\,\Delta\theta$ cuando Δr y $\Delta\theta$ son ambos pequeños.

RECORDATORIO La longitud del arco subtendido por un ángulo θ es $r\theta$ y el área del sector es $\frac{1}{2}r^2\theta$.

Ahora descomponga $\mathcal{R}$ en una cuadrícula de $N\times M$ pequeños subrectángulos polares $\mathcal{R}_{ij}$ como en la f gura 4, y elija un punto intermedio P_{ij} en $\mathcal{R}_{ij}$. Si $\mathcal{R}_{ij}$ es pequeño y $f(x,y)$ es continua, entonces:

$$\iint_{\mathcal{R}_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy \approx f(P_{ij})\,\text{Área}(\mathcal{R}_{ij}) \approx f(P_{ij})\,r_{ij}\,\Delta r\,\Delta\theta \qquad \boxed{3}$$

RECORDATORIO En la ec. (3). se utiliza la aproximación (3) de la sección 16.2: si f es continua y $\mathcal{D}$ es un dominio pequeño,

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA \approx f(P)\,\text{Área}(\mathcal{D})$$

donde P es cualquier punto intermedio en $\mathcal{D}$.

Observe que la amplitud angular de cada rectángulo $\mathcal{R}_{ij}$ es $\Delta\theta = (\theta_2-\theta_1)/N$ y la amplitud radial es $\Delta r = (r_2-r_1)/M$. La integral sobre $\mathcal{R}$ es la suma:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dx\,dy &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\iint_{\mathcal{R}_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\text{Area}(\mathcal{R}_{ij}) \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\operatorname{sen}\theta_{ij})\,r_{ij}\,\Delta r\,\Delta\theta\end{aligned}$$

Se trata de una suma de Riemann para la integral doble de $rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ sobre la región $r_1 \le r \le r_2$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ y se puede demostrar que tiende a la integral doble cuando $N, M \to \infty$. Una deducción similar es válida para dominios (f gura 5) que pueden ser descritos como la región comprendida entre dos curvas $r = r_1(\theta)$ y $r = r_2(\theta)$. De esta manera se tiene el teorema 1.

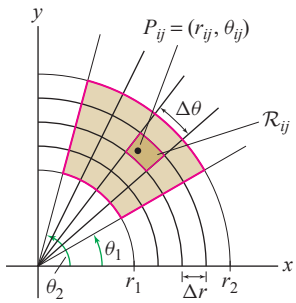


FIGURA 4 Descomposición de un rectángulo polar en subrectángulos.

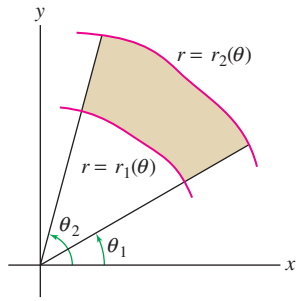


FIGURA 5 Región polar general.

La ec. (4) se resume a través de la expresión simbólica para el "elemento de área" dA en coordenadas polares:

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

TEOREMA 1 Integral doble en coordenadas polares Para una función continua f sobre el dominio:

$$\mathcal{D} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$$

se tiene:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad \boxed{4}$$

■ **EJEMPLO 1** Calcule $\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es la cuarta parte de la corona circular de la f gura 6.

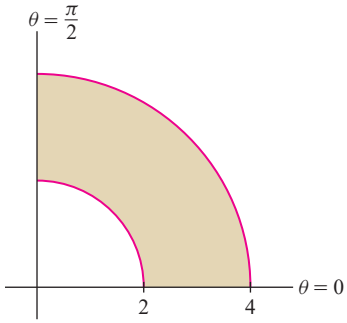


FIGURA 6 Cuarta parte de una corona circular $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $2 \le r \le 4$.

Solución

***Etapa 1.* Describa $\mathcal{D}$ y f en coordenadas polares**

La cuarta parte de la corona circular $\mathcal{D}$ queda def nida por las desigualdades (f gura 6):

$$\mathcal{D} : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad 2 \le r \le 4$$

En coordenadas polares:

$$f(x,y) = x + y = r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$$

***Etapa 2.* Cambie de variables y evalúe**

Para expresar la integral en coordenadas polares, se reemplaza dA por $r\,dr\,d\theta$:

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_{r=2}^{4} r(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

La integral interna es:

$$\int_{r=2}^{4} (\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\,r^2\,dr = (\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{56}{3}(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$$

y:

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\,dA = \frac{56}{3}\int_0^{\pi/2} (\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\,d\theta = \frac{56}{3}(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{112}{3}$$ ■

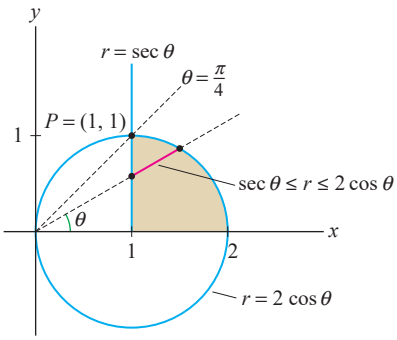


FIGURA 7

EJEMPLO 2 Calcule $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)^{-2}\, dA$ para el dominio sombreado $\mathcal{D}$ de la figura 7.

Solución

Etapa 1. **Describa $\mathcal{D}$ y f en coordenadas polares**

La cuarta parte del círculo se encuentra en el sector angular $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ porque la recta que pasa por $P = (1, 1)$ forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje x (figura 7).

Para determinar los límites en r, recuerde de la sección 11.3 (ejemplos 5 y 7) que:

- La ecuación polar de la recta vertical $x = 1$ es $r\cos\theta = 1$ o $r = \sec\theta$.
- La ecuación polar de la circunferencia de radio 1 y centro $(1, 0)$ es $r = 2\cos\theta$.

Por tanto, un rayo de ángulo θ interseca con $\mathcal{D}$ en el segmento en el que r varía de $\sec\theta$ a $2\cos\theta$. Dicho de otro modo, la descripción polar de nuestro dominio es:

$$\mathcal{D} : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \quad \sec\theta \le r \le 2\cos\theta$$

La función en coordenadas polares es:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-2} = (r^2)^{-2} = r^{-4}$$

Etapa 2. **Cambie de variables y evalúe**

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)^{-2}\, dA = \int_0^{\pi/4} \int_{r=\sec\theta}^{2\cos\theta} r^{-4}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_{r=\sec\theta}^{2\cos\theta} r^{-3}\, dr\, d\theta$$

La integral interior es:

$$\int_{r=\sec\theta}^{2\cos\theta} r^{-3}\, dr = -\frac{1}{2} r^{-2} \Big|_{r=\sec\theta}^{2\cos\theta} = -\frac{1}{8}\sec^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)^{-2}\, dA &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{8}\sec^2\theta \right) d\theta = \\ &= \left(\frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta \right) - \frac{1}{8}\tan\theta \right) \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{8}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

RECORDATORIO

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta \right) + C$$

$$\int \sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta + C$$

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas que se introdujeron en la sección 13.7 son útiles cuando el dominio presenta una **simetría axial**, esto es, simetría respecto a un eje. En coordenadas cilíndricas (r, θ, z), el eje de simetría es el eje z. Recuerde las relaciones (figura 8):

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

Para expresar una integral en coordenadas cilíndricas, se supondrá que el dominio de integración $\mathcal{W}$ se puede describir como la región entre dos superficies (figura 9):

$$z_1(r, \theta) \le z \le z_2(r, \theta)$$

que se encuentra por encima de un dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy de descripción polar:

$$\mathcal{D} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$$

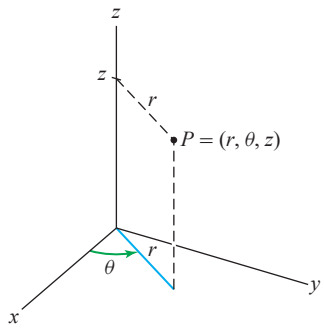


FIGURA 8 Coordenadas cilíndricas.

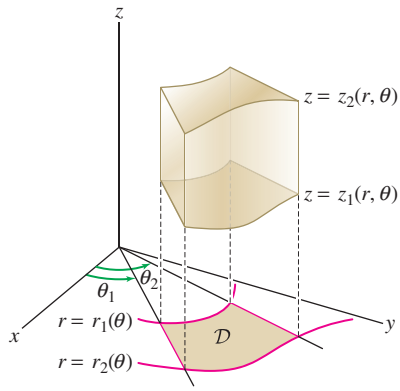


FIGURA 9 Región descrita en coordenadas cilíndricas.

Una integral triple sobre $\mathcal{W}$ se puede expresar como una integral iterada (teorema 2 de la sección 16.3):

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{z=z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(x,y,z)\,dz \right) dA$$

Expresando la integral sobre $\mathcal{D}$ en coordenadas polares, se obtiene la siguiente fórmula del cambio de variables.

La ec. (5) se resume a través de la expresión simbólica para el "elemento de volumen" dV en coordenadas cilíndricas:

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

TEOREMA 2 Integrales triples en coordenadas cilíndricas Para una función continua f sobre la región:

$$\theta_1 \le \theta \le \theta_2 \qquad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \qquad z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta)$$

la integral triple $\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV$ es igual a:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z=z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta \qquad \boxed{5}$$

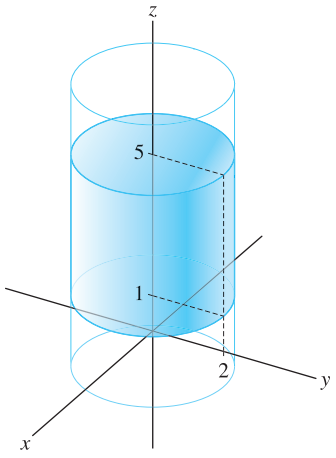


FIGURA 10 El cilindro $x^2 + y^2 \le 4$.

■ **EJEMPLO 3** Integre $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2+y^2 \le 4$ para $1 \le z \le 5$ (f gura 10).

Solución El dominio de integración $\mathcal{W}$ se encuentra por encima del disco de radio 2, por lo que en coordenadas cilíndricas:

$$\mathcal{W} : 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le r \le 2 \quad 1 \le z \le 5$$

Expresamos la función en coordenadas cilíndricas también:

$$f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} = zr$$

e integramos respecto a $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$. La función f es el producto zr, por lo que la integral triple resultante es un producto de integrales simples:

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=1}^{5}(zr)r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{2} r^2\,dr\right)\left(\int_{z=1}^{5} z\,dz\right) =$$

$$= (2\pi)\left(\frac{2^3}{3}\right)\left(\frac{5^2-1^2}{2}\right) = 64\pi$$

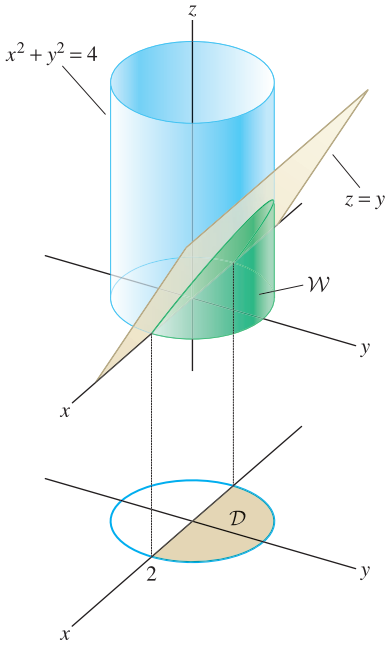


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Calcule la integral de $f(x,y,z) = z$ sobre la región $\mathcal{W}$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2 \le 4$ donde $0 \le z \le y$.

Solución

Etapa 1. **Exprese $\mathcal{W}$ en coordenadas cilíndricas**

La condición $0 \le z \le y$ establece que $y \ge 0$, por lo que $\mathcal{W}$ se proyecta sobre el semicírculo $\mathcal{D}$ en el plano xy de radio 2 donde $y \ge 0$, y que se muestra en la figura 11. En coordenadas polares:

$$\mathcal{D} : 0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le r \le 2$$

La coordenada z en la región $\mathcal{W}$ varía de $z = 0$ a $z = y$ y en coordenadas polares $y = r\,\text{sen}\,\theta$, por lo que la región admite la descripción:

$$\mathcal{W} : 0 \le \theta \le \pi \quad 0 \le r \le 2 \quad 0 \le z \le r\,\text{sen}\,\theta$$

Etapa 2. **Cambie de variables y evalúe**

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV = \int_0^{\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{r\,\text{sen}\,\theta} zr\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\int_{r=0}^{2}\frac{1}{2}(r\,\text{sen}\,\theta)^2 r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\text{sen}^2\,\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2} r^3\,dr\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{2^4}{4} = \pi$$

RECORDATORIO

$$\int \text{sen}^2\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\right) + C$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2\,\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas

Se ha mencionado que la fórmula del cambio de variables en coordenadas cilíndricas se resume mediante la ecuación simbólica $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$. En coordenadas esféricas (introducidas en la sección 13.7), el análogo es la fórmula:

$$dV = \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

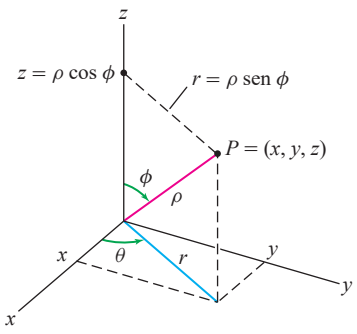


FIGURA 12 Coordenadas esféricas.

Recuerde (figura 12) que:

$$x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \qquad z = \rho\cos\phi$$

El punto clave para obtener esta fórmula es estimar el volumen de una pequeña **cuña esférica** $\mathcal{W}$, definida por las desigualdades:

$$\mathcal{W} : \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \quad \phi_1 \le \phi \le \phi_2 \quad \rho_1 \le \rho \le \rho_2$$

Según la figura 13, se observa que cuando los incrementos:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \qquad \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1, \qquad \Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$$

son pequeños, la cuña esférica es prácticamente una caja de lados $\Delta\rho$, $\rho_1\Delta\phi$ y $\rho_1 \operatorname{sen}\phi_1 \Delta\theta$ y volumen:

$$\text{Volumen}(\mathcal{W}) \approx \rho_1^2 \operatorname{sen}\phi_1 \,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta \qquad \boxed{7}$$

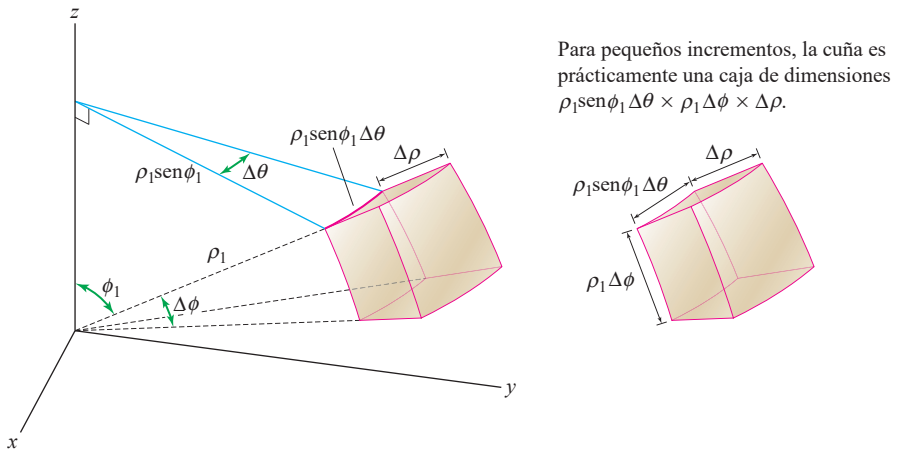


FIGURA 13 Cuña esférica.

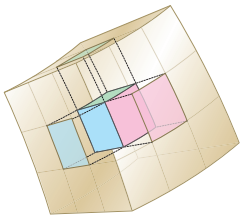


FIGURA 14 Descomposición de una cuña esférica en subcuñas.

Siguiendo los pasos habituales, se descompone $\mathcal{W}$ en N^3 subcuñas esféricas $\mathcal{W}_i$ (figura 14) de incrementos:

$$\Delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{N} \qquad \Delta\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{N} \qquad \Delta\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{N}$$

y se elige un punto intermedio $P_i = (\rho_i, \theta_i, \phi_i)$ en cada región $\mathcal{W}_i$. Suponiendo que f es continua, la siguiente aproximación es válida para valores grandes de N ($\mathcal{W}_i$ pequeñas):

$$\iiint_{\mathcal{W}_i} f(x,y,z)\,dV \approx f(P_i)\text{Volumen}(\mathcal{W}_i) \approx$$

$$\approx f(P_i)\rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_i \,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

Considerando la suma al variar i, se obtiene:

$$\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV \approx \sum_i f(P_i)\rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_i \,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi \qquad \boxed{8}$$

La suma a la derecha es una suma de Riemann para la función:

$$f(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)\,\rho^2\operatorname{sen}\phi$$

sobre el dominio $\mathcal{W}$. La ec. (9) a continuación se obtiene pasando al límite cuando $N \to \infty$ (y mostrando que el error en la ec. (8) tiende a cero). Este razonamiento se aplica a regiones más generales que estén definidas por una desigualdad $\rho_1(\theta,\phi) \le \rho \le \rho_2(\theta,\phi)$.

La ec. (9) se resume a través de la expresión simbólica para el "elemento de volumen" dV en coordenadas esféricas:

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

TEOREMA 3 Integrales triples en coordenadas esféricas Dada una región $\mathcal{W}$ definida por:

$$\theta_1 \le \theta \le \theta_2 \qquad \phi_1 \le \phi \le \phi_2 \qquad \rho_1(\theta,\phi) \le \rho \le \rho_2(\theta,\phi)$$

la integral triple $\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV$ es igual a:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho=\rho_1(\theta,\phi)}^{\rho_2(\theta,\phi)} f(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \rho\cos\phi)\,\rho^2\operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad (9)$$

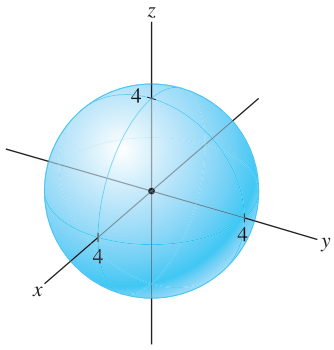


FIGURA 15 Esfera de radio 4.

EJEMPLO 5 Calcule la integral de $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ sobre la esfera S de radio 4 centrada en el origen (figura 15).

Solución En primer lugar, exprese $f(x,y,z)$ en coordenadas esféricas:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 = (\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi)^2 + (\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2 =$$

$$= \rho^2\operatorname{sen}^2\phi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2\operatorname{sen}^2\phi$$

Como se está integrando sobre toda la esfera S de radio 4, ρ varía de 0 a 4, θ de 0 a 2π y ϕ de 0 a π. En los cálculos que se encuentran a continuación, se integra primero respecto a θ:

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{4} (\rho^2\operatorname{sen}^2\phi)\,\rho^2\operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$= 2\pi\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{4} \rho^4\operatorname{sen}^3\phi \, d\rho \, d\phi = 2\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^4\right)\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{2048\pi}{5}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{2048\pi}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\phi - \cos\phi\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8192\pi}{15}$$

RECORDATORIO

$$\int \operatorname{sen}^3\phi\,d\phi = \frac{1}{3}\cos^3\phi - \cos\phi + C$$

[exprese $\operatorname{sen}^3\phi = \operatorname{sen}\phi(1-\cos^2\phi)$*]*

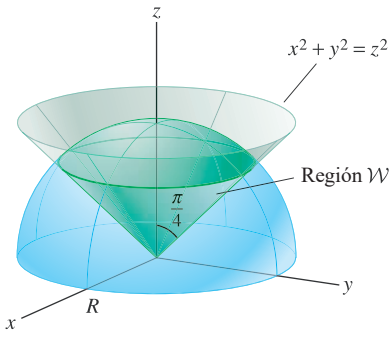


FIGURA 16 Cucurucho de helado definido por $0 \le \rho \le R$, $0 \le \phi \le \pi/4$.

EJEMPLO 6 Integre $f(x,y,z) = z$ sobre la región con forma de cucurucho de helado $\mathcal{W}$ de la figura 16, que se encuentra por encima del cono y por debajo de la esfera.

Solución La ecuación del cono es $x^2 + y^2 = z^2$, que en coordenadas esféricas resulta:

$$(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi)^2 + (\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2 = (\rho\cos\phi)^2$$

$$\rho^2\operatorname{sen}^2\phi(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2\cos^2\phi$$

$$\operatorname{sen}^2\phi = \cos^2\phi$$

$$\operatorname{sen}\phi = \pm\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

La rama superior del cono queda definida por la sencilla ecuación $\phi = \frac{\pi}{4}$. Por otra parte, la ecuación de la esfera es $\rho = R$, por lo que la descripción del cucurucho de helado es:

$$\mathcal{W}: 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \rho \le R$$

Se tiene:

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{R} (\rho\cos\phi)\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{\rho=0}^{R}\rho^3\cos\phi\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi = \frac{\pi R^4}{2}\int_0^{\pi/4}\text{sen}\,\phi\cos\phi\,d\phi = \frac{\pi R^4}{8}$$

16.4 RESUMEN

En forma simbólica:

$dA = r\,dr\,d\theta$

$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

$dV = \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

- Integral doble en *coordenadas polares:*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

- Integral triple $\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,dV$
  - *En coordenadas cilíndricas:*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z=z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

  - *En coordenadas esféricas:*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho=\rho_1(\theta,\phi)}^{\rho_2(\theta,\phi)} f(\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, \rho\cos\phi)\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

16.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes integrales representa a la integral de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la circunferencia unitaria?

(a) $\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\,dr\,d\theta$ **(b)** $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,dr\,d\theta$

(c) $\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\theta$ **(d)** $\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta$

2. ¿Cuáles son los límites de integración de $\iiint f(r,\theta,z)r\,dr\,d\theta\,dz$ si la integración se realiza sobre las siguientes regiones?

(a) $x^2 + y^2 \le 4, \quad -1 \le z \le 2$

(b) Semiesfera inferior de radio 2 y centro en el origen

3. ¿Cuáles son los límites de integración de

$$\iiint f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

si la integración se realiza sobre las siguientes regiones esféricas centradas en el origen?

(a) Esfera de radio 4.

(b) Región comprendida entre las esferas de radios 4 y 5.

(c) Semiesfera inferior de la esfera de radio 2.

4. Un rectángulo ordinario de lados Δx y Δy tiene área $\Delta x\,\Delta y$, sin importar dónde esté situado en el plano. Sin embargo, el área de un rectángulo polar de lados Δr y $\Delta\theta$ depende de su distancia al origen. ¿De qué manera se ref eja esta diferencia en la fórmula del cambio de variable para coordenadas polares?

Problemas

En los problemas 1-6, dibuje la región $\mathcal{D}$ indicada e integre $f(x,y)$ sobre $\mathcal{D}$ usando coordenadas polares.

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 2$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2; \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4$

3. $f(x,y) = xy; \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad x^2 + y^2 \le 4$

4. $f(x,y) = y(x^2+y^2)^3; \quad y \ge 0, \quad x^2 + y^2 \le 1$

5. $f(x,y) = y(x^2+y^2)^{-1}; \quad y \geq \frac{1}{2}, \quad x^2+y^2 \leq 1$

6. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}; \quad x^2+y^2 \leq R$

En los problemas 7-14, dibuje la región de integración y evalúe realizando un cambio a coordenadas polares.

7. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

8. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

9. $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} \tan^{-1}\frac{y}{x}\,dy\,dx$

11. $\displaystyle\int_{0}^{5}\int_{0}^{y} x\,dx\,dy$

12. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{x}^{\sqrt{3}x} y\,dy\,dx$

13. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

14. $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$

En los problemas 15-20, calcule la integral sobre la región realizando un cambio a coordenadas polares.

15. $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}; \quad x^2+y^2 \leq 2, \quad x \geq 1$

16. $f(x,y) = x; \quad 2 \leq x^2+y^2 \leq 4$

17. $f(x,y) = |xy|; \quad x^2+y^2 \leq 1$

18. $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-3/2}; \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad x+y \geq 1$

19. $f(x,y) = x-y; \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad x+y \geq 1$

20. $f(x,y) = y; \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad (x-1)^2+y^2 \leq 1$

21. Halle el volumen de la región en forma de cuña (f gura 17) contenida en el cilindro $x^2+y^2 = 9$, limitada superiormente por el plano $z = x$ e inferiormente por el plano xy.

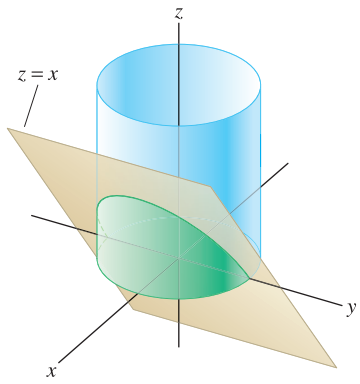


FIGURA 17

22. Sea $\mathcal{W}$ la región por encima de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 6$ y por debajo del paraboloide $z = 4-x^2-y^2$.

(a) Pruebe que la proyección de $\mathcal{W}$ sobre el plano xy es el disco $x^2+y^2 \leq 2$ (f gura 18).

(b) Calcule el volumen de $\mathcal{W}$ usando coordenadas polares.

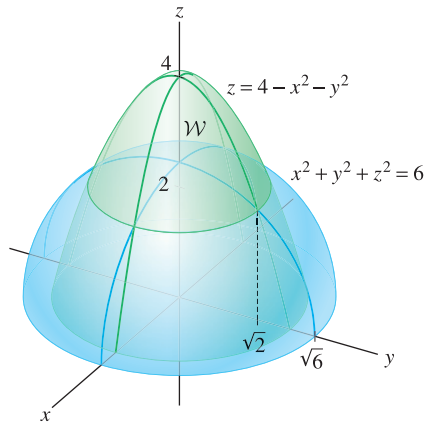


FIGURA 18

23. Evalúe $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es el dominio de la f gura 19.

Indicación: Halle la ecuación de la circunferencia interior en coordenadas polares, y considere las zonas derecha e izquierda de la región por separado.

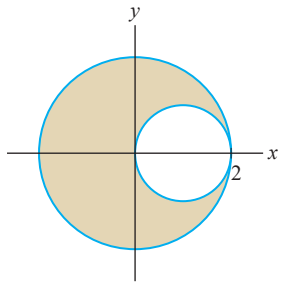


FIGURA 19

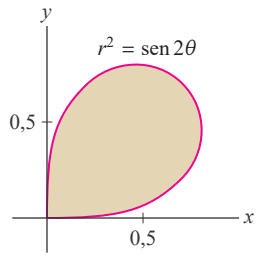


FIGURA 20

24. Evalúe $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es la región sombreada limitada por la curva lemniscata $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$ de la f gura 20.

25. Sea $\mathcal{W}$ la región comprendida entre los paraboloides $z = x^2+y^2$ y $z = 8-x^2-y^2$.

(a) Describa $\mathcal{W}$ en coordenadas cilíndricas.

(b) Use coordenadas cilíndricas para calcular el volumen de $\mathcal{W}$.

26. Use coordenadas cilíndricas para calcular la integral de la función $f(x,y,z) = z$ sobre la región por encima del disco $x^2+y^2 = 1$ en el plano xy y por debajo de la superf cie $z = 4+x^2+y^2$.

En los problemas 27-32, use coordenadas cilíndricas para calcular $\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV$ *para la función y región dadas.*

27. $f(x,y,z) = x^2 + y^2; \quad x^2 + y^2 \le 9, \quad 0 \le z \le 5$

28. $f(x,y,z) = xz; \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad 0 \le z \le 2$

29. $f(x,y,z) = y; \quad x^2 + y^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 0 \le z \le 2$

30. $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}; \quad x^2 + y^2 \le z \le 8 - (x^2 + y^2)$

31. $f(x,y,z) = z; \quad x^2 + y^2 \le z \le 9$

32. $f(x,y,z) = z; \quad 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 9$

En los problemas 33-36, exprese la integral triple en coordenadas cilíndricas.

33. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{4} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

34. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{4} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

35. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

36. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

37. Halle la ecuación del cono circular de la f gura 21 en coordenadas cilíndricas y calcule su volumen.

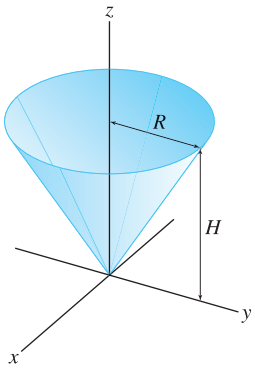


FIGURA 21

38. Use coordenadas cilíndricas para integrar $f(x,y,z) = z$ sobre la intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

39. Use coordenadas cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se obtiene al quitar un cilindro central de radio b de una esfera de radio a, donde $b < a$.

40. Halle el volumen de la región de la f gura 22.

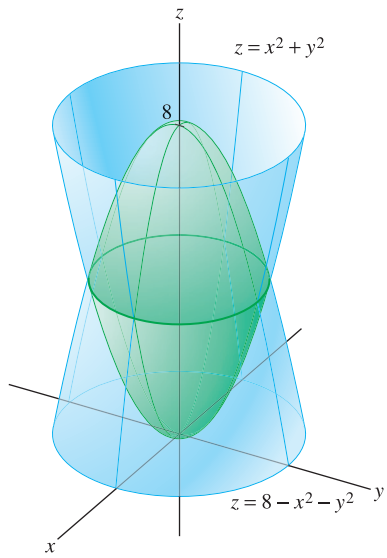


FIGURA 22

En los problemas 41-46, use coordenadas esféricas para calcular la integral triple de $f(x,y,z)$ *sobre la región dada.*

41. $f(x,y,z) = y; \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad x,y,z \le 0$

42. $f(x,y,z) = \rho^{-3}; \quad 2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$

43. $f(x,y,z) = x^2 + y^2; \quad \rho \le 1$

44. $f(x,y,z) = 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 4z, \quad z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$

45. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$

46. $f(x,y,z) = \rho; \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \quad z \le 1, \quad x \ge 0$

47. Use coordenadas esféricas para evaluar la integral triple de $f(x,y,z) = z$ sobre la región:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2} \qquad 1 \le \rho \le 2$$

48. Halle el volumen de la región que se encuentra por encima del cono $\phi = \phi_0$ y por debajo de la esfera $\rho = R$.

49. Calcule la integral de:

$$f(x,y,z) = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

sobre la porción de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$ def nida por $z \ge 2$.

50. Calcule el volumen del cono de la f gura 21 usando coordenadas esféricas.

51. Calcule el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, usando tanto coordenadas esféricas como coordenadas cilíndricas.

52. Sea $\mathcal{W}$ la región que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2$, entre $z = 0$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule la integral de $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ sobre $\mathcal{W}$, usando tanto coordenadas esféricas como coordenadas cilíndricas.

53. Curva gaussiana Uno de los resultados clave en cálculo es la determinación del área bajo la curva gaussiana (f gura 23):

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Esta integral aparece en ingeniería, física y estadística, y aunque e^{-x^2} no tiene una primitiva elemental, se puede calcular I usando integración múltiple.

(a) Pruebe que $I^2 = J$, donde J es la integral doble impropia:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

Indicación: use el teorema de Fubini y que $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2}e^{-y^2}$.

(b) Evalúe J en coordenadas polares.

(c) Demuestre que $I = \sqrt{\pi}$.

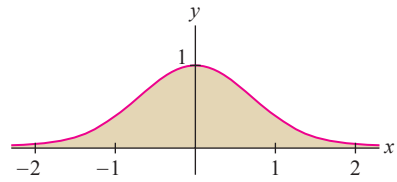


FIGURA 23 La curva gaussiana $y = e^{-x^2}$.

Problemas avanzados

54. Una integral múltiple impropia Pruebe que la integral triple de $(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-2}$ sobre $\mathbb{R}^3$ es igual a π^2. Se trata de una integral impropia, por lo que integre primero para $\rho \le R$ y después considere $R \to +\infty$.

55. Demuestre la fórmula:

$$\iint_{\mathcal{D}} \ln r\,dA = -\frac{\pi}{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\mathcal{D}$ es el disco unitario $x^2 + y^2 \le 1$. Se trata de una integral impropia pues $\ln r$ no está def nido en $(0, 0)$, por lo que integre primero sobre la corona circular $a \le r \le 1$ donde $0 < a < 1$ y después considere $a \to 0$.

56. Recuerde que la integral impropia $\int_0^1 x^{-a}\,dx$ converge si y sólo si $a < 1$. ¿Para qué valores de a converge $\iint_{\mathcal{D}} r^{-a}\,dA$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\mathcal{D}$ es el disco unitario $x^2 + y^2 \le 1$?

16.5 Aplicaciones de las integrales múltiples

Esta sección trata sobre algunas aplicaciones de las integrales múltiples (como la masa, la carga o la población) que se distribuyen según una cierta densidad ρ en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. En cálculo en una variable se vio que la "cantidad total" se def ne como la integral de la densidad. Análogamente, la cantidad total de una magnitud que se distribuya en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ se def ne como una integral doble o triple:

$$\text{Cantidad total} = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x,y)\,dA \quad \text{o} \quad \iiint_{\mathcal{W}} \rho(x,y,z)\,dV \qquad (1)$$

La función de densidad ρ tiene unidades de "magnitud por unidad de área" (o por unidad de volumen).

La idea en que se basa la ec. (1) es similar a la de la situación en una variable. Suponga, por ejemplo, que $\rho(x, y)$ es una densidad de población (f gura 1). Cuando la densidad es constante, la población total es simplemente la densidad por el área:

$$\text{Población} = \text{densidad (personas/km}^2) \times \text{área (km}^2)$$

Para tratar la densidad en el caso, digamos de un rectángulo $\mathcal{R}$, se divide $\mathcal{R}$ en pequeños rectángulos $\mathcal{R}_{ij}$ de área $\Delta x \Delta y$ sobre los que ρ es prácticamente constante (suponiendo que ρ es continua sobre $\mathcal{R}$). La población en $\mathcal{R}_{ij}$ es aproximadamente $\rho(P_{ij})\,\Delta x \Delta y$ para cualquier punto intermedio P_{ij} en $\mathcal{R}_{ij}$, y la suma de estas aproximaciones es una suma de Riemann que converge a la integral doble:

$$\int_{\mathcal{R}} \rho(x,y)\,dA \approx \sum_i \sum_j \rho(P_{ij}) \Delta x \Delta y$$

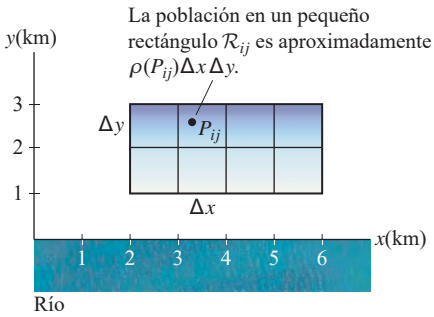


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Densidad de población La densidad de población en un área rural cercana a un río es:

$$\rho(x,y) = 40x\,e^{0,1y} \text{ personas por km}^2$$

¿Cuánta gente vive en la región $\mathcal{R}$: $2 \le x \le 6$, $1 \le y \le 3$ (figura 1)?

Solución La población total es la integral de la densidad de población:

$$\iint_{\mathcal{R}} 40x\,e^{0,1y}\,dA = \int_2^6 \int_1^3 40x\,e^{0,1y}\,dx\,dy =$$

$$= \left(\int_2^6 40x\,dx\right)\left(\int_1^3 e^{0,1y}\,dy\right) =$$

$$= \left(20x^2\Big|_{x=2}^{6}\right)\left(10e^{0,1y}\Big|_{y=1}^{3}\right) \approx (640)(2{,}447) \approx 1566 \text{ personas}$$

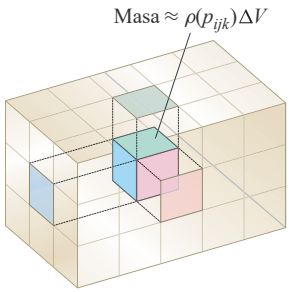


FIGURA 2 La masa de una pequeña caja es aproximadamente $\rho(P_{ijk})\,\Delta V$.

En el siguiente ejemplo, se calcula la masa de un objeto como la integral de la densidad de masa. En tres dimensiones, este cálculo se justifica dividiendo $\mathcal{W}$ en cajas $\mathcal{B}_{ijk}$ de volumen ΔV que son tan pequeñas que la densidad de masa es prácticamente constante sobre $\mathcal{B}_{ijk}$ (figura 2). La masa de $\mathcal{B}_{ijk}$ es aproximadamente $\rho(P_{ijk})\,\Delta V$, donde P_{ijk} es cualquier punto intermedio en $\mathcal{B}_{ijk}$ y la suma de estas aproximaciones es una suma de Riemann que converge a la integral triple:

$$\iiint_{\mathcal{W}} \rho(x,y,z)\,dV \approx \sum_i \sum_j \sum_k \underbrace{\rho(P_{ijk})\Delta V}_{\text{Masa aproximada de } \mathcal{B}_{ijk}}$$

Cuando ρ es constante, se dice que la densidad de masa del sólido es **uniforme**. En tal caso, la integral triple es igual a ρV y la masa es simplemente $M = \rho V$.

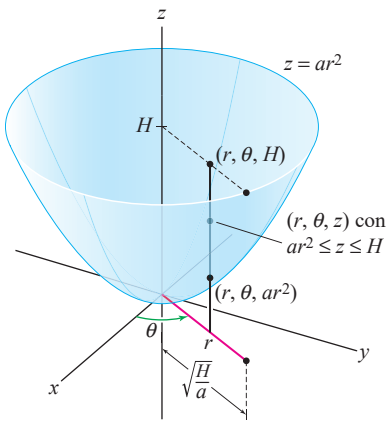


FIGURA 3 El paraboloide $z = a(x^2 + y^2)$.

EJEMPLO 2 Sea $a > 0$. Halle la masa del "cuenco sólido" $\mathcal{W}$ formado por los puntos en la parte interior del paraboloide $z = a(x^2 + y^2)$ para $0 \le z \le H$ (figura 3). Suponga una densidad de masa de $\rho(x,y,z) = z$.

Solución Como el cuenco es simétrico respecto al eje z se van a utilizar coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Recuerde que $r^2 = x^2 + y^2$ y, por tanto, la ecuación polar del paraboloide es $z = ar^2$. Un punto (r, θ, z) se encuentra *por encima* del paraboloide si $z \ge ar^2$, por lo que se encuentra *dentro* del cuenco si $ar^2 \le z \le H$. Dicho de otro modo, el cuenco queda descrito por:

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le r \le \sqrt{\frac{H}{a}} \qquad ar^2 \le z \le H$$

La masa del cuenco es la integral de la densidad de masa:

$$M = \iiint_{\mathcal{W}} \rho(x,y,z)\,dV = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{H/a}} \int_{z=ar^2}^{H} zr\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{H/a}} \left(\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}a^2r^4\right) r\,dr =$$

$$= 2\pi \left(\frac{H^2r^2}{4} - \frac{a^2r^6}{12}\right)\Bigg|_{r=0}^{\sqrt{H/a}} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{H^3}{4a} - \frac{H^3}{12a}\right) = \frac{\pi H^3}{3a}$$

A continuación, se van a calcular centros de masa. En la sección 9.3, se calcularon centros de masa de láminas (placas delgadas en el plano) pero se tuvo que suponer que la densidad de masa era constante. La integración múltiple permite considerar densidades de masa variables. Se def nen los momentos de una lámina $\mathcal{D}$ respecto a los ejes de coordenadas como:

$$M_y = \iint_{\mathcal{D}} x\rho(x,y)\,dA \qquad M_x = \iint_{\mathcal{D}} y\rho(x,y)\,dA$$

El **centro de masas** (CM) es el punto $P_{\text{CM}} = (x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}})$ donde:

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_y}{M} \qquad y_{\text{CM}} = \frac{M_x}{M} \tag{2}$$

Puede pensar en las coordenadas x_{CM} y y_{CM} como en **medias ponderadas**, que son las medias de x y de y en las que el factor ρ asigna un coef ciente mayor a los puntos con mayor densidad de masa.

Si $\mathcal{D}$ tiene densidad de masa uniforme (ρ constante), entonces los factores de ρ en el numerador y en el denominador de la ec. (2) se cancelan y el centro de masas coincide con el **centroide**, def nido como el punto cuyas coordenadas son las medias de las coordenadas sobre el dominio:

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} x\,dA \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} y\,dA$$

Aquí $A = \iint_{\mathcal{D}} 1\,dA$ es el área de $\mathcal{D}$.

- *En $\mathbb{R}^2$, se utiliza la notación M_y para la integral de $x\rho(x,y)$ pues x es la* distancia *al eje y.*
- *En $\mathbb{R}^3$, se utiliza la notación M_{yz} para la integral de $x\rho(x,y,z)$ pues en $\mathbb{R}^3$, x es la* distancia *al plano yz.*

En $\mathbb{R}^3$, los momentos de una región sólida $\mathcal{W}$ están def nidos, no respecto a los ejes de coordenadas como en $\mathbb{R}^2$, sino respecto a los planos de coordenadas:

$$M_{yz} = \iiint_{\mathcal{W}} x\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xz} = \iiint_{\mathcal{W}} y\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xy} = \iiint_{\mathcal{W}} z\rho(x,y,z)\,dV$$

El centro de masas es el punto $P_{\text{CM}} = (x_{\text{CM}}, y_{\text{CM}}, z_{\text{CM}})$ de coordenadas:

$$x_{\text{CM}} = \frac{M_{yz}}{M} \qquad y_{\text{CM}} = \frac{M_{xz}}{M} \qquad z_{\text{CM}} = \frac{M_{xy}}{M}$$

El centroide de $\mathcal{W}$ es el punto $P = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, el cual, como anteriormente, coincide con el centro de masas cuando ρ es constante:

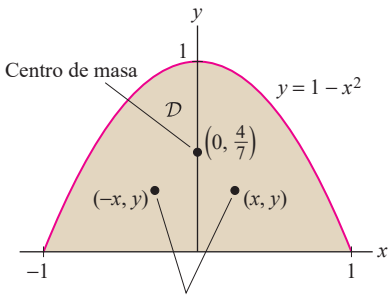
$$\overline{x} = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{W}} x\,dV \qquad \overline{y} = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{W}} y\,dV \qquad \overline{z} = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV$$

donde $V = \iiint_{\mathcal{W}} 1\,dV$ es el volumen de $\mathcal{W}$.

Utilizar argumentos de simetría suele simplif car los cálculos asociados a CM. Se dice que una región $\mathcal{W}$ en $\mathbb{R}^3$ es simétrica respecto al plano xy si $(x, y, -z)$ se encuentra en $\mathcal{W}$ siempre que (x, y, z) sea de $\mathcal{W}$. La densidad ρ es simétrica respecto al plano xy si:

$$\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$$

Dicho de otro modo, la densidad es la misma en puntos situados simétricamente respecto al plano xy. Si tanto $\mathcal{W}$ como ρ presentan este tipo de simetría, entonces $M_{xy} = 0$ y el CM se encuentra en el plano xy, es decir, $z_{\text{CM}} = 0$. Argumentos similares son también ciertos para los otros ejes de coordenadas y para dominios en el plano.



Las densidades de masa son iguales en puntos simétricos respecto al eje y.

FIGURA 4

EJEMPLO 3 Centro de masa Halle el centro de masa del dominio $\mathcal{D}$ limitado por $y = 1 - x^2$ y el eje x, suponiendo que la densidad de masa es $\rho(x, y) = y$ (f gura 4).

Solución El dominio $\mathcal{D}$ es simétrico respecto al eje y y también lo es la densidad de masa pues $\rho(x, y) = \rho(-x, y) = y$. Por tanto, $x_{\text{CM}} = 0$. Sólo es necesario calcular y_{CM}:

$$M_x = \iint_{\mathcal{D}} y\rho(x,y)dA = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2} y^2\,dy\,dx = \int_{x=-1}^{1}\left(\frac{1}{3}y^3\Big|_{y=0}^{1-x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{x=-1}^{1}\left(1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6\right)dx = \frac{1}{3}\left(2 - 2 + \frac{6}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{32}{105}$$

$$M = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x,y)dA = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2} y\,dy\,dx = \int_{x=-1}^{1}\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{1-x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1}\left(1 - 2x^2 + x^4\right)dx = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

Por tanto, $y_{\text{CM}} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{32}{105}\left(\dfrac{8}{15}\right)^{-1} = \dfrac{4}{7}$. ■

EJEMPLO 4 Halle el centro de masas del cuenco sólido $\mathcal{W}$ en el ejemplo 2 formado por los puntos dentro del paraboloide $z = a(x^2 + y^2)$ para $0 \le z \le H$, suponiendo una densidad de masa de $\rho(x, y, z) = z$.

Solución En la f gura 3 se muestra el dominio.

Etapa 1. **Use simetría**

Tanto el cuenco $\mathcal{W}$ como la densidad de masa son simétricos respecto al eje z, por lo que se debe esperar que el CM se encuentre sobre el eje z. De hecho, la densidad cumple tanto $\rho(-x, y, z) = \rho(x, y, z)$ como $\rho(x, -y, z) = \rho(x, y, z)$ y, en consecuencia, $M_{xz} = M_{yz} = 0$. Sólo queda calcular el momento M_{xy}.

Etapa 2. **Calcule el momento**

En el ejemplo 2, se describió el cuenco en coordenadas cilíndricas según:

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le r \le \sqrt{\frac{H}{a}} \qquad ar^2 \le z \le H$$

y se calculó la masa del cuenco resultando $M = \dfrac{\pi H^3}{3a}$. El momento es:

$$M_{xy} = \iiint_{\mathcal{W}} z\rho(x,y,z)\,dV = \iiint_{\mathcal{W}} z^2\,dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{H/a}}\int_{z=ar^2}^{H} z^2 r\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_{r=0}^{\sqrt{H/a}}\left(\frac{1}{3}H^3 - \frac{1}{3}a^3r^6\right)rdr =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{6}H^3r^2 - \frac{1}{24}a^3r^8\right)\Big|_{r=0}^{\sqrt{H/a}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{H^4}{6a} - \frac{a^3H^4}{24a^4}\right) = \frac{\pi H^4}{4a}$$

La coordenada z del centro de masas es:

$$z_{CM} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{\pi H^4/(4a)}{\pi H^3/(3a)} = \frac{3}{4}H$$

y el centro de masas propiamente dicho es $(0, 0, \frac{3}{4}H)$. ■

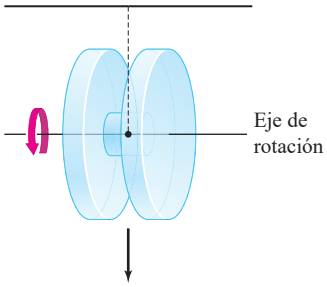


FIGURA 5 Un yoyó tiene energía cinética de rotación igual a $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia y ω es la velocidad angular. Vea el problema 47.

Los momentos de inercia se utilizan para analizar la rotación respecto a un eje. Por ejemplo, el yoyó de la f gura 5 gira alrededor de su centro a medida que cae hacia abajo y, de acuerdo con la física, tiene una energía cinética de rotación igual a:

$$\text{EC de rotación} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Aquí, ω es la velocidad angular (en radianes por segundo) respecto a este eje, e I es el **momento de inercia** respecto al eje de rotación. La cantidad I es el análogo rotacional de la masa m, que aparece en la expresión $\frac{1}{2}mv^2$ de la energía cinética lineal.

Por def nición, el momento de inercia respecto a un eje L es la integral de la "distancia al cuadrado desde el eje," ponderada por la densidad de masa. Restringiremos nuestra atención a los ejes de coordenadas. Así, para una lámina en el plano $\mathbb{R}^2$, se def nen los momentos de inercia:

$$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2\rho(x,y)\,dA$$
$$I_y = \iint_{\mathcal{D}} x^2\rho(x,y)\,dA \qquad \boxed{3}$$
$$I_0 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA$$

La cantidad I_0 se denomina el **momento polar de inercia.** Se trata del momento polar respecto al eje z, pues $x^2 + y^2$ es el cuadrado de la distancia de un punto en el plano xy al eje z. Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

Para un objeto sólido que ocupe la región $\mathcal{W}$ en $\mathbb{R}^3$:

$$I_x = \iiint_{\mathcal{W}} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$
$$I_y = \iiint_{\mathcal{W}} (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$$
$$I_z = \iiint_{\mathcal{W}} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$$

Los momentos de inercia vienen expresados en unidades de masa por unidades de longitud al cuadrado.

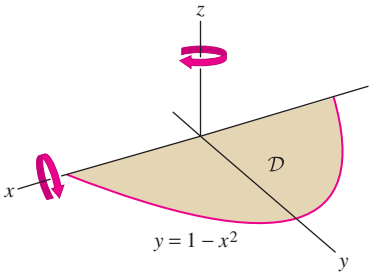


FIGURA 6 Rotando respecto al eje z, la placa continúa en el plano xy. Respecto al eje x, sale fuera del plano xy.

EJEMPLO 5 Una lamina $\mathcal{D}$ de densidad de masa uniforme y masa total M kg ocupa la región comprendida entre $y = 1 - x^2$ y el eje x (en metros). Calcule la EC de rotación si $\mathcal{D}$ rota a una velocidad angular de $\omega = 4$ rad/s respecto a:

(a) el eje x **(b)** el eje z

Solución En la f gura 6 se muestra la lámina. Para hallar la energía cinética de rotación respecto a los ejes x y z, se necesita calcular I_x e I_0, respectivamente.

Etapa 1. **Halle la densidad de masa**

La densidad de masa es uniforme (es decir, ρ es constante), pero esto no quiere decir que $\rho = 1$. De hecho, el área de $\mathcal{D}$ es $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \frac{4}{3}$, por lo que la densidad de masa (masa por unidad de área) es:

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{área}} = \frac{M}{\frac{4}{3}} = \frac{3M}{4}\ \text{kg/m}^2$$

Etapa 2. **Calcule los momentos**

$$I_x = \int_{-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2} y^2\rho\, dy\, dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1-x^2)^3\left(\frac{3M}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{M}{4}\int_{-1}^{1}(1-3x^2+3x^4-x^6)\,dx = \frac{8M}{35}\ \text{kg m}^2$$

Para calcular I_0, se utilizará la relación $I_0 = I_x + I_y$. Se tiene:

$$I_y = \int_{-1}^{1}\int_{y=0}^{1-x^2} x^2\rho\, dy\, dx = \left(\frac{3M}{4}\right)\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)\,dx = \frac{M}{5}$$

y por tanto:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{8M}{35} + \frac{M}{5} = \frac{3M}{7} \qquad \boxed{4}$$

Etapa 3. **Calcule la energía cinética**

Suponiendo una velocidad angular de $\omega = 4$ rad/s, se tiene:

$$\text{EC de rotación respecto al eje } x = \frac{1}{2}I_x\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8M}{35}\right)4^2 \approx 1{,}8M\,\text{J}$$

$$\text{EC de rotación respecto al eje } z = \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3M}{7}\right)4^2 \approx 3{,}4M\,\text{J}$$

La unidad de energía es el julio (J), igual a 1 kg m^2/s^2. ■

ATENCIÓN *La relación*

$$I_0 = I_x + I_y$$

es cierta para una lámina en el plano xy. Sin embargo, no hay una relación de este tipo válida para cualquier objeto sólido de $\mathbb{R}^3$.

Un punto de masa m situado a una distancia r de un eje tiene momento de inercia $I = mr^2$ respecto a ese eje. Dado un objeto extenso de masa total M (no necesariamente una masa puntual), cuyo momento de inercia con respecto al eje sea I, se def ne el **radio de giro** como $r_g = (I/M)^{1/2}$. Con esta def nición, el momento de inercia no cambiaría si toda la masa del objeto se concentrara en un punto situado a una distancia r_g desde el eje.

■ **EJEMPLO 6** **Radio de giro de una semiesfera** Halle el radio de giro respecto al eje z de la semiesfera sólida $\mathcal{W}$ def nida por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $0 \le z \le 1$, suponiendo una densidad de masa de $\rho(x, y, z) = z$ kg/m^3.

Solución Para calcular el radio de giro respecto al eje z, se debe calcular I_z y la masa total M. Se utilizarán coordenadas esféricas:

$$x^2 + y^2 = (\rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi)^2 + (\rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi)^2 = \rho^2\,\text{sen}^2\,\phi, \qquad z = \rho\cos\phi$$

$$I_z = \iiint_{\mathcal{W}}(x^2+y^2)z\,dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{R}(\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi)(\rho\cos\phi)\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta =$$

$$= 2\pi\left(\int_0^R \rho^5\,d\rho\right)\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\text{sen}^3\,\phi\cos\phi\,d\phi\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{R^6}{6}\right)\left(\frac{\text{sen}^4\,\phi}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{\pi R^6}{12}\ \text{kg-m}^2$$

$$M = \iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{R}(\rho\cos\phi)\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta =$$

$$= \left(\int_{\rho=0}^{R} \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos\phi \, \operatorname{sen}\phi \, d\phi \right) \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) = \frac{\pi R^4}{4} \text{ kg}$$

El radio de giro es $r_g = (I_z/M)^{1/2} = (R^2/3)^{1/2} = R/\sqrt{3}$ m. ■

Teoría de la probabilidad

En la sección 8.7, se estudió de qué manera las probabilidades pueden ser representadas como áreas por debajo de curvas (figura 7). Recuerde que una *variable aleatoria* X se define como el resultado de un experimento o una medición, cuyo valor se desconoce a priori. La probabilidad de que el valor de X se encuentre entre a y b se denota como $P(a \le X \le b)$. Además, X es una *variable aleatoria continua*, o absolutamente continua, si existe una función $p(x)$, denominada la *función de densidad de probabilidad*, tal que (figura 7):

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)\,dx$$

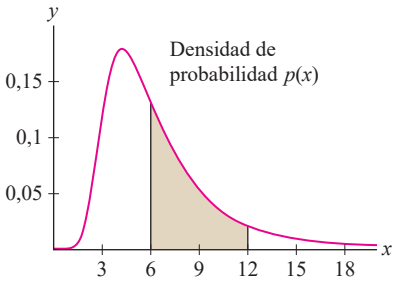


FIGURA 7 El área sombreada es la probabilidad que X se encuentre entre 6 y 12.

La integración doble entra en juego cuando se consideran "probabilidades conjuntas" para dos variables aleatorias X e Y. Denote como:

$$P(a \le X \le b;\ c \le Y \le d)$$

la probabilidad que X e Y cumplan:

$$a \le X \le b \qquad c \le Y \le d$$

Por ejemplo, si X es la altura (en centímetros) e Y es el peso (en kilogramos) de una cierta población, entonces:

$$P(160 \le X \le 170;\ 52 \le Y \le 63)$$

es la probabilidad de que una persona escogida al azar tenga altura entre 160 y 170 cm y peso entre 52 y 63 kg.

Se dice que X e Y son conjuntamente continuas si existe una función $p(x,y)$, denominada la **función de densidad de probabilidad conjunta** (o simplemente la densidad conjunta), tal que para cualesquiera intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$ (figura 8), se tiene:

$$P(a \le X \le b; c \le Y \le d) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} p(x,y)\,dy\,dx$$

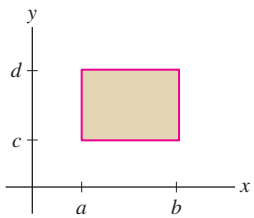


FIGURA 8 La probabilidad $P(a \le X \le b; c \le Y \le d)$ es igual a la integral de $p(x,y)$ sobre el rectángulo.

En la nota al margen se recuerdan dos condiciones que debe verificar una función de densidad. Las funciones de densidad conjuntas deben verificar condiciones similares: en primer lugar, $p(x,y) \ge 0$ para todo x e y (pues las probabilidades no pueden ser negativas) y, segundo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy\,dx = 1 \qquad \boxed{5}$$

Esta condición se suele denominar la **condición de normalización**. Se cumple porque es cierto (la probabilidad es 1) que X e Y alcanzan sus valores entre $-\infty$ y $+\infty$.

RECORDATORIO *Condiciones que debe cumplir una función de densidad de probabilidad:*

- $p(x) \ge 0$
- $p(x)$ *cumple* $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) = 1$

■ **EJEMPLO 7** Sin un mantenimiento adecuado, el tiempo hasta el fallo (en meses) de dos sensores en un avión son variables aleatorias X e Y con densidad conjunta:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{864} e^{-x/24 - y/36} & \text{para } x \ge 0, y \ge 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los sensores funcione después de dos años?

Solución El problema pide la probabilidad $P(0 \le X \le 24;\ 0 \le Y \le 24)$:

$$\int_{x=0}^{24}\int_{y=0}^{24} p(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{864}\int_{x=0}^{24}\int_{y=0}^{24} e^{-x/24-y/36}\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{864}\left(\int_{x=0}^{24} e^{-x/24}\,dx\right)\left(\int_{y=0}^{24} e^{-y/36}\,dy\right) =$$

$$= \frac{1}{864}\left(-24e^{-x/24}\Big|_0^{24}\right)\left(-36e^{-y/36}\Big|_0^{24}\right) =$$

$$= (1-e^{-1})(1-e^{-24/36}) \approx 0{,}31$$

Existe un 31 % de posibilidades de que ninguno de los sensores funcione pasados dos años. ■

De forma más general, se puede calcular la probabilidad de que X e Y cumplan condiciones de diferentes tipos. Por ejemplo, $P(X+Y \le M)$ denota la probabilidad de que la suma $X+Y$ sea a lo sumo M. Esta probabilidad es igual a la integral:

$$P(X+Y \le M) = \iint_{\mathcal{D}} p(x,y)\,dy\,dx$$

donde $\mathcal{D} = \{(x,y) : x+y \le M\}$.

■ **EJEMPLO 8** Calcule la probabilidad de que $X+Y \le 3$, donde X y Y tienen densidad conjunta:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{81}(2xy+2x+y) & \text{para } 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Solución La función de densidad de probabilidad $p(x,y)$ es diferente de cero únicamente en el cuadrado de la f gura 9. Dentro de este cuadrado, la desigualdad $x+y \le 3$ se cumple únicamente en el triángulo sombreado, por lo que la probabilidad de que $X+Y \le 3$ es igual a la integral de $p(x,y)$ sobre el triángulo:

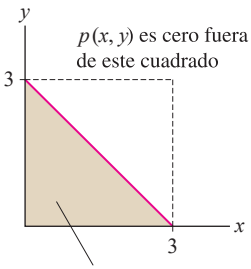
$$\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x} p(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{81}\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{3-x}\left(2xy+2x+y\right)dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{81}\int_{x=0}^{3}\left(xy^2+\frac{1}{2}y^2+2xy\right)\Big|_{y=0}^{3-x}dx =$$

$$= \frac{1}{81}\int_{x=0}^{3}\left(x^3-\frac{15}{2}x^2+12x+\frac{9}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{81}\left(\frac{1}{4}3^4-\frac{5}{2}3^3+6(3^2)+\frac{9}{2}(3)\right) = \frac{1}{4}$$

■



Región en el primer cuadrante en la que $x+y \le 3$.

FIGURA 9

16.5 RESUMEN

- Si la densidad de masa es constante, entonces el centro de masas coincide con el *centroide*, cuyas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ (y $\overline{z}$ en tres dimensiones) son los valores medios de x, y y z sobre el dominio. Para un dominio en $\mathbb{R}^2$:

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} x\,dA \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} y\,dA \qquad A = \iint_{\mathcal{D}} 1\,dA$$

	En $\mathbb{R}^2$	En $\mathbb{R}^3$
Masa total	$M = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x,y)\,dA$	$M = \iiint_{\mathcal{W}} \rho(x,y,z)\,dV$
Momentos	$M_x = \iint_{\mathcal{D}} y\rho(x,y)\,dA$ $M_y = \iint_{\mathcal{D}} x\rho(x,y)\,dA$	$M_{yz} = \iiint_{\mathcal{W}} x\rho(x,y,z)\,dV$ $M_{xz} = \iiint_{\mathcal{W}} y\rho(x,y,z)\,dV$ $M_{xy} = \iiint_{\mathcal{W}} z\rho(x,y,z)\,dV$
Centro de masa	$x_{\text{CM}} = \dfrac{M_y}{M}, \quad y_{\text{CM}} = \dfrac{M_x}{M}$	$x_{\text{CM}} = \dfrac{M_{yz}}{M}, \quad y_{\text{CM}} = \dfrac{M_{xz}}{M}, \quad z_{\text{CM}} = \dfrac{M_{xy}}{M}$
Momentos de inercia	$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2\rho(x,y)\,dA$ $I_y = \iint_{\mathcal{D}} x^2\rho(x,y)\,dA$ $I_0 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA$ $(I_0 = I_x + I_y)$	$I_x = \iiint_{\mathcal{W}} (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$ $I_y = \iiint_{\mathcal{W}} (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$ $I_z = \iiint_{\mathcal{W}} (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$

- Radio de giro: $r_g = (I/M)^{1/2}$
- Las variables aleatorias X e Y tienen función de densidad de probabilidad conjunta $p(x,y)$ si:

$$P(a \le X \le b; c \le Y \le d) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} p(x,y)\,dy\,dx$$

- Una función de densidad de probabilidad conjunta debe verif car $p(x,y) \ge 0$ y:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,dx = 1$$

16.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la densidad de masa de un volumen sólido $\rho(x,y,z)$ de 5 m^3 con densidad de masa uniforme y una masa total de 25 kg?

2. Un dominio $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^2$ con densidad de masa uniforme es simétrico respecto al eje y. ¿Cuál de las siguientes igualdades es cierta?

(a) $x_{\text{CM}} = 0$ **(b)** $y_{\text{CM}} = 0$ **(c)** $I_x = 0$ **(d)** $I_y = 0$

3. Si $p(x,y)$ es la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y, ¿qué representa la integral doble de $p(x,y)$ sobre $[0,1] \times [0,1]$? ¿Qué representa la integral de $p(x,y)$ sobre el triángulo limitado por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$?

Problemas

1. Halle la masa total del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ suponiendo una densidad de masa de:

$$\rho(x,y) = x^2 + y^2$$

2. Calcule la masa total de una placa limitada por $y = 0$ e $y = x^{-1}$ para $1 \le x \le 4$ (en metros), suponiendo una densidad de masa de $\rho(x,y) = = y/x$ kg/m^2.

3. Halle la carga total en la región por debajo de la gráf ca de $y = = 4e^{-x^2/2}$ para $0 \le x \le 10$ (en centímetros), suponiendo una densidad de carga de $\rho(x,y) = 10^{-6}xy$ culombios por centímetro cuadrado.

4. Halle la población total dentro de un radio de 4 kilómetros del centro de la ciudad (situado en el origen), suponiendo una densidad de población de $\rho(x,y) = 2000(x^2+y^2)^{-0,2}$ personas por kilómetro cuadrado.

5. Halle la población total dentro del sector $2|x| \le y \le 8$, suponiendo una densidad de población de $\rho(x,y) = 100e^{-0,1y}$ personas por kilómetro cuadrado.

6. Halle la masa total de la región sólida $\mathcal{W}$ def nida por $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 4$ y $x \le z \le 32 - x$ (en centímetros), suponiendo una densidad de masa de $\rho(x,y,z) = 6y$ g/cm^3.

7. Calcule la carga total de la bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 5$ (en centímetros), suponiendo una densidad de carga (en culombios por centímetro cúbico) de:

$$\rho(x,y,z) = (3 \cdot 10^{-8})(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

8. Calcule la masa total de la placa de la f gura 10, suponiendo una densidad de masa de $f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$ g/cm^2.

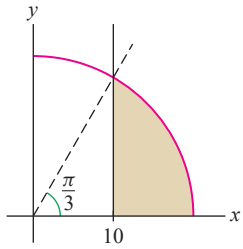


FIGURA 10

9. Suponga que la densidad de la atmósfera, como función de la altitud h (en km) por encima del nivel del mar es $\rho(h) = ae^{-bh}$ kg/km^3, donde $a = 1{,}225 \times 10^9$ y $b = 0{,}13$. Calcule la masa total de la atmósfera contenida en la región con forma de cono $\sqrt{x^2 + y^2} \le h \le 3$.

10. Calcule la carga total sobre una placa $\mathcal{D}$ con la forma de una elipse de ecuación polar:

$$r^2 = \left(\frac{1}{6}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{9}\cos^2\theta\right)^{-1}$$

a la que se ha quitado el disco $x^2 + y^2 \le 1$ (f gura 11) suponiendo una densidad de carga de $\rho(r,\theta) = 3r^{-4}$ C/cm^2.

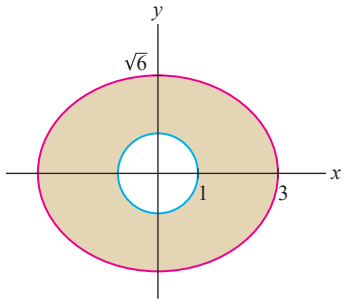


FIGURA 11

En los problemas 11-14, halle el centroide de la región dada.

11. Región limitada por $y = 1 - x^2$ e $y = 0$.

12. Región limitada por $y^2 = x + 4$ y $x = 4$.

13. Cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

14. Lámina inf nita limitada por los ejes x e y y la gráf ca de $y = e^{-x}$.

15. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para calcular numéricamente el centroide de la región sombreada en la f gura 12, limitada por $r^2 = \cos 2\theta$ para $x \ge 0$.

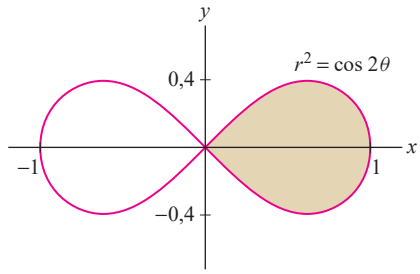


FIGURA 12

16. Pruebe que el centroide del sector de la f gura 13 tiene coordenada y:

$$\bar{y} = \left(\frac{2R}{3}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right)$$

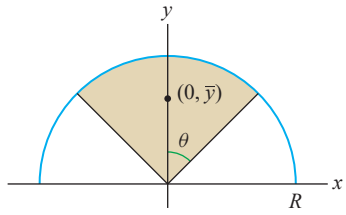


FIGURA 13

En los problemas 17-19, halle el centriode de la región sólida dada.

17. Semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$.

18. Región limitada por el plano xy, el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y el plano $x/R + z/H = 1$, donde $R > 0$ y $H > 0$.

19. La región con forma de "cucurucho de helado" $\mathcal{W}$ limitada, en coordenadas esféricas, por el cono $\phi = \pi/3$ y la esfera $\rho = 2$.

20. Pruebe que la coordenada z del centroide del tetraedro limitado por los planos de coordenadas y el plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

de la f gura 14 es $\bar{z} = c/4$. Deduzca, por simetría, que el centroide es $(a/4, b/4, c/4)$.

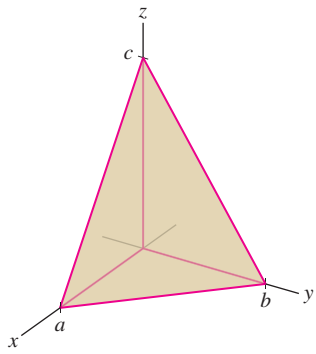


FIGURA 14

21. Halle el centroide de la región $\mathcal{W}$ que se encuentra por encima de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ y por debajo del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ (f gura 15).

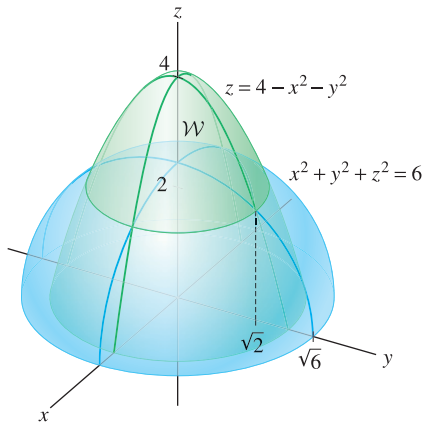


FIGURA 15

22. Sea $R > 0$ y $H > 0$ y sea $\mathcal{W}$ la mitad superior del elipsoide $x^2 + y^2 + (Rz/H)^2 = R^2$ para $z \geq 0$ (f gura 16). Halle el centroide de $\mathcal{W}$ y muestre que depende de la altura H pero no del radio R.

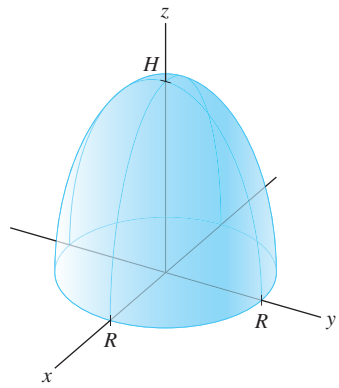


FIGURA 16 Mitad superior del elipsoide

$$x^2 + y^2 + (Rz/H)^2 = R^2, z \geq 0.$$

En los problemas 23-26, halle el centro de masas de la región con la densidad de masa dada ρ.

23. Región limitada por $y = 4 - x$, $x = 0$, $y = 0$; $\rho(x,y) = x$

24. Región limitada por $y^2 = x + 4$ y $x = 0$; $\rho(x,y) = y$

25. Región $|x| + |y| \leq 1$; $\rho(x,y) = x^2$

26. Semicírculo $x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0$; $\rho(x,y) = y$

27. Halle la coordenada z del centro de masas del primer octante de la esfera unitaria con densidad de masa $\rho(x,y,z) = y$ (f gura 17).

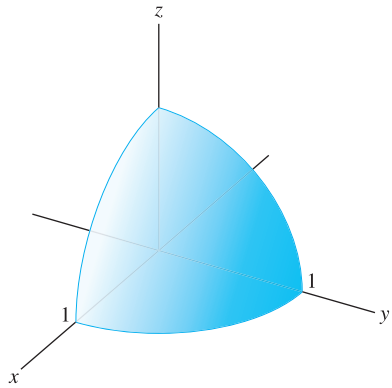


FIGURA 17

28. Halle el centro de masas de un cilindro de radio 2 y altura 4 y densidad de masa e^{-z}, donde z es la altura por encima de la base.

29. Sea $\mathcal{R}$ el rectángulo $[-a,a]\times[b,-b]$ con densidad uniforme y masa total M. Calcule:

(a) La densidad de masa ρ de $\mathcal{R}$.

(b) I_x y I_0.

(c) El radio de giro respecto al eje x.

30. Calcule I_x e I_0 para el rectángulo del problema 29 suponiendo una densidad de masa de $\rho(x,y) = x$.

31. Calcule I_0 y I_x para el disco $\mathcal{D}$ def nido por $x^2 + y^2 \leq 16$ (en metros), con masa total 1000 kg y densidad de masa uniforme. *Indicación:* Calcule I_0 primero y observe que $I_0 = 2I_x$. Exprese su respuesta en las unidades correctas.

32. Calcule I_x e I_y para la mitad del disco $x^2 + y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$ (en metros), de masa total M kg y densidad de masa uniforme.

En los problemas 33-36, sea $\mathcal{D}$ el dominio triangular limitado por los ejes de coordenadas y la recta $y = 3-x$, con densidad de masa $\rho(x,y) = y$. Calcule las siguientes cantidades.

33. Masa total

34. Centro de masa

35. I_x

36. I_0

En los problemas 37-40, sea $\mathcal{D}$ el dominio entre la recta $y = bx/a$ y la parábola $y = bx^2/a^2$ donde $a, b > 0$. Suponga que la densidad de masa es $\rho(x,y) = xy$. Calcule las cantidades que se indican.

37. Centroide

38. Centro de masas

39. I_x

40. I_0

41. Calcule el momento de inercia I_x del disco $\mathcal{D}$ def nido por $x^2 + y^2 \leq R^2$ (en metros) de masa total M kg. ¿Cuánta energía cinética (en julios) se necesita para rotar el disco respecto al eje x con velocidad angular de 10 rad/s?

42. Calcule el momento de inercia I_z de la caja $\mathcal{W} = [-a, a] \times [-a, a] \times [0, H]$ suponiendo que la masa total de $\mathcal{W}$ es M.

43. Pruebe que el momento de inercia de una esfera de radio R y masa total M con densidad uniforme, respecto a cualquier eje que pase por el centro de la esfera es $\frac{2}{5}MR^2$. Observe que la densidad de masa de la esfera es $\rho = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$.

44. Use el resultado del problema 43 para calcular el radio de giro de una esfera de radio R respecto a cualquier eje que pase por el centro de la esfera.

En los problemas 45 y 46, demuestre la fórmula para el cilindro circular de la figura 18.

45. $I_z = \frac{1}{2}MR^2$

46. $I_x = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2$

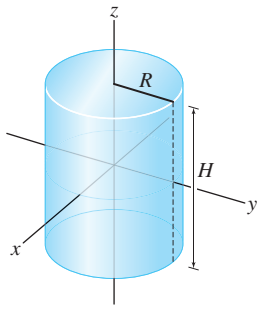


FIGURA 18

47. El yoyó de la figura 19 está formado por dos discos de radios $r = 3$ cm y un eje de radio $b = 1$ cm. Cada disco tiene una masa $M_1 = 20$ g y el eje tiene una masa $M_2 = 5$ g.

(a) Use el resultado del problema 45 para calcular el momento de inercia I del yoyó respecto al eje de simetría. Tenga en cuenta que es I la suma de los momentos de las tres componentes del yoyó.

(b) Se lanza el yoyó y hasta el final de sus 100 cm de cuerda, donde se hace girar con velocidad angular ω. La masa total del yoyó es $m = 45$ g, por lo que la energía potencial perdida es $\text{PE} = mgh = 45 \cdot 980 \cdot 100$ g cm^2/s^2. Encuentre ω suponiendo que una tercera parte de esta energía potencial se convierte en energía cinética de rotación.

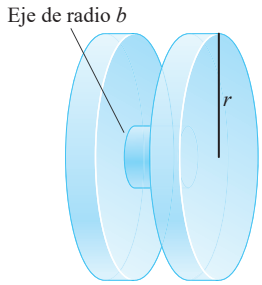


FIGURA 19

48. Calcule I_z para la región sólida $\mathcal{W}$ dentro del hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ entre $z = 0$ y $z = 1$.

49. Calcule $P(0 \le X \le 2; 1 \le Y \le 2)$, donde X e Y tienen función de densidad de probabilidad conjunta:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{72}(2xy + 2x + y) & \text{si } 0 \le x \le 4 \text{ y } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

50. Calcule la probabilidad de que $X + Y \le 2$, para dos variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta como en el problema 49.

51. El tiempo de duración (en meses) de dos componentes de un cierto dispositivo son variables aleatorias X e Y con función de densidad de probabilidad conjunta:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9216}(48 - 2x - y) & \text{si } x \ge 0, y \ge 0, 2x + y \le 48 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que ambas componentes funcionen por lo menos durante 12 meses sin fallar. Observe que $p(x,y)$ es diferente de cero únicamente en el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta $2x + y = 48$ que se muestra en la figura 20.

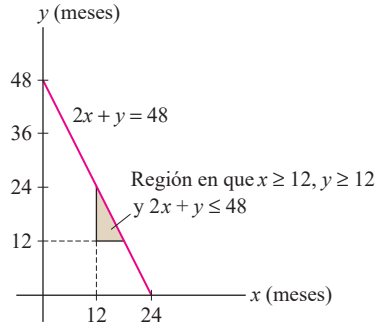


FIGURA 20

52. Halle una constante C de manera que:

$$p(x,y) = \begin{cases} Cxy & \text{si } 0 \le x \text{ y } 0 \le y \le 1 - x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

sea una función de densidad de probabilidad conjunta. A continuación calcule:

(a) $P(X \le \frac{1}{2}; Y \le \frac{1}{4})$ **(b)** $P(X \ge Y)$

53. Halle una constante C de manera que:

$$p(x,y) = \begin{cases} Cy & \text{si } 0 \le x \le 1 \text{ y } x^2 \le y \le x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

sea una función de densidad de probabilidad conjunta. A continuación calcule la probabilidad de que $Y \ge X^{3/2}$.

54. Se escogen al azar dos números X e Y entre 0 y 1. La función de densidad de probabilidad conjunta es $p(x,y) = 1$ si $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$ y $p(x,y) = 0$ en caso contrario. Calcule la probabilidad P que el producto XY sea, como mínimo, $\frac{1}{2}$.

55. Según la mecánica cuántica, las coordenadas x e y de una partícula confinada a una región $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$ son variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta:

$$p(x,y) = \begin{cases} C \operatorname{sen}^2(2\pi\ell x) \operatorname{sen}^2(2\pi n y) & \text{si } (x,y) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Los enteros ℓ y n determinan la energía de la partícula y C es una constante.

(a) Halle la constante C.

(b) Calcule la probabilidad de que una partícula con $\ell = 2$ y $n = 3$ se encuentre en la región $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{8}]$.

56. La función de onda del estado 1s de un electrón en el átomo de hidrógeno es:

$$\psi_{1s}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\rho/a_0}$$

donde a_0 es el radio de Bohr. La probabilidad de que el electrón se encuentre en una región $\mathcal{W}$ de $\mathbf{R}^3$ es igual a:

$$\iiint_{\mathcal{W}} p(x,y,z)\, dV$$

donde, en coordenadas esféricas:

$$p(\rho) = |\psi_{1s}(\rho)|^2$$

Use integración en coordenadas esféricas para probar que la probabilidad de hallar el electrón a una distancia mayor que el radio de Bohr es igual a $5/e^2 \approx 0{,}677$. El radio de Bohr es $a_0 = 5{,}3 \times 10^{-11}$ m, pero no se necesita su valor.

57. Según la ley de Coulomb, la fuerza entre dos cargas eléctricas de magnitudes q_1 y q_2 separadas por una distancia r es kq_1q_2/r^2 (k es una constante negativa). Sea F la fuerza neta sobre una partícula cargada P de carga Q culombios situada d centímetros por encima del centro de un disco circular de radio R con distribución de carga uniforme de densidad ρ C/m^2 (f gura 21). Por simetría, F actúa en la dirección vertical.

(a) Sea $\mathcal{R}$ un pequeño rectángulo polar de tamaño $\Delta r \times \Delta\theta$ situado a distancia r. Pruebe que $\mathcal{R}$ ejerce una fuerza sobre P cuya componente vertical es:

$$\left(\frac{k\rho Qd}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right) r\,\Delta r\,\Delta\theta$$

(b) Explique por qué F es igual a la siguiente integral doble y evalúela:

$$F = k\rho Qd \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r\,dr\,d\theta}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

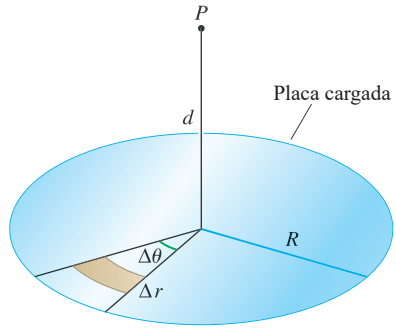


FIGURA 21

58. Sea $\mathcal{D}$ la región anular:

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad a \le r \le b$$

donde $b > a > 0$. Suponga que $\mathcal{D}$ presenta distribución de carga uniforme de ρ C/m^2. Sea F la fuerza neta sobre una partícula cargada de carga Q culombios situada en el origen (por simetría, F actúa sobre el eje x).

(a) Razone como en el problema 57 para demostrar que:

$$F = k\rho Q \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=a}^{b} \left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) r\,dr\,d\theta$$

(b) Calcule F.

Problemas avanzados

59. Sea $\mathcal{D}$ el dominio de la f gura 22. Suponga que $\mathcal{D}$ es simétrico respecto al eje y, es decir, tanto $g_1(x)$ como $g_2(x)$ son funciones pares.

(a) Demuestre que el centroide se encuentra sobre el eje y, es decir que $\overline{x} = 0$.

(b) Demuestre que si la densidad de masa cumple $\rho(-x,y) = -\rho(x,y)$, entonces $M_y = 0$ y $x_{CM} = 0$.

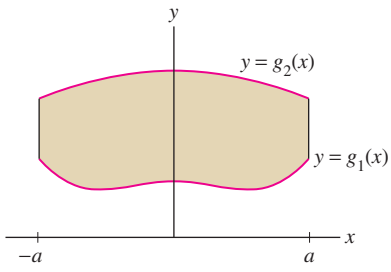


FIGURA 22

60. Teorema de Pappus Sea A el área de la región $\mathcal{D}$ comprendida entre dos gráf cas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$, donde $g_2(x) \ge g_1(x) \ge 0$. Demuestre el teorema de Pappus: el volumen del sólido obtenido por revolución de $\mathcal{D}$ respecto al eje x es $V = 2\pi A\overline{y}$, donde $\overline{y}$ es la coordenada y del centroide de $\mathcal{D}$ (la media de la coordenada y). *Indicación:* pruebe que:

$$A\overline{y} = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} y\,dy\,dx$$

61. Use el teorema de Pappus en el problema 60 para demostrar que el toro obtenido por revolución de la circunferencia de radio b centrada en $(0,a)$ respecto al eje x (donde $b < a$) tiene volumen $V = 2\pi^2 ab^2$.

62. Use el teorema de Pappus para calcular $\overline{y}$ para la mitad superior del disco $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$. *Indicación:* la revolución del disco respecto al eje x es una esfera.

63. Teorema de los ejes paralelos Sea $\mathcal{W}$ una región en $\mathbb{R}^3$ con centro de masas en el origen. Sea I_z el momento de inercia de $\mathcal{W}$ respecto al eje z y sea I_h el momento de inercia respecto al eje vertical que pasa por un punto $P = (a,b,0)$, donde $h = \sqrt{a^2+b^2}$. Por def nición:

$$I_h = \iiint_{\mathcal{W}} ((x-a)^2 + (y-b)^2)\rho(x,y,z)\, dV$$

Demuestre el teorema de los ejes paralelos: $I_h = I_z + Mh^2$.

64. Sea $\mathcal{W}$ un cilindro de radio 10 cm y altura 20 cm, de masa total $M = 500$ g. Use el teorema de los ejes paralelos (problema 63) y el resultado del problema 45 para calcular el momento de inercia de $\mathcal{W}$ respecto a un eje que es paralelo al cilindro y que se encuentra a una distancia de 30 cm del eje de simetría del cilindro.

16.6 Cambio de variables

Las fórmulas de integración en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas son casos particulares importantes de la fórmula general del cambio de variables para integrales múltiples. Esta sección está dedicada a esta fórmula.

Aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Una función $G: X \to Y$ de un conjunto X (el dominio) a otro conjunto Y se suele denominar **aplicación**. Dado $x \in X$, el elemento $G(x)$ pertenece a Y y se llama **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes $G(x)$ se denomina conjunto imagen o **rango** de G. Se denotará el conjunto imagen como $G(X)$.

En esta sección, se considerarán aplicaciones $G: \mathcal{D} \to \mathbf{R}^2$ definidas sobre un dominio $\mathcal{D}$ en $\mathbf{R}^2$ (figura 1). Para evitar confusiones, se utilizará u, v como variables en el dominio y x, y para el rango. Así, escribiremos $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, donde las componentes x e y son funciones de u y de v:

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

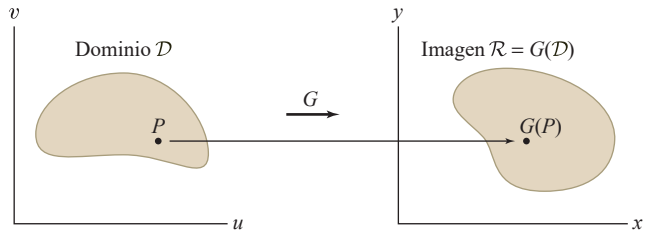


FIGURA 1 G aplica $\mathcal{D}$ en $\mathcal{R}$.

Una aplicación con la que ya estamos familiarizados es la que define las coordenadas polares. Para esta aplicación se utilizan las variables r, θ en lugar de u, v. La **aplicación del cambio a coordenadas polares** $G: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ se define como:

$$G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

EJEMPLO 1 Aplicación de las coordenadas polares Describa la imagen de un rectángulo polar $\mathcal{R} = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ bajo la aplicación del cambio a coordenadas polares.

Solución Según la figura 2, se observa que:

- Una recta vertical $r = r_1$ (que se muestra en rojo) se aplica sobre el conjunto de puntos de coordenada radial r_1 y ángulo arbitrario. Se trata de la circunferencia de radio r_1.
- Una recta horizontal $\theta = \theta_1$ (línea punteada en la figura) se aplica en el conjunto de puntos de ángulo polar θ y coordenada r arbitraria. Se trata de la recta que pasa por el origen de ángulo θ_1.

La imagen de $\mathcal{R} = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ bajo la aplicación del cambio a coordenadas polares $G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ es el rectángulo polar en el plano xy definido por $r_1 \le r \le r_2$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. ■

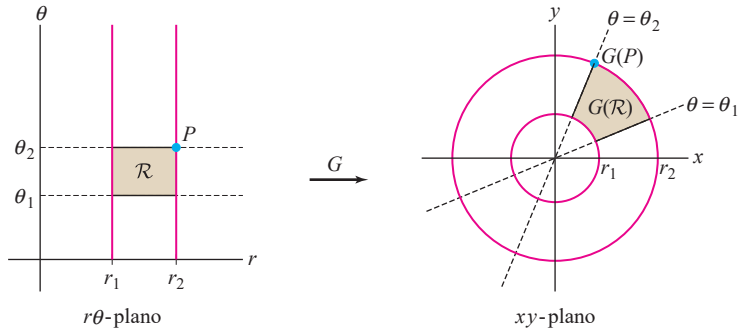


FIGURA 2 La aplicación del cambio a coordenadas polares $G(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$.

Las aplicaciones generales pueden ser bastante complicadas, por lo que es útil estudiar el caso más simple (las aplicaciones lineales) con detalle. Se dice que una aplicación $G(u, v)$ es **lineal** si es de la forma:

$$G(u, v) = (Au + Cv, Bu + Dv) \quad (A, B, C, D \text{ constantes})$$

Se puede entender mejor esta aplicación lineal considerando a G como una aplicación de vectores en el plano uv a vectores en el plano xy. Entonces, G cumple las siguientes propiedades de linealidad (vea el problema 46):

$$G(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = G(u_1, v_1) + G(u_2, v_2) \qquad \boxed{1}$$

$$G(cu, cv) = cG(u, v) \quad (c \text{ cualquier constante}) \qquad \boxed{2}$$

Una consecuencia de estas propiedades es que G aplica el paralelogramo generado por dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en el plano uv en el paralelogramo generado por las imágenes $G(\mathbf{a})$ y $G(\mathbf{b})$, tal y como se muestra en la f gura 3.

De forma más general, *G aplica el segmento que une dos puntos cualesquiera P y Q en el segmento que une $G(P)$ y $G(Q)$* (vea el problema 47). La cuadrícula generada por los vectores de la base $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ se aplica en la cuadrícula generada por los vectores imagen (f gura 3):

$$\mathbf{r} = G(1, 0) = \langle A, B\rangle$$
$$\mathbf{s} = G(0, 1) = \langle C, D\rangle$$

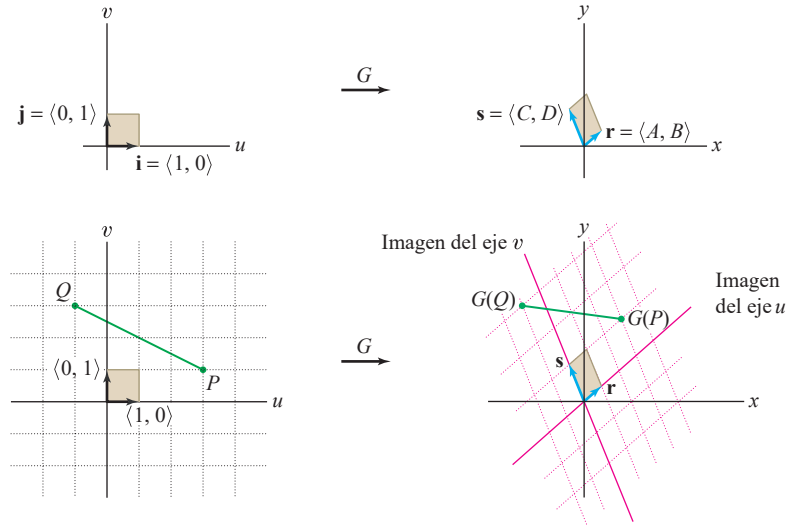


FIGURA 3 Una aplicación lineal G aplica un paralelogramo en un paralelogramo.

EJEMPLO 2 Imagen de un triángulo Halle la imagen del triángulo $\mathcal{T}$ de vértices $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$ bajo la aplicación lineal $G(u, v) = (2u - v, u + v)$.

Solución Como G es lineal, aplica el segmento que une dos vértices cualesquiera de $\mathcal{T}$ en el segmento que une las imágenes de los dos vértices. Por tanto, la imagen de $\mathcal{T}$ es el triángulo cuyos vértices son las imágenes (f gura 4):

$$G(1, 2) = (0, 3) \qquad G(2, 1) = (3, 3) \qquad G(3, 4) = (2, 7)d$$

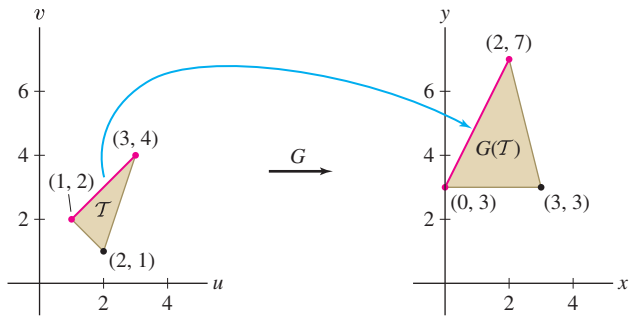


FIGURA 4 La aplicación $G(u, v) = (2u - v, u + v)$.

Para comprender una aplicación no lineal, suele ayudar determinar las imágenes de rectas horizontales y verticales, tal y como se hizo para el caso de la aplicación de las coordenadas polares.

EJEMPLO 3 Sea $G(u, v) = (uv^{-1}, uv)$ para $u > 0$, $v > 0$. Determine las imágenes de:

(a) Las rectas $u = c$ y $v = c$ **(b)** $[1, 2] \times [1, 2]$

Halle la aplicación inversa G^{-1}.

Solución En esta aplicación, se tiene $x = uv^{-1}$ e $y = uv$. Por tanto:

$$xy = u^2 \qquad \frac{y}{x} = v^2 \qquad \boxed{3}$$

(a) Según la primera parte de la ec. (3), G aplica un punto (c, v) en un punto del plano xy con $xy = c^2$. Dicho de otro modo, G aplica la recta vertical $u = c$ en la hipérbola $xy = c^2$. Análogamente, por la segunda parte de la ec. (3), la recta horizontal $v = c$ se aplica en el conjunto de puntos tales que $x/y = c^2$, o $y = c^2x$, que es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente c^2. Vea la f gura 5.

El término "rectángulo curvilíneo" se refiere a una región limitada en sus cuatro lados por curvas, como en la figura 5.

(b) La imagen de $[1, 2] \times [1, 2]$ es el rectángulo *curvilíneo* limitado por las curvas que son la imagen de las rectas $u = 1$, $u = 2$ y $v = 1$, $v = 2$. Según la ec. (3), esta región queda def nida por las desigualdades:

$$1 \le xy \le 4 \qquad 1 \le \frac{y}{x} \le 4$$

Para hallar G^{-1}, se utiliza la ec. (3) para expresar $u = \sqrt{xy}$ y $v = \sqrt{y/x}$. Así, la aplicación inversa es $G^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{xy}, \sqrt{y/x}\right)$. Se consideran las determinaciones positivas de la raíz porque $u > 0$ y $v > 0$ sobre el dominio que se está considerando.

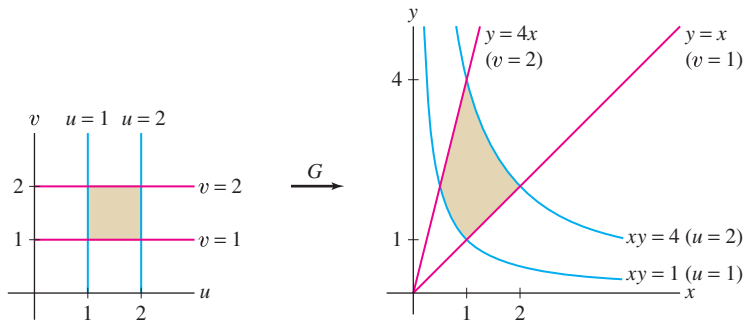


FIGURA 5 La aplicación $G(u, v) = (uv^{-1}, uv)$.

El cambio del área por una aplicación: el determinante jacobiano

El **determinante jacobiano** (o simplemente el jacobiano) de una aplicación:

$$G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

es el determinante:

$$\text{Jac}(G) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

El jacobiano $\text{Jac}(G)$ también se denota como $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. Observe que $\text{Jac}(G)$ es una función de u y v.

EJEMPLO 4 Evalúe el jacobiano de $G(u, v) = (u^3 + v, uv)$ en $(u, v) = (2, 1)$.

Solución Se tiene que $x = u^3 + v$ e $y = uv$, por lo que:

$$\text{Jac}(G) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3u^2 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = 3u^3 - v$$

El valor del jacobiano en $(2, 1)$ es $\text{Jac}(G)(2, 1) = 3 \cdot 2^3 - 1 = 23$.

RECORDATORIO *La definición de un determinante 2×2 es:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \boxed{4}$$

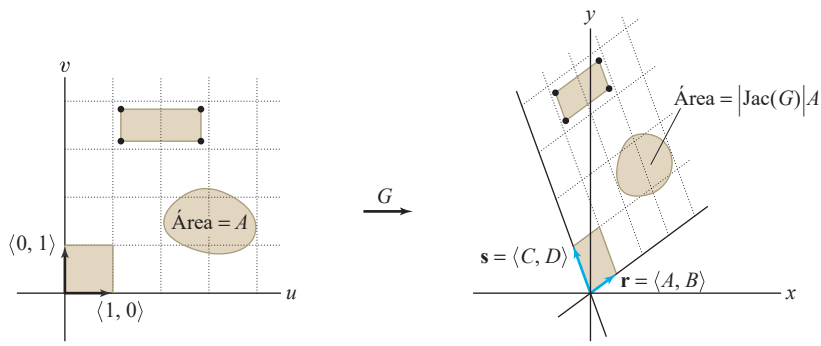


FIGURA 6 Una aplicación lineal G expande (o contrae) el área en el factor $|\text{Jac}(G)|$.

El jacobiano indica de qué manera cambia el área por una aplicación G. Se puede ver de manera más directa en el caso de una aplicación lineal $G(u, v) = (Au + Cv, Bu + Dv)$.

TEOREMA 1 Jacobiano de una aplicación lineal El jacobiano de una aplicación lineal:

$$G(u, v) = (Au + Cv, Bu + Dv)$$

es *constante* y de valor:

$$\text{Jac}(G) = \begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = AD - BC \tag{5}$$

Bajo G, el área de la región $\mathcal{D}$ se multiplica por el factor $|\text{Jac}(G)|$; es decir:

$$\text{Área}(G(\mathcal{D})) = |\text{Jac}(G)|\text{Área}(\mathcal{D}) \tag{6}$$

Demostración La ec. (5) se puede verif car por cálculo directo. Como:

$$x = Au + Cv \quad \text{e} \quad y = Bu + Dv$$

las derivadas parciales en el jacobiano son las constantes A, B, C, D.

A continuación se encuentra un esbozo de la demostración de la ec. (6). Se cumple en el cuadrado unitario $\mathcal{D} = [1, 0] \times [0, 1]$ porque $G(\mathcal{D})$ es el paralelogramo generado por los vectores $\langle A, B\rangle$ y $\langle C, D\rangle$ (f gura 6) y el área de este paralelogramo es:

$$|\text{Jac}(G)| = |AD - BC|$$

según el teorema 3 en la sección 13.4. De manera similar, se puede comprobar directamente que la ec. (6) es cierta para cualquier paralelogramo arbitrario (vea el problema 48). Para comprobar la ec. (6) para un dominio general $\mathcal{D}$, se utilizará que $\mathcal{D}$ se puede aproximar, de manera tan precisa como se requiera, por la unión de rectángulos de una f na cuadrícula de rectas paralelas a los ejes u y v. ■

No se puede esperar que la ec. (6) sea cierta para una aplicación no lineal. En realidad no tendría sentido tal y como está formulada, pues $\text{Jac}(G)(P)$ puede cambiar de un punto a otro. Sin embargo, es *aproximadamente cierta* si el dominio $\mathcal{D}$ es pequeño y P es un punto intermedio en $\mathcal{D}$:

$$\text{Área}(G(\mathcal{D})) \approx |\text{Jac}(G)(P)|\text{Área}(\mathcal{D}) \tag{7}$$

Este resultado se puede enunciar de forma más precisa en términos de límites:

$$|\text{Jac}(G)(P)| = \lim_{|\mathcal{D}|\to 0} \frac{\text{Área}(G(\mathcal{D}))}{\text{Área}(\mathcal{D})} \tag{8}$$

Aquí se escribe $|\mathcal{D}| \to 0$ para indicar el límite cuando el diámetro de $\mathcal{D}$ (la distancia máxima entre dos puntos de $\mathcal{D}$) tiende a cero.

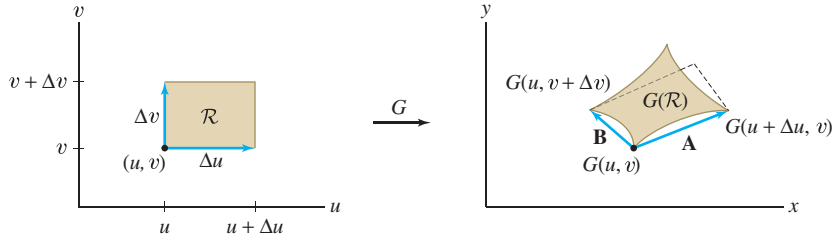


FIGURA 7 La imagen de un pequeño rectángulo por aplicaciones no lineales se puede aproximar mediante un paralelogramo, cuyos lados están determinados por la aproximación lineal.

UN APUNTE CONCEPTUAL Aunque una demostración rigurosa de la ec. (8) es demasiado técnica para incluirla aquí, se puede entender la ec. (7) como una aplicación de la aproximación lineal. Considere un rectángulo $\mathcal{R}$ de vértice en $P = (u, v)$ y lados de longitudes Δu y Δv y que se supone pequeño, como en la f gura 7. La imagen de $G(\mathcal{R})$ no es un paralelogramo pero se puede aproximar bien por el paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de la f gura:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= G(u+\Delta u, v) - G(u, v) = \\ &= (x(u+\Delta u, v) - x(u, v), y(u+\Delta u, v) - y(u, v)) \\ \mathbf{B} &= G(u, v+\Delta v) - G(u, v) = \\ &= (x(u, v+\Delta v) - x(u, v), y(u, v+\Delta v) - y(u, v))\end{aligned}$$

La aproximación lineal aplicada a las componentes de G da lugar a:

$$\mathbf{A} \approx \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u \right\rangle \qquad \boxed{9}$$

$$\mathbf{B} \approx \left\langle \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v \right\rangle \qquad \boxed{10}$$

Lo que f nalmente conduce a la aproximación deseada:

$$\begin{aligned}\text{Área}(G(\mathcal{R})) &\approx \left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\end{pmatrix}\right| = \\ &= \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right| \Delta u\,\Delta v = \\ &= |\text{Jac}(G)(P)|\text{Área}(\mathcal{R})\end{aligned}$$

pues el área de $\mathcal{R}$ es $\Delta u\,\Delta v$.

La fórmula del cambio de variables

Recuerde la fórmula de integración en coordenadas polares:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad \boxed{11}$$

Aquí, $\mathcal{D}$ es el rectángulo polar formado por los puntos $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ en el plano xy (vea la f gura 2). El dominio de integración a la derecha es el rectángulo $\mathcal{R} = = [\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2]$ en el plano $r\theta$. Por tanto, $\mathcal{D}$ es la imagen del dominio a la derecha, bajo la aplicación del cambio a coordenadas polares.

La fórmula general del cambio de variables tiene una forma similar. Dada una aplicación:

$$G: \quad \underset{\text{en el plano } uv}{\mathcal{D}_0} \quad \rightarrow \quad \underset{\text{en el plano } xy}{\mathcal{D}}$$

de un dominio en el plano uv a un dominio en el plano xy (f gura 8), esta fórmula expresa una integral sobre $\mathcal{D}$ como una integral sobre $\mathcal{D}_0$. El papel que desempeña el jacobiano se traduce en el factor r a la derecha de la ec. (11).

Se necesitan algunas hipótesis técnicas. En primer lugar, suponga que G es inyectiva, como mínimo en el interior de $\mathcal{D}_0$, pues se requiere que G abarque el dominio objetivo $\mathcal{D}$ solamente una vez. También se supondrá que G es una **aplicación** C^1, es decir, que las funciones componentes x e y tienen derivadas continuas. Bajo estas condiciones, si $f(x, y)$ es continua, se tiene el siguiente resultado.

RECORDATORIO *En las ecuaciones (9) y (10) se utiliza la aproximación lineal:*

$$x(u+\Delta u, v) - x(u, v) \approx \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u$$

$$y(u+\Delta u, v) - y(u, v) \approx \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$$

y

$$x(u, v+\Delta v) - x(u, v) \approx \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v$$

$$y(u, v+\Delta v) - y(u, v) \approx \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

RECORDATORIO *G es "inyectiva" si $G(P) = G(Q)$ únicamente para $P = Q$.*

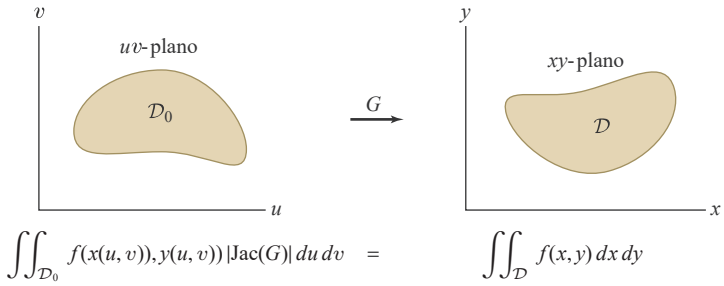


FIGURA 8 La fórmula del cambio de variables expresa una integral doble sobre $\mathcal{D}$ como una integral doble sobre $\mathcal{D}_0$.

La ec. (12) se resume por medio de la igualdad simbólica:

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Recuerde que $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ *denota el jacobiano* $\mathrm{Jac}(G)$.

TEOREMA 2 Fórmula del cambio de variables Sea $G\colon \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ una aplicación C^1 que sea inyectiva en el interior de $\mathcal{D}_0$. Si $f(x,y)$ es continua, entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}_0} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \qquad \boxed{12}$$

Demostración Se esboza la demostración. Observe, en primer lugar que la ec. (12) es *aproximadamente* cierta si los dominios $\mathcal{D}_0$ y $\mathcal{D}$ son pequeños. Sea $P = G(P_0)$ donde P_0 es cualquier punto intermedio de $\mathcal{D}_0$. Como $f(x,y)$ es continua, según la aproximación que se recuerda al margen y la ec. (7) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy &\approx f(P)\text{Área}(\mathcal{D}) \approx \\ &\approx f(G(P_0))\,|\mathrm{Jac}(G)(P_0)|\,\text{Área}(\mathcal{D}_0) \approx \\ &\approx \iint_{\mathcal{D}_0} f(G(u,v))\,|\mathrm{Jac}(G)(u,v)|\,du\,dv\end{aligned}$$

Si $\mathcal{D}$ no es pequeño, divida éste en subdominios $D_j = G(\mathcal{D}_{0j})$ (la figura 9 muestra un rectángulo dividido en rectángulos más pequeños), aplique la aproximación en cada subdominio y sume:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy &= \sum_j \iint_{\mathcal{D}_j} f(x,y)\,dx\,dy \approx \\ &\approx \sum_j \iint_{\mathcal{D}_{0j}} f(G(u,v)))\,|\mathrm{Jac}(G)(u,v)|\,du\,dv = \\ &= \iint_{\mathcal{D}_0} f(G(u,v))\,|\mathrm{Jac}(G)(u,v)|\,du\,dv\end{aligned}$$

Se puede demostrar que el error tiende a cero cuando el máximo de los diámetros de $\mathcal{D}_j$ tiende a cero. De esta manera se obtiene la fórmula del cambio de variables. ■

RECORDATORIO *Si $\mathcal{D}$ es un dominio cuyo diámetro es pequeño, $P \in \mathcal{D}$ es un punto intermedio y $f(x,y)$ es continua, entonces (vea la sección 16.2):*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \approx f(P)\text{Área}(\mathcal{D})$$

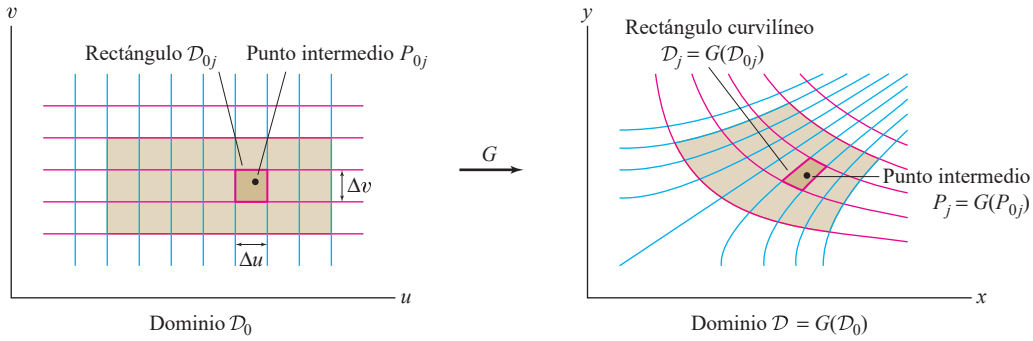


FIGURA 9 G aplica una cuadrícula rectangular en $\mathcal{D}_0$ en una cuadrícula curvilínea en $\mathcal{D}$.

EJEMPLO 5 Revisión de las coordenadas polares Use la fórmula del cambio de variables para deducir la fórmula de integración en coordenadas polares.

Solución El jacobiano de la aplicación del cambio a coordenadas polares $G(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ es:

$$\text{Jac}(G) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) = r$$

Sea $\mathcal{D} = G(\mathcal{R})$ bajo la aplicación del cambio a coordenadas polares G del rectángulo $\mathcal{R}$ def nido por $r_0 \le r \le r_1$, $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$ (vea la f gura 2). Entonces la ec. (12) conduce a la fórmula correspondiente de las coordenadas polares:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad \boxed{13}$$

Las hipótesis son importantes En la fórmula del cambio de variables se supone que G es inyectiva sobe el interior pero no necesariamente en la frontera del dominio. Así, se puede aplicar la ec. (12) a la aplicación del cambio a coordenadas polares G sobre el rectángulo $\mathcal{D}_0 = [0,1]\times[0,2\pi]$. En este caso, G es inyectiva en el interior, aunque no en la frontera de $\mathcal{D}_0$ pues $G(0,\theta) = (0,0)$ para todo θ y $G(r,0) = G(r,2\pi)$ para todo r. Por otra parte, la ec. (12) no se puede aplicar a G sobre el rectángulo $[0,1]\times[0,4\pi]$ porque no es inyectiva en el interior.

EJEMPLO 6 Use la fórmula del cambio de variables para calcular $\iint_{\mathcal{P}} e^{4x-y}\,dx\,dy$, donde $\mathcal{P}$ es el paralelogramo generado por los vectores $\langle 4,1\rangle$, $\langle 3,3\rangle$ en la f gura 10.

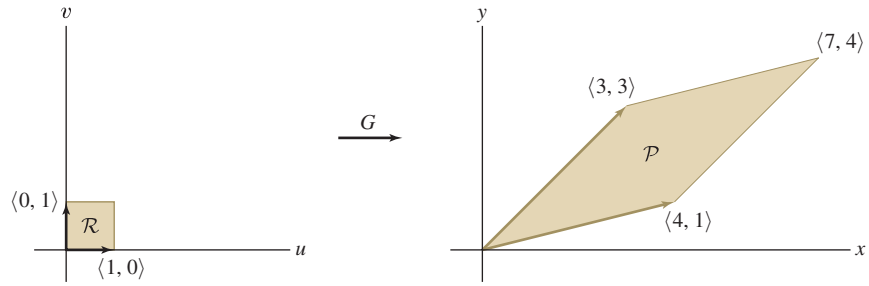


FIGURA 10 La aplicación $G(u,v) = (4u + 3v, u + 3v)$.

Solución

Etapa 1. **Def na una aplicación**

Se puede convertir la integral doble del enunciado en una integral sobre el cuadrado unitario $\mathcal{R} = [0,1]\times[0,1]$ si se determina una aplicación que aplique $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}$. La siguiente aplicación lineal funciona:

$$G(u,v) = (4u + 3v, u + 3v)$$

De hecho, $G(1,0) = (4,1)$ y $G(0,1) = (3,3)$, por lo que aplica $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}$ ya que las aplicaciones lineales aplican paralelogramos en paralelogramos.

Etapa 2. **Calcule el jacobiano**

$$\text{Jac}(G) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Recuerde que la aplicación lineal

$$G(u,v) = (Au + Cv, Bu + Dv)$$

cumple:

$$G(1,0) = (A,B), \quad G(0,1) = (C,D)$$

Etapa 3. **Exprese $f(x, y)$ en términos de las nuevas variables**

Como $x = 4u + 3v$ e $y = u + 3v$, se tiene:

$$e^{4x-y} = e^{4(4u+3v)-(u+3v)} = e^{15u+9v}$$

Etapa 4. **Aplique la fórmula del cambio de variables**

Según la fórmula del cambio de variables, $dx\,dy = 9\,du\,dv$:

$$\iint_{\mathcal{P}} e^{4x-y}\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} e^{15u+9v}\,|\text{Jac}(G)|\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^1 e^{15u+9v}\,(9\,du\,dv) =$$

$$= 9\left(\int_0^1 e^{15u}\,du\right)\left(\int_0^1 e^{9v}\,dv\right) = \frac{1}{15}(e^{15} - 1)(e^9 - 1)$$

EJEMPLO 7 Use la fórmula del cambio de variables para calcular:

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{D}$ es el dominio $1 \le xy \le 4$, $1 \le y/x \le 4$ (figura 11).

Solución En el ejemplo 3, se estudió la aplicación $G(u, v) = (uv^{-1}, uv)$, que se puede escribir como:

$$x = uv^{-1} \qquad y = uv$$

Se ha probado (figura 11) que G aplica el rectángulo $\mathcal{D}_0 = [1, 2] \times [1, 2]$ en el dominio $\mathcal{D}$. En realidad, como $xy = u^2$ y $xy^{-1} = v^2$, las dos condiciones $1 \le xy \le 4$ y $1 \le y/x \le 4$ que definen $\mathcal{D}$ resultan $1 \le u \le 2$ y $1 \le v \le 2$.

El jacobiano es:

$$\text{Jac}(G) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v^{-1} & -uv^{-2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}$$

Para aplicar la fórmula del cambio de variables, se expresa $f(x, y)$ en términos de u y v:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \left(\frac{u}{v}\right)^2 + (uv)^2 = u^2(v^{-2} + v^2)$$

Según la fórmula del cambio de variables:

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}_0} u^2(v^{-2} + v^2)\left|\frac{2u}{v}\right| du\,dv =$$

$$= 2\int_{v=1}^2 \int_{u=1}^2 u^3(v^{-3} + v)\,du\,dv =$$

$$= 2\left(\int_{u=1}^2 u^3\,du\right)\left(\int_{v=1}^2 (v^{-3} + v)\,dv\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}u^4\Big|_1^2\right)\left(-\frac{1}{2}v^{-2} + \frac{1}{2}v^2\Big|_1^2\right) = \frac{225}{16}$$

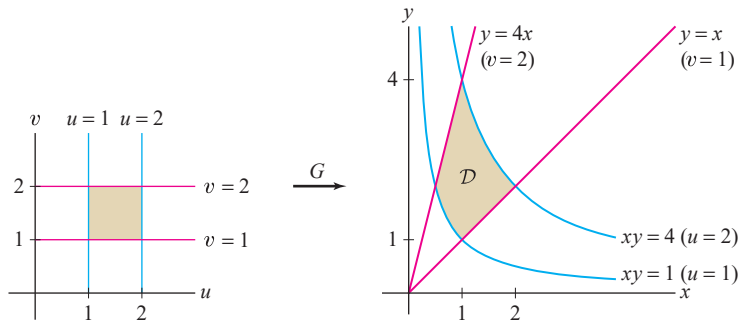


FIGURA 11

Recuerde que la fórmula del cambio de variables transforma una integral en xy en una integral en uv, pero que la aplicación G va del dominio uv al dominio xy. En ocasiones es más fácil hallar una aplicación F que vaya en la *dirección contraria*, del dominio xy al dominio uv. La aplicación que se busca, G, sería entonces la inversa $G = F^{-1}$. En el siguiente ejemplo se muestra que, en algunos casos, se puede evaluar la integral sin hallar explícitamente G. El punto clave es que el jacobiano de F es el inverso de Jac(G) (vea los problemas 49-51):

$$\text{Jac}(G) = \text{Jac}(F)^{-1} \qquad \text{donde } F = G^{-1} \tag{14}$$

La ec. (14) se puede escribir de la sugerente forma:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$$

EJEMPLO 8 Usando la aplicación inversa Integre $f(x,y) = xy(x^2 + y^2)$ sobre:

$$\mathcal{D} : -3 \le x^2 - y^2 \le 3 \quad 1 \le xy \le 4$$

Solución Hay una aplicación sencilla F que va en la dirección *contraria*. Sea $u = x^2 - y^2$ y $v = xy$. Entonces nuestro dominio queda definido por las desigualdades $-3 \le u \le 3$ y $1 \le v \le 4$ y se puede considerar una aplicación de $\mathcal{D}$ en el rectángulo $\mathcal{R} = [-3,3] \times [1,4]$ del plano uv (figura 12):

$$F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$$
$$(x,y) \to (x^2 - y^2, xy)$$

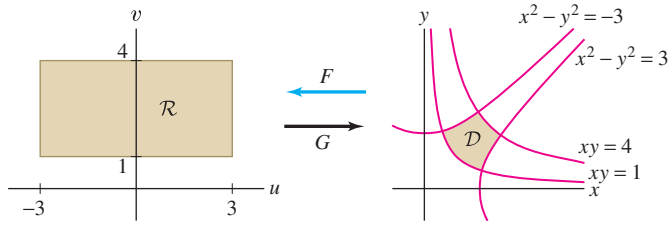


FIGURA 12 La aplicación F va en la dirección "contraria".

Para convertir la integral sobre $\mathcal{D}$ en una integral sobre el rectángulos $\mathcal{R}$, se aplica la fórmula del cambio de variables a la aplicación inversa:

$$G = F^{-1} : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$$

Veremos que no es necesario hallar G explícitamente. Como $u = x^2 - y^2$ y $v = xy$, el jacobiano de F es:

$$\text{Jac}(F) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

Según la ec. (14), se tiene:

$$\text{Jac}(G) = \text{Jac}(F)^{-1} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$

Normalmente, el siguiente paso hubiera sido expresar $f(x, y)$ en términos de u y v. En este caso se puede evitar, observando que el jacobiano se cancela con un factor de $f(x, y)$:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} xy(x^2 + y^2)\, dx\, dy &= \iint_{\mathcal{R}} f(x(u, v), y(u, v))\ |\text{Jac}(G)|\ du\, dv = \\
&= \iint_{\mathcal{R}} xy(x^2 + y^2) \frac{1}{2(x^2 + y^2)}\, du\, dv = \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{R}} xy\, du\, dv = \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{R}} v\, du\, dv = \qquad (\text{pues } v = xy) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-3}^{3} \int_{1}^{4} v\, dv\, du = \frac{1}{2}(6)\left(\frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{2}1^2\right) = \frac{45}{2}
\end{aligned}$$

El cambio de variables en tres variables

La fórmula del cambio de variables tiene la misma forma en tres (o más) variables que en dos variables. Sea:

$$G\colon \mathcal{W}_0 \to \mathcal{W}$$

una aplicación de una región tridimensional $\mathcal{W}_0$ en el espacio (u, v, w) a una región $\mathcal{W}$ en el espacio (x, y, z), esto es:

$$x = x(u, v, w) \qquad y = y(u, v, w) \qquad z = z(u, v, w)$$

RECORDATORIO *Los determinantes 3×3 se definen en la ec. (2) de la sección 13.4.*

El jacobiano $\text{Jac}(G)$ es el determinante 3×3:

$$\text{Jac}(G) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad \boxed{15}$$

La fórmula del cambio de variables af rma que:

$$dx\, dy\, dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw$$

De forma más precisa, si G es C^1 e inyectiva en el interior de $\mathcal{W}_0$ y si f es continua, entonces:

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\mathcal{W}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \\
&\quad = \iiint_{\mathcal{W}_0} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw \qquad \boxed{16}
\end{aligned}$$

En los problemas 42 y 43, se le pide utilizar la fórmula general del cambio de variables para deducir las fórmulas para integración en coordenadas cilíndricas y esféricas que se trataron en la sección 16.4.

16.6 RESUMEN

- Sea $G(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ una aplicación. Se denota $x = x(u,v)$ o $x = x(u,v)$ y, análogamente, $y = y(u,v)$ o $y = y(u,v)$. El jacobiano de G es el determinante:

$$\text{Jac}(G) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- $\text{Jac}(G) = \text{Jac}(F)^{-1}$ donde $F = G^{-1}$.
- La fórmula del cambio de variables: si $G\colon \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}$ es C^1 e inyectiva en el interior de $\mathcal{D}_0$ y si f es continua, entonces:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}_0} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

- La fórmula del cambio de variables se expresa simbólicamente en dos y tres variables como:

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \qquad dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

16.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes aplicaciones es lineal?

(a) (uv, v) **(b)** $(u+v, u)$ **(c)** $(3, e^u)$

2. Suponga que G es una aplicación lineal tal que $G(2,0) = (4,0)$ y $G(0,3) = (-3,9)$. Halle las imágenes de:

(a) $G(1,0)$ **(b)** $G(1,1)$ **(c)** $G(2,1)$

3. ¿Cuál es el área de $G(\mathcal{R})$ si $\mathcal{R}$ es un rectángulo de área 9 y G es una aplicación cuyo jacobiano es constante e igual a 4?

4. Estime el área de $G(\mathcal{R})$, donde $\mathcal{R} = [1,1{,}2] \times [3,3{,}1]$ y G es una aplicación tal que $\text{Jac}(G)(1,3) = 3$.

Problemas

1. Determine la imagen bajo $G(u,v) = (2u, u+v)$ de los siguientes conjuntos:

(a) Los ejes u y v.

(b) El rectángulo $\mathcal{R} = [0,5] \times [0,7]$.

(c) El segmento rectilíneo que une $(1,2)$ y $(5,3)$.

(d) El triángulo de vértices $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

2. Describa [en la forma $y = f(x)$] las imágenes de las rectas $u = c$ y $v = c$ bajo la aplicación $G(u,v) = (u/v, u^2 - v^2)$.

3. Sea $G(u,v) = (u^2, v)$. ¿Es G inyectiva? Si no lo fuera, determine un dominio en que G sea inyectiva. Halle la imagen bajo G de:

(a) Los ejes u y v.

(b) El rectángulo $\mathcal{R} = [-1,1] \times [-1,1]$.

(c) El segmento rectilíneo que une $(0,0)$ y $(1,1)$.

(d) El triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

4. Sea $G(u,v) = (e^u, e^{u+v})$.

(a) ¿Es G inyectiva? ¿Cuál es la imagen de G?

(b) Describa las imágenes de las rectas verticales $u = c$ y de las rectas horizontales $v = c$.

En los problemas 5-12, sea $G(u,v) = (2u+v, 5u+3v)$ una aplicación del plano uv al plano xy.

5. Pruebe que la imagen de la recta horizontal $v = c$ es la recta $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}c$. ¿Cuál es la imagen (en la forma punto-pendiente) de la recta vertical $u = c$?

6. Describa la imagen por G de la recta que pasa por los puntos $(u,v) = (1,1)$ y $(u,v) = (1,-1)$ en la forma punto-pendiente.

7. Describa la imagen de la recta $v = 4u$ por G en la forma punto-pendiente.

8. Pruebe que G aplica la recta $v = mu$ en la recta de pendiente $(5 + 3m)/(2 + m)$ que pasa por el origen en el plano xy.

9. Pruebe que la aplicación inversa de G es:

$$G^{-1}(x, y) = (3x - y, -5x + 2y)$$

Indicación: pruebe que $G(G^{-1}(x, y)) = (x, y)$ y $G^{-1}(G(u, v)) = (u, v)$.

10. Use la inversa del problema 9 para hallar:

(a) Un punto en el plano uv que se aplique en $(2, 1)$.

(b) Un segmento en el plano uv que se aplique en el segmento que une $(-2, 1)$ y $(3, 4)$.

11. Calcule $\text{Jac}(G) = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

12. Calcule $\text{Jac}(G^{-1}) = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

En los problemas 13-18, calcule el jacobiano (en el punto que se indica).

13. $G(u, v) = (3u + 4v, u - 2v)$

14. $G(r, s) = (rs, r + s)$

15. $G(r, t) = (r \operatorname{sen} t, r - \cos t), \quad (r, t) = (1, \pi)$

16. $G(u, v) = (v \ln u, u^2 v^{-1}), \quad (u, v) = (1, 2)$

17. $G(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta), \quad (r, \theta) = (4, \frac{\pi}{6})$

18. $G(u, v) = (ue^v, e^u)$

19. Halle una aplicación lineal G que aplique $[0, 1] \times [0, 1]$ en el paralelogramo en el plano xy generado por los vectores $\langle 2, 3\rangle$ y $\langle 4, 1\rangle$.

20. Halle una aplicación lineal G que aplique $[0, 1] \times [0, 1]$ en el paralelogramo en el plano xy generado por los vectores $\langle -2, 5\rangle$ y $\langle 1, 7\rangle$.

21. Sea $\mathcal{D}$ el paralelogramo de la figura 13. Aplique la fórmula del cambio de variables a la aplicación $G(u, v) = (5u + 3v, u + 4v)$ para evaluar $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$ como una integral sobre $\mathcal{D}_0 = [0, 1] \times [0, 1]$.

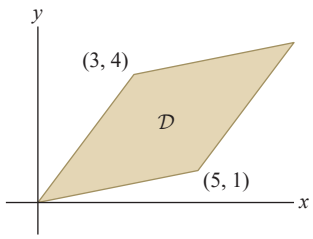


FIGURA 13

22. Sea $G(u, v) = (u - uv, uv)$.

(a) Pruebe que la imagen de la recta horizontal $v = c$ es $y = \dfrac{c}{1 - c}x$ si $c \neq 1$ y el eje y si $c = 1$.

(b) Determine las imágenes de las rectas verticales del plano uv.

(c) Calcule el jacobiano de G.

(d) Observe que, por la fórmula del área de un triángulo, la región $\mathcal{D}$ de la figura 14 tiene área igual a $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Calcule de nuevo esta área pero ahora usando la fórmula del cambio de variables aplicada a G.

(e) Calcule $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy$.

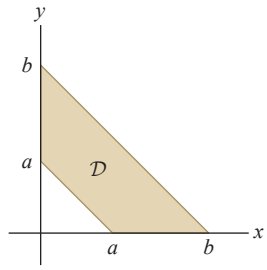


FIGURA 14

23. Sea $G(u, v) = (3u + v, u - 2v)$. Use el jacobiano para determinar el área de $G(\mathcal{R})$ para:

(a) $\mathcal{R} = [0, 3] \times [0, 5]$ **(b)** $\mathcal{R} = [2, 5] \times [1, 7]$

24. Halle una aplicación lineal T que aplique $[0, 1] \times [0, 1]$ en el paralelogramo $\mathcal{P}$ en el plano xy de vértices $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(1, 4)$ y $(3, 6)$. A continuación, calcule la integral doble de e^{2x-y} sobre $\mathcal{P}$ vía cambio de variables.

25. Con G como en el ejemplo 3, use la fórmula del cambio de variables para calcular el área de la imagen de $[1, 4] \times [1, 4]$.

En los problemas 26-28, sea $\mathcal{R}_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ el cuadrado unitario. La trasladada de una aplicación $G_0(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v))$ es una aplicación:

$$G(u, v) = (a + \phi(u, v), b + \psi(u, v))$$

donde a y b son constantes. Observe que la aplicación G_0 en la figura 15 aplica $\mathcal{R}_0$ sobre el paralelogramo $\mathcal{P}_0$ y que la trasladada

$$G_1(u, v) = (2 + 4u + 2v, 1 + u + 3v)$$

aplica $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{P}_1$.

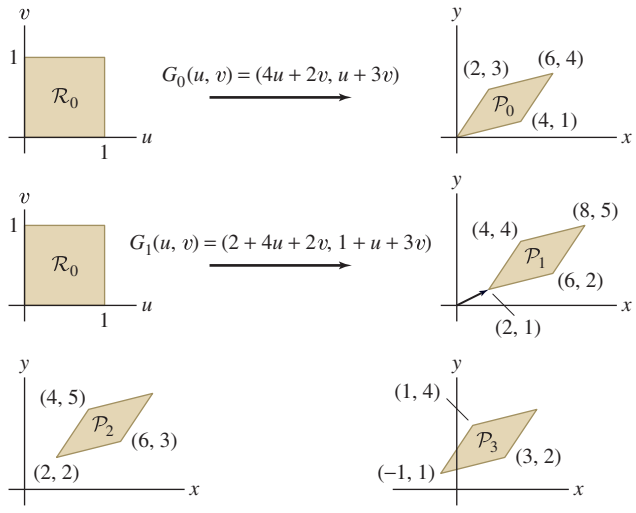


FIGURA 15

26. Halle trasladadas G_2 y G_3 de la aplicación G_0 de la figura 15 que apliquen el cuadrado unitario $\mathcal{R}_0$ en los paralelogramos $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$.

27. Dibuje el paralelogramo $\mathcal{P}$ de vértices $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,6)$ y $(4,9)$, y halle la trasladada de una aplicación lineal que aplique $\mathcal{R}_0$ en $\mathcal{P}$.

28. Halle la trasladada de una aplicación lineal que aplique $\mathcal{R}_0$ en el paralelogramo generado por los vectores $\langle 3,9\rangle$ y $\langle -4,6\rangle$ con base en $(4,2)$.

29. Sea $\mathcal{D} = G(\mathcal{R})$, donde $G(u,v) = (u^2, u+v)$ y $\mathcal{R} = [1,2]\times[0,6]$. Calcule $\iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy$. *Nota:* no es necesario describir $\mathcal{D}$.

30. Sea $\mathcal{D}$ la imagen de $\mathcal{R} = [1,4]\times[1,4]$ bajo la aplicación $G(u,v) = = (u^2/v, v^2/u)$.

(a) Calcule Jac(G).

(b) Dibuje $\mathcal{D}$.

(c) Use la fórmula del cambio de variables para calcular Área$(\mathcal{D})$ y $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$, donde $f(x,y) = x+y$.

31. Calcule $\iint_{\mathcal{D}} (x+3y)\,dx\,dy$, donde $\mathcal{D}$ es la región sombreada de la figura 16. *Indicación:* use la aplicación $G(u,v) = (u-2v, v)$.

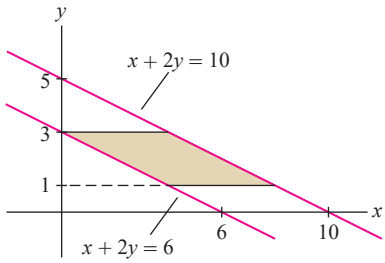


FIGURA 16

32. Use la aplicación $G(u,v) = \left(\dfrac{u}{v+1}, \dfrac{uv}{v+1}\right)$ para calcular:

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{D}$ es la región sombreada de la figura 17.

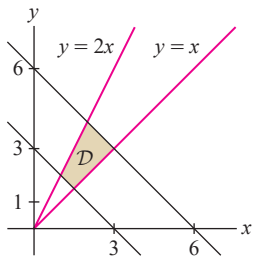


FIGURA 17

33. Pruebe que $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ aplica el triángulo $\mathcal{D}_0 = \{(u,v) : 0 \le v \le u \le 1\}$ en el dominio $\mathcal{D}$ limitado por $x = 0$, $y = 0$ e $y^2 = 4 - 4x$. Use T para evaluar:

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

34. Halle una aplicación G que aplique el disco $u^2 + v^2 \le 1$ sobre el interior de la elipse $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \le 1$. A continuación, use la fórmula del cambio de variables para demostrar que el área de la elipse es πab.

35. Calcule $\iint_{\mathcal{D}} e^{9x^2+4y^2}\,dx\,dy$, donde $\mathcal{D}$ es el interior de la elipse $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 \le 1$.

36. Calcule el área de la región limitada por la elipse $x^2 + 2xy + 2y^2 - -4y = 8$ como una integral en las variables $u = x+y$, $v = y-2$.

37. Dibuje el dominio $\mathcal{D}$ limitado por $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = x$. Use un cambio de variables con la aplicación $x = uv$, $y = u^2$ para calcular:

$$\iint_{\mathcal{D}} y^{-1}\,dx\,dy$$

Se trata de una integral impropia pues $f(x,y) = y^{-1}$ no está definida en $(0,0)$, pero resulta propia después del cambio de variables.

38. Halle un cambio de variables apropiado para evaluar:

$$\iint_{\mathcal{R}} (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dx\,dy$$

donde $\mathcal{R}$ es el cuadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$.

39. Sea G la inversa de la aplicación $F(x,y) = (xy, x^2y)$ del plano xy en el plano uv. Sea $\mathcal{D}$ el dominio de la figura 18. Muestre, aplicando la fórmula del cambio de variables a la inversa $G = F^{-1}$, que:

$$\iint_{\mathcal{D}} e^{xy}\,dx\,dy = \int_{10}^{20}\int_{20}^{40} e^u v^{-1}\,dv\,du$$

y evalúe este resultado. *Indicación:* vea el ejemplo 8.

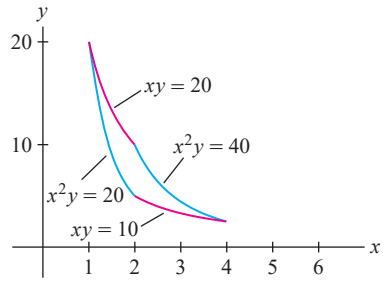


FIGURA 18

40. Dibuje el dominio:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : 1 \le x+y \le 4,\ -4 \le y-2x \le 1\}$$

(a) Sea F la aplicación $u = x+y$, $v = y-2x$ del plano xy al plano uv y sea G su inversa. Use la ec. (14) para calcular Jac(G).

(b) Calcule $\iint_{\mathcal{D}} e^{x+y}\,dx\,dy$ usando la fórmula del cambio de variables con la aplicación G. *Indicación:* no es necesario hallar G explícitamente.

41. Sea $I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, donde:

$$\mathcal{D} = \{(x,y) : 2 \le xy \le 4, 0 \le x - y \le 3, x \ge 0, y \ge 0\}$$

(a) Pruebe que la aplicación $u = xy$, $v = x - y$ aplica $\mathcal{D}$ en el rectángulo $\mathcal{R} = [2,4] \times [0,3]$.

(b) Calcule $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ calculando primero $\partial(u,v)/\partial(x,y)$.

(c) Use la fórmula del cambio de variables para probar que I es igual a la integral de $f(u,v) = v$ sobre $\mathcal{R}$ y evalúe.

42. Deduzca la fórmula (5) de la sección 16.4 para la integración en coordenadas cilíndricas a partir de la fórmula general del cambio de variables.

43. Deduzca la fórmula (9) de la sección 16.4 para la integración en coordenadas esféricas a partir de la fórmula general del cambio de variables.

44. Use la fórmula del cambio de variables en tres variables para demostrar que el volumen del elipsoide $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ es igual al producto de abc por el volumen de la esfera unitaria.

Problemas avanzados

45. Use la aplicación:

$$x = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos v} \qquad y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos u}$$

para evaluar la integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1 - x^2y^2}$$

Se trata de una integral impropia al ser infinito el integrando si $x = \pm 1, y = \pm 1$, pero aplicando la fórmula del cambio de variables se demuestra que el resultado es finito.

46. Compruebe las propiedades (1) y (2) para las funciones lineales y demuestre que cualquier aplicación que verifique estas dos propiedades es lineal.

47. Sean P y Q puntos de $\mathbb{R}^2$. Pruebe que una aplicación lineal $G(u,v) = (Au + Cv, Bu + Dv)$ aplica el segmento que une P y Q en el segmento que une $G(P)$ y $G(Q)$. *Indicación:* la parametrización del segmento que une P y Q es:

$$(1 - t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 1$$

48. Sea G una aplicación lineal. Demuestre la ec. (6) según se indica a continuación.

(a) Para cualquier conjunto $\mathcal{D}$ en el plano uv y cualquier vector $\mathbf{u}$, sea $\mathcal{D} + \mathbf{u}$ el conjunto que se obtiene trasladando todos los puntos de $\mathcal{D}$ por $\mathbf{u}$. Por linealidad, G aplica $\mathcal{D} + \mathbf{u}$ en la trasladada $G(\mathcal{D}) + G(\mathbf{u})$ [figura 19(C)]. Por tanto, si la ec. (6) es cierta para $\mathcal{D}$, también es cierta para $\mathcal{D} + \mathbf{u}$.

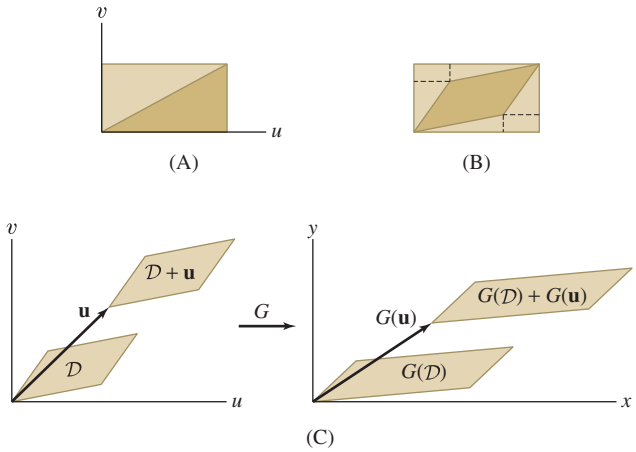


FIGURA 19

(b) En el libro se verificó la ec. (6) para el cuadrado unidad. Use linealidad para demostrar que la ec. (6) también es cierta para todos los rectángulos de vértice en el origen y lados paralelos a los ejes. A continuación, razone que también se cumple para cada mitad triangular de tales rectángulos, como en la figura 19(A).

(c) La figura 19(B) muestra que el área de un paralelogramo es una diferencia de las áreas de los rectángulos y los triángulos que se examinaron en las etapas (a) y (b). Use esto para demostrar la ec. (6) para paralelogramos arbitrarios.

49. El producto de las matrices 2×2 A y B es la matriz AB definida como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}}_{AB}$$

La entrada (i,j) de A es el **producto escalar** de la fila i de A y de la columna j de B. Demuestre que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

50. Sean $G_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ y $G_2 : \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_3$ aplicaciones C^1 y sea $G_2 \circ G_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_3$ la aplicación compuesta. Use la regla de la cadena multivariante y el problema 49 para demostrar que:

$$\operatorname{Jac}(G_2 \circ G_1) = \operatorname{Jac}(G_2)\operatorname{Jac}(G_1)$$

51. Use el problema 50 para demostrar que:

$$\operatorname{Jac}(G^{-1}) = \operatorname{Jac}(G)^{-1}$$

Indicación: compruebe que $\operatorname{Jac}(I) = 1$, donde I es la aplicación identidad $I(u,v) = (u,v)$.

52. Sea $(\overline{x}, \overline{y})$ el centroide de un dominio $\mathcal{D}$. Dado $\lambda > 0$, sea $\lambda\mathcal{D}$ la **dilatación** de $\mathcal{D}$, definida como:

$$\lambda\mathcal{D} = \{(\lambda x, \lambda y) : (x,y) \in \mathcal{D}\}$$

Use la fórmula del cambio de variables para demostrar que el centroide de $\lambda\mathcal{D}$ es $(\lambda\overline{x}, \lambda\overline{y})$.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Calcule la suma de Riemann $S_{2,3}$ para $\int_1^4 \int_2^6 x^2 y\,dx\,dy$ usando dos elecciones de puntos intermedios:

(a) Vértice inferior izquierdo.

(b) Punto medio del rectángulo.

A continuación, calcule el valor exacto de la integral doble.

2. Sea $S_{N,N}$ la suma de Riemann para $\int_0^1 \int_0^1 \cos(xy)\,dx\,dy$ usando puntos medios como puntos intermedios.

(a) Calcule $S_{4,4}$.

(b) SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para calcular $S_{N,N}$ para $N = 10, 50, 100$.

3. Sea $\mathcal{D}$ el dominio sombreado de la f gura 1.

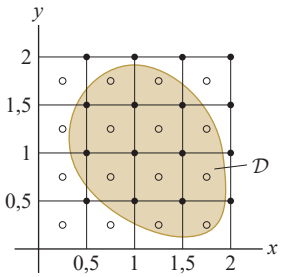


FIGURA 1

Estime $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dA$ mediante la suma de Riemann cuyos puntos intermedios sean los puntos medios de los cuadrados en la cuadrícula.

4. Explique las siguientes igualdades:

(a) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \operatorname{sen}(xy)\,dx\,dy = 0$

(b) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos(xy)\,dx\,dy > 0$

En los problemas 5-8, evalúe la integral iterada.

5. $\int_0^2 \int_3^5 y(x-y)\,dx\,dy$

6. $\int_{1/2}^0 \int_0^{\pi/6} e^{2y} \operatorname{sen} 3x\,dx\,dy$

7. $\int_0^{\pi/3} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy$

8. $\int_1^2 \int_1^2 \dfrac{y\,dx\,dy}{x+y^2}$

En los problemas 9-14, dibuje el dominio $\mathcal{D}$ y calcule $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dA$.

9. $\mathcal{D} = \{0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x\}, \quad f(x,y) = \cos y$

10. $\mathcal{D} = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x - x^2\}, \quad f(x,y) = \sqrt{x}y$

11. $\mathcal{D} = \{0 \le x \le 1,\ 1 - x \le y \le 2 - x\}, \quad f(x,y) = e^{x+2y}$

12. $\mathcal{D} = \{1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1/x\}, \quad f(x,y) = \cos(xy)$

13. $\mathcal{D} = \{0 \le y \le 1,\ 0{,}5y^2 \le x \le y^2\}, \quad f(x,y) = ye^{1+x}$

14. $\mathcal{D} = \{1 \le y \le e,\ y \le x \le 2y\}, \quad f(x,y) = \ln(x+y)$

15. Exprese $\int_{-3}^3 \int_0^{9-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$ como una integral iterada en el orden $dx\,dy$.

16. Sea $\mathcal{W}$ la región limitada por los planos $y = z$, $2y + z = 3$ y $z = 0$ para $0 \le x \le 4$.

(a) Exprese la integral triple $\iiint_{\mathcal{W}} f(x,y,z)\,dV$ como una integral iterada en el orden $dy\,dx\,dz$ (proyecte $\mathcal{W}$ sobre el plano xz).

(b) Evalúe la integral triple $f(x,y,z) = 1$.

(c) Calcule el volumen $\mathcal{W}$ aplicando geometría y compruebe que su resultado coincide con la respuesta a (b).

17. Sea $\mathcal{D}$ el dominio que se encuentra limitado por $y = x$ e $y = \sqrt{x}$. Calcule $\iint_{\mathcal{D}} xy\,dA$ como una integral iterada en el orden $dx\,dy$ y $dy\,dx$.

18. Halle la integral doble de $f(x,y) = x^3y$ sobre la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x(1-x)$.

19. Cambie el orden de integración y evalúe $\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} \dfrac{x\,dx\,dy}{(x^2+y)^{1/2}}$.

20. Compruebe directamente que:

$$\int_2^3 \int_0^2 \frac{dy\,dx}{1+x-y} = \int_0^2 \int_2^3 \frac{dx\,dy}{1+x-y}$$

21. Demuestre la fórmula:

$$\int_0^1 \int_0^y f(x)\,dx\,dy = \int_0^1 (1-x)f(x)\,dx$$

A continuación, use ésta fórmula para calcular $\int_0^1 \int_0^y \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-x}\,dx\,dy$.

22. Reescriba $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \dfrac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ intercambiando el orden de integración y evalúe.

23. Use coordenadas cilíndricas para calcular el volumen de la región def nida por $4 - x^2 - y^2 \le z \le 10 - 4x^2 - 4y^2$.

24. Evalúe $\iint_{\mathcal{D}} x\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es el dominio sombreado de la figura 2.

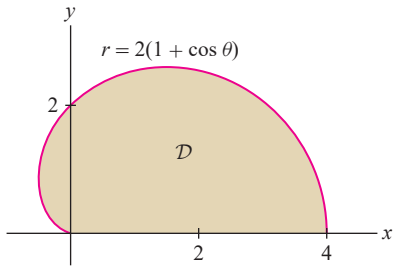


FIGURA 2

25. Halle el volumen de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ y el plano xy.

26. Evalúe $\int_0^3 \int_1^4 \int_2^4 (x^3 + y^2 + z)\,dx\,dy\,dz$.

27. Calcule $\iiint_{\mathcal{B}} (xy + z)\,dV$, donde:

$$\mathcal{B} = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 3\}$$

como una integral iterada de dos maneras distintas.

28. Calcule $\iiint_{\mathcal{W}} xyz\,dV$, donde:

$$\mathcal{W} = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1,\ x \le z \le x + y\}$$

29. Evalúe $I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{1} (x + y + z)\,dz\,dy\,dx$.

30. Describa una región cuyo volumen sea igual a:

(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_4^9 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(b) $\int_{-2}^{1} \int_{\pi/3}^{\pi/4} \int_0^2 r\,dr\,d\theta\,dz$

(c) $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-r^2}}^{0} r\,dz\,dr\,d\theta$

31. Halle el volumen del sólido contenido en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por debajo de la curva $z = (x + y)^2$ y por encima de la curva $z = -(x - y)^2$.

32. Use coordenadas polares para evaluar $\iint_{\mathcal{D}} x\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es la región sombreada comprendida entre las dos circunferencias de radio 1 de la figura 3.

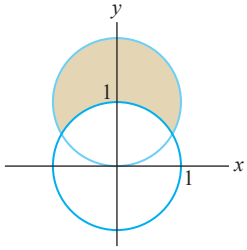


FIGURA 3

33. Use coordenadas polares para calcular $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dA$, donde $\mathcal{D}$ es la región en el primer cuadrante limitada por la espiral $r = \theta$, la circunferencia $r = 1$ y el eje x.

34. Calcule $\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dA$, donde:

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{\pi}{2} \le x^2 + y^2 \le \pi\right\}$$

35. Exprese en coordenadas cilíndricas y evalúe:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\,dy\,dx$$

36. Use coordenadas esféricas para calcular la integral triple de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la región:

$$1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$$

37. Convierta a coordenadas esféricas y evalúe:

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dz\,dy\,dx$$

38. Halle el valor medio de $f(x,y,z) = xy^2z^3$ sobre la caja $[0,1]\times$ $\times[0,2]\times[0,3]$.

39. Sea $\mathcal{W}$ la bola de radio R en $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen y sea $P = (0,0,R)$ el Polo Norte. Sea $d_P(x,y,z)$ la distancia de P a (x,y,z). Pruebe que el valor medio de d_P sobre la esfera $\mathcal{W}$ es igual a $\overline{d} = 6R/5$. *Indicación:* pruebe que:

$$\overline{d} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{R} \int_{\phi=0}^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R\cos\phi}\,d\phi\,d\rho\,d\theta$$

y evalúe.

40. SAC Exprese el valor medio de $f(x,y) = e^{xy}$ sobre la elipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ como una integral iterada y evalúe numéricamente utilizando un programa informático de cálculo simbólico.

41. Use coordenadas cilíndricas para hallar la masa del sólido limitado por $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$, suponiendo una densidad de masa de $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

42. Sea $\mathcal{W}$ la porción de la mitad del cilindro $x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0$ tal que $0 \le z \le 3y$. Use coordenadas cilíndricas para calcular la masa de $\mathcal{W}$ si la densidad de masa es $\rho(x,y,z) = z^2$.

43. Use coordenadas cilíndricas para hallar la masa de un cilindro de radio 4 y altura 10 si la densidad de masa en un punto es igual al cuadrado de la distancia al eje central del cilindro.

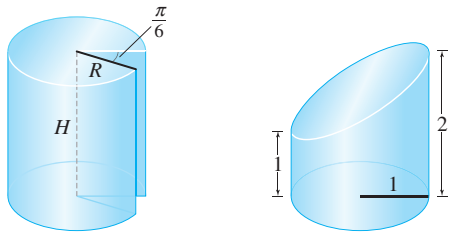
44. Halle el centroide de la región $\mathcal{W}$ limitada, en coordenadas esféricas, por $\phi = \phi_0$ y la esfera $\rho = R$.

45. Halle el centroide del sólido limitado por el plano xy, el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y el plano $x/R + z/H = 1$.

46. Usando coordenadas cilíndricas, demuestre que el centroide de un cono circular de altura h y radio R se encuentra a altura $\frac{h}{4}$ sobre el eje central.

47. Halle el centroide del sólido (A) de la figura 4 definida por $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$ y $\frac{\pi}{6} \le \theta \le 2\pi$, donde θ es el ángulo polar de (x, y).

48. Calcule la coordenada y_{CM} del centroide del sólido (B) en la figura 4 definido por $x^2 + y^2 \le 1$ y $0 \le z \le \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$.



(A) (B)

FIGURA 4

49. Halle el centro de masas del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ para $0 \le z \le 1$, suponiendo una densidad de masa de $\rho(x, y, z) = z$.

50. Halle el centro de masas del sector de ángulo central $2\theta_0$ (simétrico respecto al eje y) de la figura 5, suponiendo que la densidad de masa es $\rho(x, y) = x^2$.

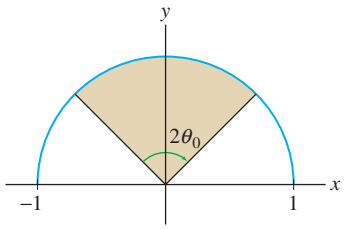


FIGURA 5

51. Halle el centro de masas del primer octante de la bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, suponiendo una densidad de masa de $\rho(x, y, z) = x$.

52. Halle una constante C tal que:

$$p(x,y) = \begin{cases} C(4x - y + 3) & \text{si } 0 \le x \le 2 \text{ y } 0 \le y \le 3 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

sea una función de densidad de probabilidad y calcule $P(X \le 1; Y \le 2)$.

53. Calcule $P(3X + 2Y \ge 6)$ para la densidad de probabilidad del problema 52.

54. Los tiempos de vida X e Y (en años) de las componentes de dos máquinas tienen densidad de probabilidad conjunta:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{125}(5 - x - y) & \text{si } 0 \le x \le 5 - y \text{ y } 0 \le y \le 5 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad que ambas componentes continúen funcionando después de 2 años?

55. Una compañía de seguros ofrece dos tipos de pólizas A y B. Sea X el tiempo hasta que se presenta la siguiente reclamación del tipo A y sea Y el tiempo (en días) hasta que se presenta la siguiente reclamación del tipo B. Estas variables aleatorias tienen densidad de probabilidad conjunta:

$$p(x, y) = 12e^{-4x-3y}$$

Halle la probabilidad de que $X \le Y$.

56. Calcule el jacobiano de la aplicación:

$$G(r, s) = (e^r \cosh(s), e^r \operatorname{senh}(s))$$

57. Halle una aplicación lineal $G(u, v)$ que aplique el cuadrado unitario en el paralelogramo en el plano xy generado por los vectores $\langle 3, -1\rangle$ y $\langle 1, 4\rangle$. A continuación, use el jacobiano para hallar el área del rectángulo $\mathcal{R} = [0, 4] \times [0, 3]$ bajo G.

58. Use la aplicación:

$$G(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right)$$

para calcular $\iint_{\mathcal{R}} ((x - y)\operatorname{sen}(x + y))^2 \, dx\, dy$, donde $\mathcal{R}$ es el cuadrado de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.

59. Sea $\mathcal{D}$ la región sombreada de la figura 6 y sea F la aplicación:

$$u = y + x^2 \qquad v = y - x^3$$

(a) Pruebe que F aplica $\mathcal{D}$ en un rectángulo $\mathcal{R}$ en el plano uv.

(b) Aplique la ec. (7) de la sección 16.6 con $P = (1, 7)$ para estimar Área$(\mathcal{D})$.

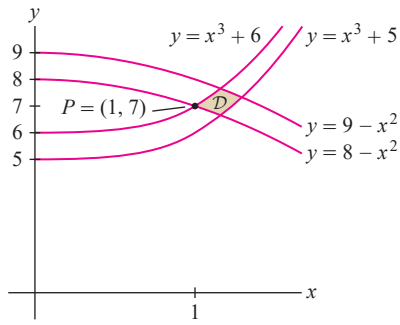


FIGURA 6

60. Calcule la integral de $f(x, y) = e^{3x-2y}$ sobre el paralelogramo de la figura 7.

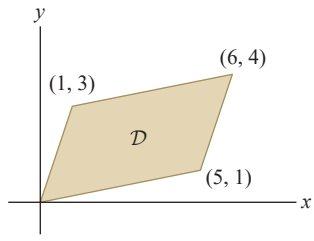


FIGURA 7

61. Dibuje la región $\mathcal{D}$ limitada por las curvas $y = 2/x$, $y = 1/(2x)$, $y = 2x$, $y = x/2$ en el primer cuadrante. Sea F la aplicación $u = xy$, $v = y/x$ del plano xy al plano uv.

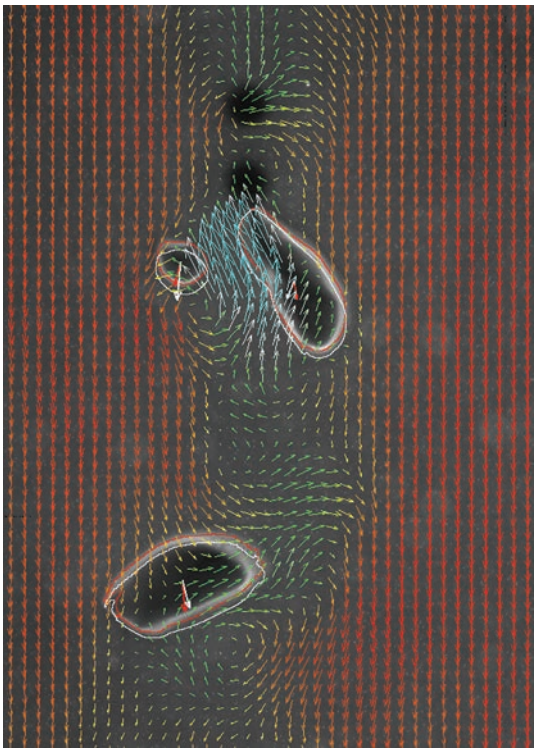
(a) Halle la imagen de $\mathcal{D}$ bajo F.

(b) Sea $G = F^{-1}$. Pruebe que $|\text{Jac}(G)| = \dfrac{1}{2|v|}$.

(c) Aplique la fórmula del cambio de variables para demostrar la fórmula:

$$\iint_{\mathcal{D}} f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy = \frac{3}{4} \int_{1/2}^{2} \frac{f(v)\, dv}{v}$$

(d) Aplique (c) para evaluar $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \frac{ye^{y/x}}{x}\, dx\, dy$.



Este campo vectorial velocidad, de un estudio de turbulencia de f uidos, se obtuvo usando PIV (vecilometría por imagen de partículas) en que se captura el movimiento del marcador de las partículas con una cámara digital de alta velocidad.

17 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

En el capítulo previo se generalizó la integración de una a varias variables. En este capítulo se generalizará aún más para incluir la integración sobre curvas y se integrará no solo funciones sino también campos vectoriales. Las integrales de campos vectoriales se utilizan en el estudio de fenómenos tales como el electromagnetismo, la dinámica de f uidos y la transferencia del calor. Para sentar las bases, el capítulo comienza con un estudio de los campos vectoriales.

17.1 Campos vectoriales

¿Cómo se puede describir un objeto físico como el viento, formado por un gran número de moléculas que se mueven en una región del espacio? Lo que se necesita es un objeto matemático denominado **campo vectorial**. Un campo vectorial **F** asigna a cada punto P un vector $\mathbf{F}(P)$ que representa la velocidad (celeridad y dirección) del viento en ese punto (f gura 1). En la f gura 2 se muestra otro campo vectorial. Sin embargo, los campos vectoriales describen muchas otras clases de cantidades, como las fuerzas y los campos eléctricos y magnéticos.

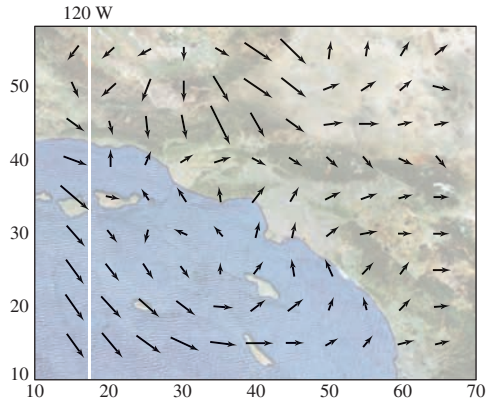


FIGURA 1 Campo vectorial velocidad para la velocidad del viento en la costa en Los Ángeles.

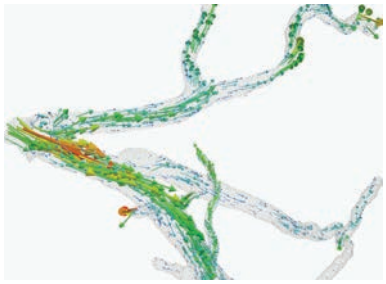


FIGURA 2 El f ujo de sangre en una arteria se puede representar mediante un campo vectorial.

Matemáticamente, un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ se representa mediante un vector cuyas componentes son funciones :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z) \rangle$$

A cada punto $P = (a, b, c)$ se le asocia el vector $\mathbf{F}(a, b, c)$, que se denota también como $\mathbf{F}(P)$. Alternativamente:

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

Cuando se dibuja un campo vectorial, se representa $\mathbf{F}(P)$ como un vector basado en P (y no en el origen). El **dominio** de **F** es el conjunto de puntos P para los que $\mathbf{F}(P)$ está def - nido. Los campos vectoriales en el plano se expresan de forma similar:

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle F_1(x, y), F_2(x, y) \rangle = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$$

A lo largo de este capítulo, se supondrá que las funciones componentes F_j son suaves, es decir, que tienen derivadas parciales de cualquier orden sobre sus dominios.

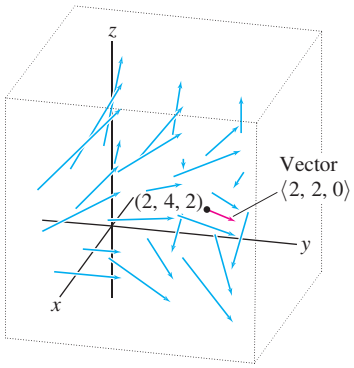


FIGURA 3

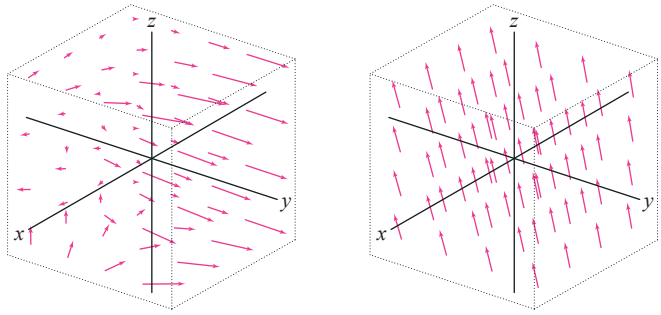
EJEMPLO 1 ¿Qué vector está unido al punto $P = (2, 4, 2)$ por medio del campo vectorial $\mathbf{F} = \langle y - z, x, z - \sqrt{y} \rangle$?

Solución El vector unido a P es:

$$\mathbf{F}(2, 4, 2) = \langle 4 - 2, 2, 2 - \sqrt{4} \rangle = \langle 2, 2, 0 \rangle$$

Se trata del vector en rojo de la f gura 3. ■

Aunque no resulta práctico dibujar campos vectoriales complicados en tres dimensiones a mano, los programas informáticos de cálculo simbólico permiten obtener representaciones visuales muy útiles (f gura 4). El campo vectorial de la f gura 4(B) es un ejemplo de un **campo vectorial constante**. Asigna el mismo vector $\langle 1, -1, 3 \rangle$ a cada punto de $\mathbb{R}^3$.



(A) $\mathbf{F} = \langle x \operatorname{sen} z, y^2, x/(z^2 + 1) \rangle$ (B) Campo vectorial constante $\mathbf{F} = \langle 1, -1, 3 \rangle$

FIGURA 4

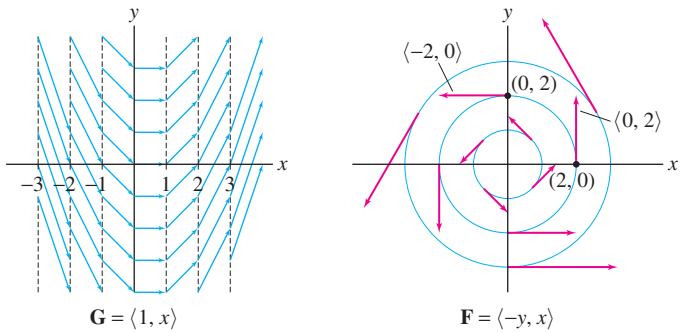
En el siguiente ejemplo se van a analizar dos campos vectoriales en el plano "cualitativamente".

EJEMPLO 2 Describa los siguientes campos vectoriales:

(a) $\mathbf{G} = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$ **(b)** $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$

Solución (a) El campo vectorial $\mathbf{G} = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$ asigna el vector $\langle 1, a \rangle$ al punto (a, b). En particular, asigna el mismo vector a todos los puntos con la misma coordenada x [f gura 5(A)]. Observe que $\langle 1, a \rangle$ tiene pendiente a y longitud $\sqrt{1 + a^2}$. Se puede describir $\mathbf{G}$ de la siguiente manera: $\mathbf{G}$ asigna el vector de pendiente a y longitud $\sqrt{1 + a^2}$ a todos los puntos con $x = a$.

(b) Para visualizar $\mathbf{F}$, observe que $\mathbf{F}(a, b) = \langle -b, a \rangle$ tiene longitud $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es perpendicular al vector radial $\langle a, b \rangle$ y apunta en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Por tanto, $\mathbf{F}$ admite la siguiente descripción: los vectores sobre la circunferencia de radio r tienen todos la misma longitud r son tangentes a la circunferencia y apuntan en el sentido contrario al de las agujas de reloj [f gura 5(B)]. ■



$\mathbf{G} = \langle 1, x \rangle$ $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$

(A) (B)

FIGURA 5

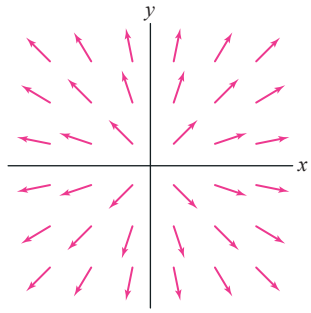
El físico inglés y premio Nobel Paul Dirac (1902-1984) introdujo una generalización de los campos vectoriales llamados "campos espinoriles" para unif car la teoría de la relatividad con la mecánica cuántica. Esto llevó al descubrimiento del positrón, una partícula elemental que se utiliza hoy en día en la tomografía por emisión de positrones (PET).

Un **campo vectorial unitario** es un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que $\|\mathbf{F}(P)\| = 1$ para todo punto P. Un campo vectorial $\mathbf{F}$ se denomina **campo vectorial radial** si $\mathbf{F}(P)$ depende únicamente de la distancia r de P al origen. Aquí se utiliza la notación $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ para $n = 2$ y $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ con $n = 3$. Dos ejemplos importantes son los campos vectoriales radiales unitarios en dos y tres dimensiones (f gura 6):

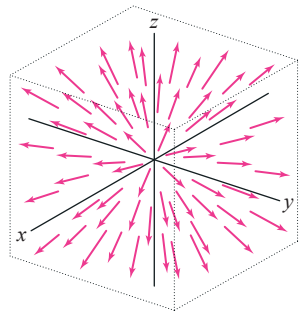
$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle \quad \boxed{1}$$

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\rangle \quad \boxed{2}$$

Observe que $\mathbf{e}_r(P)$ es un vector unitario que apunta hacia afuera del origen en P. Sin embargo, observe que $\mathbf{e}_r$ no está def nido en el origen, donde $r = 0$.



(A) Campo vectorial radial unitario en el plano $\mathbf{e}_r = \langle x/r, y/r \rangle$.



(B) Campo vectorial radial unitario en el espacio tridimensional $\mathbf{e}_r = \langle x/r, y/r, z/r \rangle$.

FIGURA 6

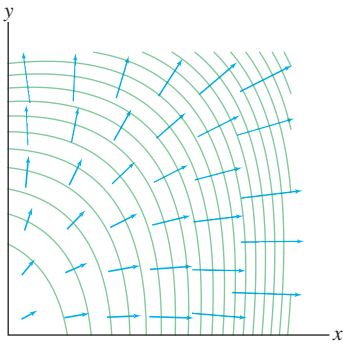


FIGURA 7 Un campo vectorial conservativo es ortogonal a las curvas de nivel de la función potencial.

Campos vectoriales conservativos

En el capítulo 16 ya se ha considerado un campo vectorial, concretamente con el gradiente de una función diferenciable $V(x, y, z)$:

$$\mathbf{F} = \nabla V = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right\rangle$$

Un campo vectorial de este tipo se denomina **campo vectorial conservativo** y la función V se denomina una **función potencial** (o función potencial escalar) para $\mathbf{F}$.

Los mismos términos se utilizan en dos variables y, en general, en n variables. Recuerde que los vectores gradiente son ortogonales a las curvas de nivel y, por tanto, en un campo conservativo, el vector en cada punto P es ortogonal a las curvas de nivel que pasan por P (f gura 7).

- *El término "conservativo" proviene de la física y de la ley de la conservación de la energía (vea la sección 17.3).*
- *Se puede utilizar cualquier letra para denotar la función potencial. Se utiliza V, que sugiere "voltio," la unidad de potencial eléctrico. Algunos libros de texto utilizan $\phi(x, y, z)$ o $U(x, y, z)$ o simplemente $f(x, y, z)$.*
- *El teorema 1 es cierto para un campo vectorial en el plano $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2 \rangle$. Si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$.*

EJEMPLO 3 Compruebe que $V(x, y, z) = xy + yz^2$ es una función potencial para el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle y, x + z^2, 2yz \rangle$.

Solución Calculando el gradiente de V:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = y \quad \frac{\partial V}{\partial y} = x + z^2 \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2yz$$

se obtiene que $\nabla V = \langle y, x + z^2, 2yz \rangle = \mathbf{F}$, como se quería demostrar. ■

Los campos vectoriales conservativos cumplen una propiedad destacada: verif can la condición de las parciales cruzadas.

TEOREMA 1 Propiedad de las parciales cruzadas de un campo vectorial conservativo Si el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ es conservativo, entonces:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

Demostración Si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces:

$$F_1 = \frac{\partial V}{\partial x} \quad F_2 = \frac{\partial V}{\partial y} \quad F_3 = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Ahora compare las derivadas parciales "cruzadas":

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

Según el teorema de Clairaut (sección 15.3), se tiene que $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$ y, por tanto:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Análogamente, $\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial F_3}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial z}$. ■

El teorema 1 pone de manif esto que la mayoría de los campos vectoriales son *no* conservativos. De hecho, una tripleta arbitraria de funciones $\langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ no cumple la condición de las parciales cruzadas. He aquí un ejemplo.

■ **EJEMPLO 4** Pruebe que $\mathbf{F} = \langle y, 0, 0 \rangle$ no es conservativo.

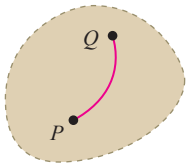
Solución Se tiene:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} y = 1 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} 0 = 0$$

Por tanto $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$. Según el teorema 1, $\mathbf{F}$ no es conservativo, aunque las otras parciales cruzadas coinciden:

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0$$

■



Dominio conexo

FIGURA 8 En un dominio abierto arcoconexo $\mathcal{D}$, dos puntos cualesquiera de $\mathcal{D}$ se pueden unir mediante un camino que esté enteramente contenido en $\mathcal{D}$.

Las funciones potenciales, como las primitivas en una variable, son únicas salvo por una constante aditiva. Para enunciar este resultado de forma precisa, se debe asumir que el dominio $\mathcal{D}$ del campo vectorial es abierto y arcoconexo (f gura 8). "Arcoconexo" signif ca que dos puntos cualesquiera se pueden unir mediante un camino que esté enteramente dentro el dominio.

TEOREMA 2 Unicidad de las funciones potenciales Si $\mathbf{F}$ es conservativo sobre un dominio abierto y arcoconexo, entonces cualesquiera dos funciones potenciales de $\mathbf{F}$ dif eren en una constante.

Demostración Si tanto V_1 como V_2 son funciones potenciales de $\mathbf{F}$, entonces:

$$\nabla(V_1 - V_2) = \nabla V_1 - \nabla V_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Sin embargo, una función cuyo gradiente es cero sobre un dominio abierto y arcoconexo es una función constante (esto generaliza el resultado de cálculo en una variable por el que una función sobre un intervalo cuya derivada sea cero es una función constante; vea el problema 36). Así $V_1 - V_2 = C$ para alguna constante C y, en consecuencia, $V_1 = V_2 + C$. ■

Los dos ejemplos siguientes tratan sobre dos campos vectoriales radiales importantes.

El resultado del ejemplo 5 es válido en $\mathbb{R}^2$: la función

$$V(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

es una función potencial para $\mathbf{e}_r$.

EJEMPLO 5 Campos vectoriales radiales unitarios Pruebe que:

$$V(x,y,z) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

es una función potencial para $\mathbf{e}_r$. Es decir, $\mathbf{e}_r = \nabla r$.

Solución Se tiene:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

Análogamente, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$ y $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$. Por tanto, $\nabla r = \left\langle \dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, \dfrac{z}{r} \right\rangle = \mathbf{e}_r$. ■

RECORDATORIO

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\rangle$$

donde:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

En $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right\rangle$$

donde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

La fuerza gravitacional ejercida por una masa puntual m queda descrita por medio de un campo de fuerzas cuadrático inverso (f gura 9). Una masa puntual situada en el origen ejerce una fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ sobre una masa unitaria situada en (x, y, z) igual a:

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm}{r^2}\mathbf{e}_r = -Gm\left\langle \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right\rangle$$

donde G es la constante de gravitación universal. El signo menos indica que la fuerza es atractiva (apunta hacia el origen). El campo electrostático de fuerzas debido a una partícula cargada también es un campo vectorial cuadrático inverso. El siguiente ejemplo muestra que estos dos campos vectoriales son conservativos.

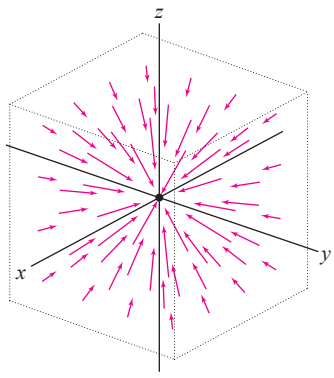


FIGURA 9 El campo vectorial $-\dfrac{Gm\mathbf{e}_r}{r^2}$ representa la fuerza de atracción gravitacional debida a una masa puntual situada en el origen.

EJEMPLO 6 Campo vectorial cuadrático inverso Pruebe que:

$$\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \nabla\left(\frac{-1}{r}\right)$$

Solución Use la regla de la cadena para gradientes (teorema 1 en la sección 15.5) y el ejemplo 5:

$$\nabla(-r^{-1}) = r^{-2}\nabla r = r^{-2}\mathbf{e}_r$$ ■

17.1 RESUMEN

- Un *campo vectorial* asigna un vector a cada punto en un dominio. Un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ queda representando mediante una tripleta de funciones:

$$\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$$

Un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ queda representado mediante un par de funciones $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2 \rangle$. Siempre se va a asumir que F_j son funciones suaves sobre sus dominios.

- Si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces V se denomina una *función potencial* para $\mathbf{F}$.
- $\mathbf{F}$ es *conservativo* si tiene una función potencial.
- Dos funciones potenciales para un campo conservativo dif eren en una constante (sobre un dominio abierto y arcoconexo).
- Un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ cumple la condición de las parciales cruzadas:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

- Se def ne:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{en } \mathbb{R}^2) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{en } \mathbb{R}^3)$$

- El campo vectorial radial unitario y el campo vectorial cuadrático inverso son conservativos:

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\rangle = \nabla r \qquad \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \left\langle \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right\rangle = \nabla(-r^{-1})$$

17.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de los siguientes campos vectoriales es un campo vectorial unitario en el plano?

(a) $\mathbf{F} = \langle y, x \rangle$

(b) $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\rangle$

(c) $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$

2. Dibuje un ejemplo de un campo vectorial, en el plano, que no sea constante y en el que cada vector sea paralelo a $\langle 1, 1 \rangle$.

3. Pruebe que el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle -z, 0, x \rangle$ es ortogonal al vector de posición $\overrightarrow{OP}$ en cada punto P. Dé un ejemplo de otro campo vectorial con esta propiedad.

4. Dé un ejemplo de una función potencial para $\langle yz, xz, xy \rangle$ que no sea $f(x, y, z) = xyz$.

Problemas

1. Calcule y dibuje el vector asignado a los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-1, -1)$ por el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle x^2, x \rangle$.

2. Calcule y dibuje el vector asignado a los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-1, -1)$ por el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$.

3. Calcule y dibuje el vector asignado a los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, 1, 0)$ por el campo vectorial $\mathbf{F} = \langle xy, z^2, x \rangle$.

4. Calcule el vector asignado a los puntos $P = (1, 1, 0)$ y $Q = (2, 1, 2)$ por los campos vectoriales $\mathbf{e}_r$, $\dfrac{\mathbf{e}_r}{r}$ y $\dfrac{\mathbf{e}_r}{r^2}$.

En los problemas 5-12, dibuje los siguientes campos vectoriales en el plano representando los vectores unidos a los puntos de coordenadas enteras en el rectángulo $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$. En lugar de representar los puntos con sus longitudes reales, reescale, si fuera necesario, para evitar superposiciones.

5. $\mathbf{F} = \langle 1, 0 \rangle$ **6.** $\mathbf{F} = \langle 1, 1 \rangle$ **7.** $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$

8. $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ **9.** $\mathbf{F} = \langle 0, x \rangle$ **10.** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

11. $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2} \right\rangle$

12. $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\rangle$

En los problemas 13-16, relacione cada uno de los siguientes campos vectoriales en el plano con su correspondiente representación en la figura 10.

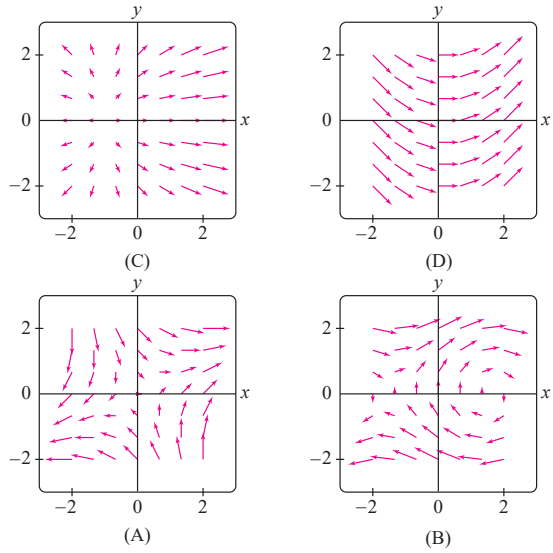


FIGURA 10

13. $\mathbf{F} = \langle 2, x \rangle$

14. $\mathbf{F} = \langle 2x + 2y \rangle$

15. $\mathbf{F} = \langle y, \cos x \rangle$

16. $\mathbf{F} = \langle x + y, x - y \rangle$

En los problemas 17-20, relacione cada uno de los siguientes campos vectoriales en el espacio tridimensional con su correspondiente representación en la f gura 11.

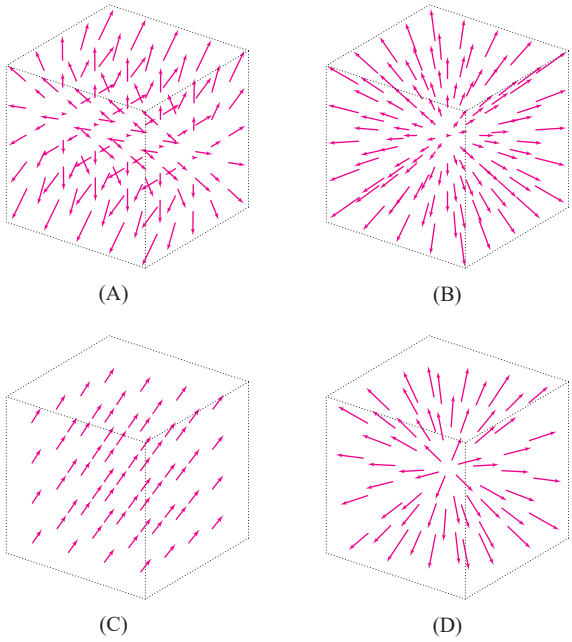


FIGURA 11

17. $\mathbf{F} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

18. $\mathbf{F} = \langle x, 0, z \rangle$

19. $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$

20. $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r$

21. Halle una función potencial para $\mathbf{F} = \langle x, 0 \rangle$ y demuestre que $\mathbf{G} = \langle y, 0 \rangle$ no es conservativo.

22. Demuestre que $\mathbf{F} = \langle yz, xzy \rangle$ no es conservativo.

En los problemas 23-26, halle una función potencial para $\mathbf{F}$.

23. $\mathbf{F} = \langle xy \rangle$

24. $\mathbf{F} = \langle ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$

25. $\mathbf{F} = \langle yz^2, xz^2, 2xyz \rangle$

26. $\mathbf{F} = \langle 2xze^{x^2}, 0, e^{x^2} \rangle$

27. Halle funciones potenciales para $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{e}_r}{r^3}$ y $\mathbf{G} = \dfrac{\mathbf{e}_r}{r^4}$ en $\mathbb{R}^3$. *Indicación:* vea el ejemplo 6.

28. Pruebe que $\mathbf{F} = \langle 3, 1, 2 \rangle$ es conservativo. A continuación, demuestre de manera más general que cualquier campo vectorial constante $\mathbf{F} = \langle a, b, c \rangle$ es conservativo.

29. Sea $\varphi = \ln r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Exprese $\nabla\varphi$ en términos del vector radial unitario $\mathbf{e}_r$ en $\mathbf{R}^2$.

30. Dado $P = (a, b)$, se def ne el campo vectorial radial unitario basado en P:

$$\mathbf{e}_P = \frac{\langle x - ay - b \rangle}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$$

(a) Compruebe que $\mathbf{e}_P$ es un campo vectorial unitario.

(b) Calcule $\mathbf{e}_P(1, 1)$ para $P = (3, 2)$.

(c) Halle una función potencial para $\mathbf{e}_P$.

31. ¿Cuál de las representaciones (A) o (B) de la f gura 12 corresponde al gráf co de contorno de una función potencial para el campo vectorial $\mathbf{F}$? Recuerde que los vectores gradientes son perpendiculares a las curvas de nivel.

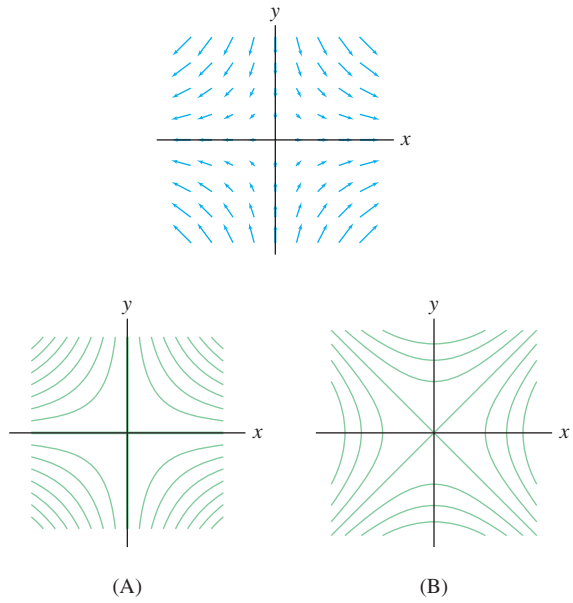


FIGURA 12

32. ¿Cuál de las representaciones (A) o (B) de la f gura 13 corresponde al gráf co de contorno de una función potencial para el campo vectorial $\mathbf{F}$?

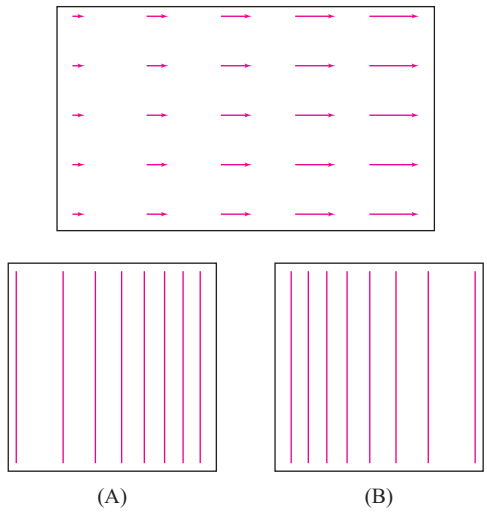
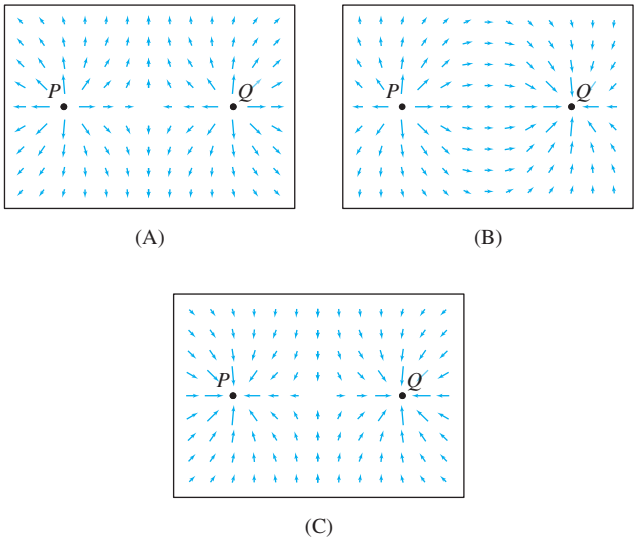


FIGURA 13

33. Relacione cada una de las siguientes descripciones con un campo vectorial en la f gura 14:

(a) El campo gravitacional creado por dos planetas de igual masa situados en P y Q.

(b) El campo electrostático creado por dos cargas iguales y opuestas situadas en P y Q (representando la fuerza sobre una carga de prueba negativa; cargas opuestas se atraen y cargas iguales se repelen).



(A) (B)

(C)

FIGURA 14

34. En este problema se muestra que el campo vectorial **F** en la figura 15 no es conservativo. Explique las siguientes afirmaciones:

(a) Si existe una función potencial V para **F**, entonces las curvas de nivel de V deben ser rectas verticales.

(b) Si existe una función potencial V para **F**, entonces las curvas de nivel de V deben crecer más y más, cuando y aumenta.

(c) Explique por qué (a) y (b) son incompatibles y, por tanto, V no puede existir.

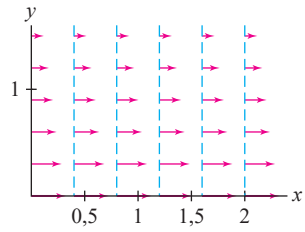


FIGURA 15

Problemas avanzados

35. Pruebe que cualquier campo vectorial de la forma:

$$\mathbf{F} = \langle f(x), g(y), h(z) \rangle$$

tiene una función potencial. Suponga que f, g y h son continuas.

36. Sea $\mathcal{D}$ un disco en $\mathbb{R}^2$. En este problema se muestra que si:

$$\nabla V(x, y) = \mathbf{0}$$

para todo (x, y) en $\mathcal{D}$, entonces V es constante. Considere los puntos $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$ y $R = (c, b)$ como se indica en la figura 16.

(a) Aplique cálculo en una variable para demostrar que V es constante sobre los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{RQ}$.

(b) Deduzca que $V(P) = V(Q)$ para cualesquiera dos puntos $P, Q \in \mathcal{D}$.

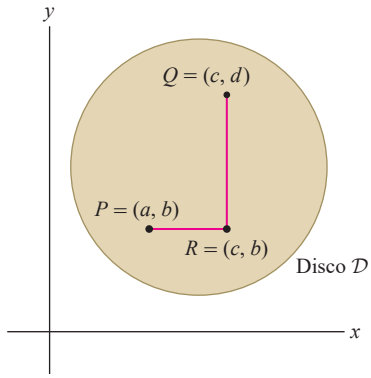


FIGURA 16

17.2 Integrales de línea

En esta sección se introducen dos tipos de integrales sobre curvas: integrales de funciones e integrales de campos vectoriales. Se suelen denominar **integrales de línea**, aunque sería más apropiado denominar a estas integrales de "curva" o de "trayectoria".

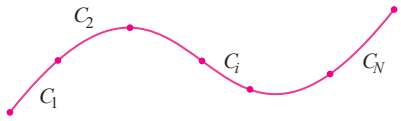
Integrales de línea escalares

Inicialmente se introduce la **integral de línea escalar** $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds$ de una función f sobre una curva $\mathcal{C}$. Las integrales de este tipo representan la masa y la carga total y se pueden utilizar para hallar potenciales eléctricos.

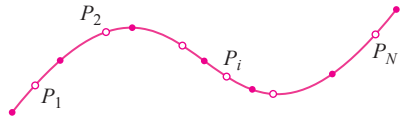
Como toda integral, esta integral de línea se define a través de un proceso de subdivisión, suma y paso al límite. Divida $\mathcal{C}$ en N arcos consecutivos $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N$, elija un punto intermedio P_i en cada arco $\mathcal{C}_i$ y construya la suma de Riemann (figura 1):

$$\sum_{i=1}^{N} f(P_i)\,\text{longitud}(\mathcal{C}_i) = \sum_{i=1}^{N} f(P_i)\,\Delta s_i$$

donde Δs_i es la longitud de $\mathcal{C}_i$.



Partición de C en N pequeños arcos



Elección de puntos intermedios P_i en cada arco

FIGURA 1 La curva $\mathcal{C}$ se divide en N pequeños arcos.

La integral de línea de f sobre $\mathcal{C}$ es el límite (siempre que exista) de estas sumas de Riemann cuando el máximo de las longitudes Δs_i tiende a cero:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \lim_{\{\Delta s_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{N} f(P_i)\,\Delta s_i \qquad \boxed{1}$$

En la ec. (1), se escribe $\{\Delta s_i\} \to 0$ para indicar que el límite se toma sobre todas las sumas de Riemann cuando el máximo de las longitudes Δs_i tiende a cero.

Esta definición también es válida para funciones $f(x,y)$ de dos variables.

La integral de línea escalar de la función $f(x,y,z) = 1$ es simplemente la longitud de $\mathcal{C}$. En este caso, todas las sumas de Riemann tienen el mismo valor:

$$\sum_{i=1}^{N} 1\,\Delta s_i = \sum_{i=1}^{N} \text{longitud}(\mathcal{C}_i) = \text{longitud}(\mathcal{C})$$

y entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} 1\,ds = \text{longitud}(\mathcal{C})$$

En la práctica, las integrales de línea se calculan usando parametrizaciones. Suponga que $\mathcal{C}$ admite una parametrización dada por $\mathbf{c}(t)$ para $a \le t \le b$, de derivada continua $\mathbf{c}'(t)$. Recuerde que la derivada es el vector tangente:

$$\mathbf{c}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

Divida $\mathcal{C}$ en N arcos consecutivos $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N$ correspondientes a una partición del intervalo $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

de tal manera que $\mathcal{C}_i$ quede parametrizada por $\mathbf{c}(t)$ para $t_{i-1} \le t \le t_i$ (figura 2), y elija puntos intermedios $P_i = \mathbf{c}(t_i^*)$ con t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$. Según la fórmula de la longitud de arco (sección 14.3):

$$\text{Longitud}\,(\mathcal{C}_i) = \Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$$

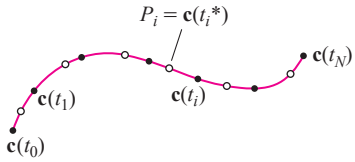


FIGURA 2 Partición de una curva parametrizada $\mathbf{c}(t)$.

Como $\mathbf{c}'(t)$ es continua, la función $\|\mathbf{c}'(t)\|$ es prácticamente constante sobre $[t_{i-1}, t_i]$ si la longitud $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ es pequeña y, por tanto, $\displaystyle\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt \approx \|\mathbf{c}'(t_i^*)\|\Delta t_i$. Así se obtiene la aproximación:

$$\sum_{i=1}^{N} f(P_i)\,\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{N} f(\mathbf{c}(t_i^*))\|\mathbf{c}'(t_i^*)\|\,\Delta t_i \qquad \boxed{2}$$

RECORDATORIO *Fórmula de la longitud de arco: la longitud s de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ para $a \le t \le b$ es:*

$$s = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$$

La suma a la derecha es una suma de Riemann que converge a la integral

$$\int_a^b f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt \tag{3}$$

cuando el máximo de las longitudes Δt_i tiende a cero. Estimando los errores en esta aproximación, se puede probar que las sumas a la izquierda en (2) también tienden a (3). De esta manera, se obtiene la siguiente fórmula para la integral de línea escalar.

TEOREMA 1 Cálculo de una integral de línea escalar Sea $\mathbf{c}(t)$ una parametrización de una curva $\mathcal{C}$ para $a \le t \le b$. Si $f(x,y,z)$ y $\mathbf{c}'(t)$ son continuas, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt \tag{4}$$

El símbolo ds pretende sugerir la longitud de arco s y suele denominarse el **elemento de línea** o el **diferencial longitud de arco**. En términos de una parametrización, se tiene la siguiente ecuación simbólica:

$$ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$$

donde

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

Según la ec. (4), para evaluar una integral de línea escalar, se debe reemplazar el integrando $f(x,y,z)\,ds$ por $f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$.

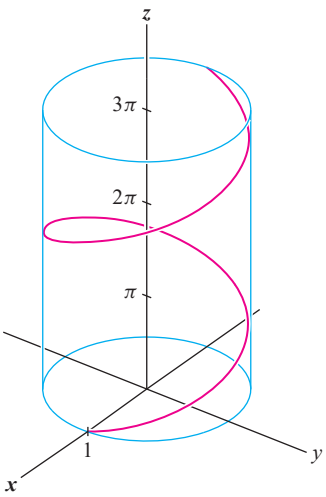


FIGURA 3 La hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

EJEMPLO 1 Integración sobre una hélice Calcule:

$$\int_{\mathcal{C}} (x + y + z)\,ds$$

donde $\mathcal{C}$ es la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ para $0 \le t \le \pi$ (f gura 3).

Solución

Etapa 1. **Calcule *ds***

$$\mathbf{c}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 1\rangle$$

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$ds = \|\mathbf{c}'(t)\|dt = \sqrt{2}\,dt$$

Etapa 2. **Escriba el integrando y evalúe**

Se tiene $f(x,y,z) = x + y + z$ y, por tanto:

$$f(\mathbf{c}(t)) = f(\cos t, \operatorname{sen} t, t) = \cos t + \operatorname{sen} t + t$$

$$f(x,y,z)\,ds = f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = (\cos t + \operatorname{sen} t + t)\,\sqrt{2}\,dt$$

Según la ec. (4):

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \int_0^{\pi} (\cos t + \operatorname{sen} t + t)\,\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\left(\operatorname{sen} t - \cos t + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \sqrt{2}\left(0 + 1 + \frac{1}{2}\pi^2\right) - \sqrt{2}\,(0 - 1 + 0) = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

EJEMPLO 2 Longitud de arco Calcule $\int_C 1\,ds$ para la hélice del ejemplo previo: $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ para $0 \le t \le \pi$. ¿Qué representa esta integral?

Solución En el ejemplo previo, se obtuvo que $ds = \sqrt{2}\,dt$ y, por tanto:

$$\int_C 1\,ds = \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,dt = \pi\sqrt{2}$$

Se trata de la longitud de la hélice para $0 \le t \le \pi$.

Aplicaciones de la integral de línea escalar

En la sección 16.5 se estudió el principio general por el que "la integral de una densidad es la cantidad total". Esto también es válido para las integrales de línea escalares. Por ejemplo, se puede entender la $\mathcal{C}$ como un alambre de **densidad de masa** $\rho(x,y,z)$, dada en unidades de masa por unidades de longitud. La masa total se def ne como la integral de la densidad de masa:

$$\text{Masa total de } \mathcal{C} = \int_C \rho(x,y,z)\,ds \qquad (5)$$

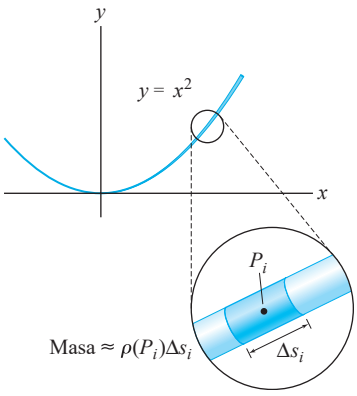


FIGURA 4

Una fórmula similar para la carga total es válida si $\rho(x,y,z)$ es la densidad de carga a lo largo de una curva. Como en la sección 16.5, se justif ca esta interpretación dividiendo $\mathcal{C}$ en N arcos $\mathcal{C}_i$ de longitud Δs_i siendo N elevado. La densidad de masa es prácticamente constante sobre $\mathcal{C}_i$ y, por tanto, la masa de $\mathcal{C}_i$ es aproximadamente $\rho(P_i)\,\Delta s_i$, donde P_i is cualquier punto intermedio sobre $\mathcal{C}_i$ (f gura 4). La masa total es la suma:

$$\text{Masa total de de } \mathcal{C} = \sum_{i=1}^{N} \text{masa de } \mathcal{C}_i \approx \sum_{i=1}^{N} \rho(P_i)\,\Delta s_i$$

Cuando el máximo de las longitudes Δs_i tiende a cero, las sumas de la derecha tienden a la integral de línea en la ec. (5).

EJEMPLO 3 Integral de línea escalar como una masa total Halle la masa total de un alambre con la forma de la parábola $y = x^2$ para $1 \le x \le 4$ (en centímetros) y densidad de masa dada por $\rho(x,y) = y/x$ g/cm.

Solución El arco de la parábola queda parametrizado por $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ para $1 \le t \le 4$.

Etapa 1. **Calcule *ds***

$$\mathbf{c}'(t) = \langle 1, 2t \rangle$$

$$ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \sqrt{1 + 4t^2}\,dt$$

Etapa 2. **Escriba el integrando y evalúe**

Se tiene que $\rho(\mathbf{c}(t)) = \rho(t, t^2) = t^2/t = t$ y, por tanto:

$$\rho(x,y)\,ds = \rho(\mathbf{c}(t))\sqrt{1+4t^2}\,dt = t\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

Se evalúa esta integral de línea utilizando la sustitución $u = 1 + 4t^2$, $du = 8t\,dt$:

$$\int_C \rho(x,y)\,ds = \int_1^4 \rho(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \int_1^4 t\sqrt{1+4t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_5^{65} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{12}u^{3/2}\Big|_5^{65} =$$

$$= \frac{1}{12}(65^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 42{,}74$$

Observe que, después de la sustitución, los límites de integración quedan $u(1) = 5$ y $u(4) = 65$. La masa total del alambre es, aproximadamente, 42,7 g. ■

Las integrales de línea escalares también se utilizan para calcular potenciales eléctricos. Cuando una carga eléctrica se distribuye de forma continua a lo largo de una curva $\mathcal{C}$, con densidad de carga $\rho(x,y,z)$, la distribución de carga da lugar a un campo electrostático $\mathbf{E}$ que es un campo vectorial conservativo. Según la ley de Coulomb, $\mathbf{E} = -\nabla V$ donde:

Por definición, $\mathbf{E}$ es el campo vectorial con la propiedad de que la fuerza electrostática sobre una carga puntual q situada en $P = (x,y,z)$ es el vector $q\mathbf{E}(x,y,z)$.

$$V(P) = k\int_C \frac{\rho(x,y,z)\,ds}{r_P} \qquad \boxed{6}$$

La constante k se suele escribir como $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$ donde ϵ_0 es la permitividad del vacío.

En esta integral $r_P = r_P(x,y,z)$ denota la distancia de (x,y,z) a P. El valor de la constante k es $k = 8{,}99 \times 10^9$ N m^2/C^2. La función V se denomina **potencial eléctrico**. No está definido para aquellos puntos P que no se encuentren en $\mathcal{C}$, y tiene unidades de voltios (un voltio es un Nm/C).

■ **EJEMPLO 4 Potencial eléctrico** Una semicircunferencia cargada de radio R y centrada en el origen en el plano xy (figura 5) tiene densidad de carga:

$$\rho(x,y,0) = 10^{-8}\left(2 - \frac{x}{R}\right)\ \text{C/m}$$

Halle el potencial eléctrico en un punto $P = (0,0,a)$ si $R = 0{,}1$ m.

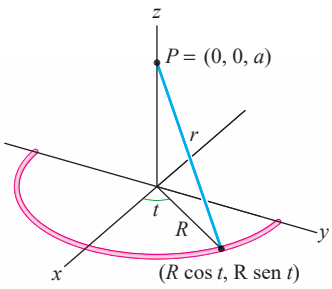


FIGURA 5

Solución Parametrice la semicircunferencia por $\mathbf{c}(t) = (R\cos t, R\,\text{sen}\,t, 0)$ para $-\pi/2 \le t \le \pi/2$:

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \|\langle -R\,\text{sen}\,t, R\cos t, 0\rangle\| = \sqrt{R^2\,\text{sen}^2\,t + R^2\cos^2 t + 0} = R$$

$$ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = R\,dt$$

$$\rho(\mathbf{c}(t)) = \rho(R\cos t, R\,\text{sen}\,t, 0) = 10^{-8}\left(2 - \frac{R\cos t}{R}\right) = 10^{-8}(2 - \cos t)$$

En este caso, la distancia r_P de P a un punto $(x,y,0)$ sobre la semicircunferencia es constante e igual a $r_P = \sqrt{R^2 + a^2}$ (figura 5). Por tanto:

$$V(P) = k\int_C \frac{\rho(x,y,z)\,ds}{r_P} = k\int_C \frac{10^{-8}(2-\cos t)\,R dt}{\sqrt{R^2+a^2}} =$$

$$= \frac{10^{-8}kR}{\sqrt{R^2+a^2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-\cos t)\,dt = \frac{10^{-8}kR}{\sqrt{R^2+a^2}}(2\pi - 2)$$

Con $R = 0{,}1$ m y $k = 8{,}99 \times 10^9$, se obtiene que $10^{-8}kR(2\pi - 2) \approx 38{,}5$ y

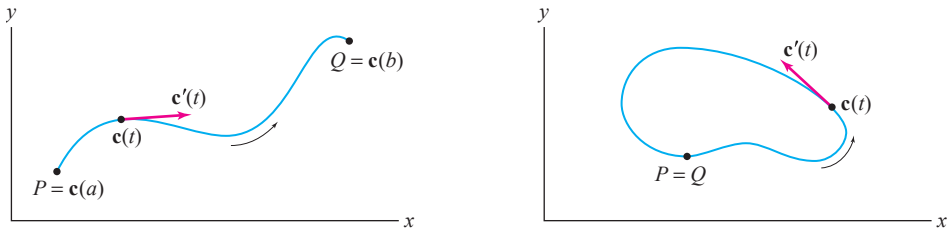
$$V(P) \approx \frac{38{,}5}{\sqrt{0{,}01 + a^2}} \text{ voltios.}$$

Integrales de línea vectoriales

Cuando lleva una mochila al subir una montaña, actúa contra el campo gravitatorio de la Tierra. El trabajo, o energía gastada, es un ejemplo de una cantidad que se puede representar mediante una integral de línea vectorial.

Una diferencia importante entre integrales de línea escalares y vectoriales es que las integrales de línea vectoriales dependen del sentido en el que se recorre la curva. Esto es razonable si piensa en la integral de línea vectorial como el trabajo, pues el trabajo realizado al bajar la montaña es el negativo del trabajo realizado para subirla.

El sentido dado por una trayectoria en una curva $\mathcal{C}$ se denomina una **orientación** (figura 6). Se dice que este sentido es el sentido **positivo** a lo largo de $\mathcal{C}$, el sentido opuesto es **negativo** y $\mathcal{C}$ se denomina una **curva orientada**. En la figura 6(A), si se invierte la orientación, el sentido positivo sería el sentido de Q a P.



(A) Trayectoria orientada de P a Q (B) Una curva cerrada orientada

FIGURA 6

El vector tangente unitario $\mathbf{T}$ *varía de punto a punto a lo largo de la curva. Cuando es necesario hacer énfasis en esta dependencia, se escribe* $\mathbf{T}(P)$.

La integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre una curva $\mathcal{C}$ se define como la integral de línea escalar de la componente tangencial de $\mathbf{F}$. Concretamente, sea $\mathbf{T} = \mathbf{T}(P)$ el vector tangente unitario en un punto P sobre $\mathcal{C}$ que apunte en el sentido positivo. La **componente tangencial** de $\mathbf{F}$ en P es el producto escalar (figura 7):

$$\mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{T}(P) = \|\mathbf{F}(P)\| \, \|\mathbf{T}(P)\| \cos\theta = \|\mathbf{F}(P)\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{F}(P)$ y $\mathbf{T}(P)$. La integral de línea vectorial de $\mathbf{F}$ es la integral de línea escalar de la función escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. A partir de ahora se supondrá que $\mathcal{C}$ es suave a trozos (consiste de un número finito de curvas suaves unidas con algunos posibles puntos angulosos).

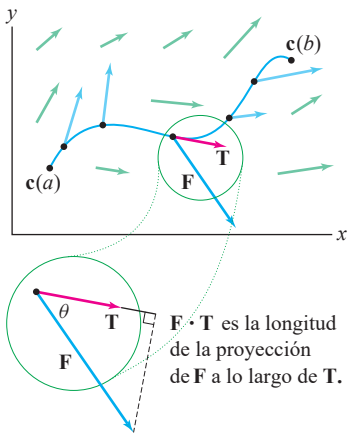


FIGURA 7 La integral de línea es la integral de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathcal{C}$.

DEFINICIÓN Integral de línea vectorial La integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva orientada $\mathcal{C}$ es la integral de la componente tangencial de $\mathbf{F}$:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds \qquad \boxed{7}$$

Para evaluar integrales de línea vectoriales se utilizan parametrizaciones, pero existe una diferencia importante con el caso escalar: la parametrización $\mathbf{c}(t)$ debe tener *orientación positiva*; es decir, $\mathbf{c}(t)$ debe trazar $\mathcal{C}$ en el sentido positivo. Se supondrá también que $\mathbf{c}(t)$ es regular; es decir, $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para $a \leq t \leq b$. Entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente no nulo que apunta en el sentido positivo y se tiene:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

En términos del diferencial de longitud de arco $ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$, se tiene:

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\,ds = \left(\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}\right)\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$$

Por tanto, la integral a la derecha del igual en la ec. (7) es igual a expresión a la derecha de la ec. (8) en el siguiente teorema.

TEOREMA 2 Cálculo de una integral de línea vectorial Si $\mathbf{c}(t)$ es una parametrización regular de una curva orientada $\mathcal{C}$ para $a \le t \le b$, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt \qquad \boxed{8}$$

Es útil pensar en $d\mathbf{s}$ como en un "elemento de línea vectorial" o "diferencial vectorial" que está relacionado con la parametrización mediante la ecuación simbólica:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{c}'(t)\,dt$$

Las integrales de línea vectoriales suelen ser más fáciles de calcular que las integrales de línea escalares, pues la longitud $\|\mathbf{c}'(t)\|$, que involucra una raíz cuadrada, no aparece en el integrando.

Según la ec. (8), para evaluar una integral de línea vectorial, se reemplaza el integrando $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ por $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$.

■ **EJEMPLO 5** Evalúe $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F} = \langle z, y^2, x\rangle$ y $\mathcal{C}$ está parametrizada (en el sentido positivo) por $\mathbf{c}(t) = (t+1, e^t, t^2)$ para $0 \le t \le 2$.

Solución El cálculo de una integral de línea comprende dos etapas.

Etapa 1. **Calcule el integrando**

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(t) &= (t+1, e^t, t^2)\\ \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) &= \langle z, y^2, x\rangle = \langle t^2, e^{2t}, t+1\rangle\\ \mathbf{c}'(t) &= \langle 1, e^t, 2t\rangle\end{aligned}$$

El integrando (como un diferencial) es el producto escalar:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)dt = \langle t^2, e^{2t}, t+1\rangle\cdot\langle 1, e^t, 2t\rangle\,dt = (e^{3t} + 3t^2 + 2t)dt$$

Etapa 2. **Evalúe la integral de línea**

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt =\\ &= \int_0^2 (e^{3t} + 3t^2 + 2t)\,dt = \left(\frac{1}{3}e^{3t} + t^3 + t^2\right)\Big|_0^2 =\\ &= \left(\frac{1}{3}e^6 + 8 + 4\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(e^6 + 35\right)\end{aligned}$$

■

Otra notación estándar para la integral de línea $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ es:

$$\int_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

Con esta notación, se puede expresar $d\mathbf{s}$ como un diferencial vectorial:

$$d\mathbf{s} = \langle dx, dy, dz \rangle$$

de manera que:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

En términos de una parametrización $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$:

$$d\mathbf{s} = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle dt$$

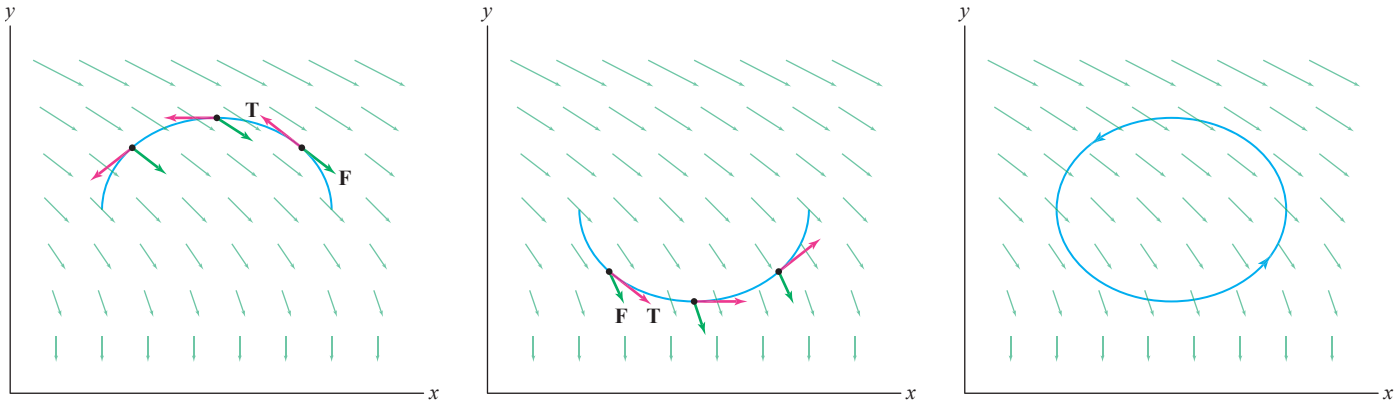
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \left(F_1(\mathbf{c}(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(\mathbf{c}(t)) \frac{dy}{dt} + F_3(\mathbf{c}(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

Así, se obtiene la siguiente fórmula:

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_a^b \left(F_1(\mathbf{c}(t)) \frac{dx}{dt} + F_2(\mathbf{c}(t)) \frac{dy}{dt} + F_3(\mathbf{c}(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

UN APUNTE GRÁFICO La magnitud de una integral de línea vectorial (tanto si esta es positiva como negativa) depende de los ángulos entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ a lo largo de la trayectoria. Considere la integral de línea de $\mathbf{F} = \langle 2y, -3 \rangle$ alrededor de la elipse de la f gura 8.

- En la f gura 8(A), los ángulos θ entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ son en su mayor parte obtusos a lo largo de la parte superior de la elipse. En consecuencia, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \leq 0$ y la integral de línea es negativa.
- En la f gura 8(B), los ángulos θ son en su mayor parte agudos a lo largo de la parte inferior de la elipse. En consecuencia, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \geq 0$ y la integral de línea es positiva.
- Uno se puede imaginar que la integral a lo largo de toda la elipse será negativa pues $\|\mathbf{F}\|$ es mayor en la mitad superior, por lo que la contribución negativa de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, proveniente de la mitad superior, parece que va a dominar a la contribución positiva correspondiente a la mitad inferior. Esta conjetura se verif cará en el ejemplo 6.



(A) La mayoría de los productos escalares $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ son negativos porque los ángulos entre los vectores son obtusos.
Por tanto: la integral es negativa

(B) La mayoría de los productos escalares $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ son positivos porque los ángulos entre los vectores son agudos.
Por tanto: la integral es positiva

(C) La integral de línea total es negativa

FIGURA 8 El campo vectorial $\mathbf{F} = \langle 2y, -3 \rangle$.

EJEMPLO 6 La elipse $\mathcal{C}$ de la figura 8(C) con orientación en el sentido contrario al de las agujas del reloj está parametrizada por $\mathbf{c}(\theta) = (5 + 4\cos\theta, 3 + 2\operatorname{sen}\theta)$ para $0 \le \theta < 2\pi$. Calcule:

$$\int_{\mathcal{C}} 2y\,dx - 3\,dy$$

En el ejemplo 6, recuerde que

$$\int_{\mathcal{C}} 2y\,dx - 3\,dy$$

es otra notación para la integral de línea de $\mathbf{F} = \langle 2y, -3\rangle$ *sobre* $\mathcal{C}$. *Formalmente:*

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \langle 2y, -3\rangle \cdot \langle dx, dy\rangle = \\ = 2y\,dx - 3\,dy$$

Solución Se tiene $x(\theta) = 5 + 4\cos\theta$ e $y(\theta) = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ y por tanto:

$$\frac{dx}{d\theta} = -4\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

El integrando de la integral de línea es:

$$2y\,dx - 3\,dy = \left(2y\frac{dx}{d\theta} - 3\frac{dy}{d\theta}\right)d\theta = \\ = (2(3 + 2\operatorname{sen}\theta)(-4\operatorname{sen}\theta) - 3(2\cos\theta))\,d\theta = \\ = -(24\operatorname{sen}\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta + 6\cos\theta)\,d\theta$$

RECORDATORIO

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \pi$

Como las integrales de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ sobre $[0, 2\pi]$ son cero, se tiene:

$$\int_{\mathcal{C}} 2y\,dx - 3\,dy = -\int_0^{2\pi} (24\operatorname{sen}\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta + 6\cos\theta)\,d\theta = \\ = -16\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = -16\pi$$

■

A continuación se enuncian algunas propiedades básicas de las integrales de línea vectoriales. En primer lugar, dada una curva orientada $\mathcal{C}$, la notación $-\mathcal{C}$ indica la curva $\mathcal{C}$ con la orientación opuesta (figura 9). El vector tangente unitario cambia de signo, de $\mathbf{T}$ a $-\mathbf{T}$ cuando se cambia la orientación, por lo que la componente tangencial de $\mathbf{F}$ y la integral de línea también cambian de signo:

$$\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

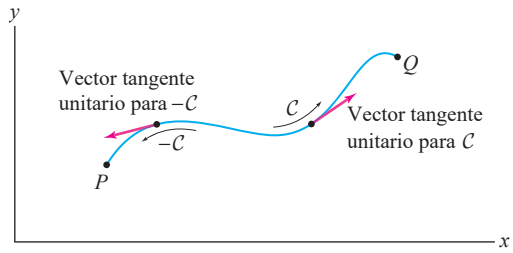


FIGURA 9 La trayectoria de P a Q tiene dos orientaciones posibles.

Si se dispone de n curvas orientadas $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$, la notación:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_n$$

indica la unión de las trayectorias y se define la integral de línea sobre $\mathcal{C}$ como la suma:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \cdots + \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Se utiliza esta fórmula para definir la integral de línea cuando $\mathcal{C}$ es **suave a trozos**, esto es cuando $\mathcal{C}$ es una unión de curvas suaves $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$. Por ejemplo, el triángulo de la figura 10 es suave a trozos pero no suave. El siguiente teorema resume las principales propiedades de las integrales de línea vectoriales.

TEOREMA 3 Propiedades de las integrales de línea vectoriales Sea $\mathcal{C}$ una curva orientada suave y sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ campos vectoriales.

(i) Linealidad: $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{F}+\mathbf{G})\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s}$

$$\int_{\mathcal{C}} k\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = k\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \quad (k \text{ una constante})$$

(ii) Inversión de la orientación: $\displaystyle\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$

(iii) Aditividad: si $\mathcal{C}$ es una unión de n curvas suaves $\mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_n$, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \cdots + \int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

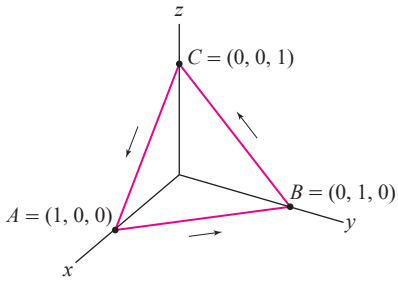


FIGURA 10 El triángulo es suave a trozos: es la unión de tres lados, siendo cada uno de ellos suave.

EJEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F} = \langle e^z, e^y, x+y\rangle$ y $\mathcal{C}$ es el triángulo definido por $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ orientado hacia la izquierda, visto desde arriba (figura 10).

Solución La integral de línea es la suma de las integrales de línea sobre los lados del triángulo:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\overline{AB}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{\overline{BC}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{\overline{CA}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

El segmento $\overline{AB}$ está parametrizado por $\mathbf{c}(t) = (1-t, t, 0)$ para $0 \le t \le 1$. Se tiene:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(1-t,t,0)\cdot\langle -1,1,0\rangle = \langle e^0, e^t, 1\rangle\cdot\langle -1,1,0\rangle = -1 + e^t$$

$$\int_{\overline{AB}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (e^t - 1)\,dt = (e^t - t)\Big|_0^1 = (e-1) - 1 = e - 2$$

Análogamente, $\overline{BC}$ está parametrizado por $\mathbf{c}(t) = (0, 1-t, t)$ para $0 \le t \le 1$ y:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t) = \langle e^t, e^{1-t}, 1-t\rangle\cdot\langle 0,-1,1\rangle = -e^{1-t} + 1 - t$$

$$\int_{\overline{BC}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (-e^{1-t} + 1 - t)\,dt = \left(e^{1-t} + t - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - e$$

Finalmente, $\overline{CA}$ está parametrizado por $\mathbf{c}(t) = (t, 0, 1-t)$ para $0 \le t \le 1$ y:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t) = \langle e^{1-t}, 1, t\rangle\cdot\langle 1,0,-1\rangle = e^{1-t} - t$$

$$\int_{\overline{CA}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (e^{1-t} - t)\,dt = \left(-e^{1-t} - \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = -\frac{3}{2} + e$$

La integral de línea total es la suma:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = (e-2) + \left(\frac{3}{2} - e\right) + \left(-\frac{3}{2} + e\right) = e - 2$$

Aplicaciones de la integral de línea vectorial

Recuerde que en física, el "trabajo" se refiere a la energía gastada cuando se aplica una fuerza a un objeto que se mueve siguiendo una trayectoria. Por definición, el trabajo W realizado sobre el segmento rectilíneo de P a Q al aplicar una fuerza $\mathbf{F}$ que forma un ángulo θ [figura 11(A)] es:

$$W = (\text{componente tangencial de } \mathbf{F}) \times \text{distancia} = (\|\mathbf{F}\| \cos\theta) \times PQ$$

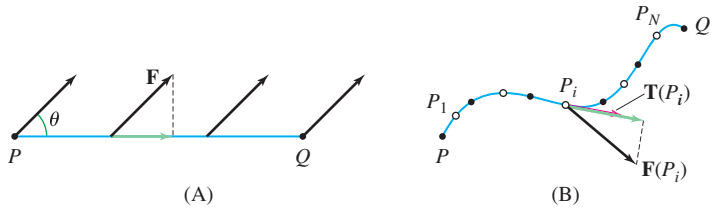


FIGURA 11

Cuando la fuerza actúa sobre el objeto a lo largo de una trayectoria curva $\mathcal{C}$, tiene sentido definir el trabajo W realizado como la integral de línea [figura 11(B)]:

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad \boxed{9}$$

Se trata del trabajo "realizado por el campo $\mathbf{F}$". La idea es que se puede dividir $\mathcal{C}$ en un gran número de pequeños arcos consecutivos $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N$, donde la longitud de $\mathcal{C}_i$ es Δs_i. El trabajo W_i realizado a lo largo de $\mathcal{C}_i$ es aproximadamente igual a la componente tangencial $\mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{T}(P_i)$ multiplicada por la longitud Δs_i, donde P_i es un punto intermedio en $\mathcal{C}_i$. Por tanto, se tiene:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i \approx \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}(P_i) \cdot \mathbf{T}(P_i)) \Delta s_i$$

La expresión de la derecha tiende a $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ cuando las longitudes Δs_i tienden a cero.

Suele ser de interés calcular el trabajo necesario para mover un objeto a lo largo de una trayectoria, en presencia de un campo de fuerza $\mathbf{F}$ (como un campo eléctrico o gravitatorio). En tal caso, $\mathbf{F}$ actúa sobre el objeto y se debe trabajar *contra* el campo de fuerza para mover el objeto. El trabajo necesario es el negativo de la integral de línea de la ec. (9):

$$\text{Trabajo realizado contra } \mathbf{F} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

RECORDATORIO *El trabajo se expresa en unidades de energía. La unidad de fuerza en el SI es el newton y la unidad de energía es el julio, que se define como 1 newton-metro. La unidad británica es el pie-libra.*

EJEMPLO 8 Cálculo del trabajo Calcule el trabajo realizado al mover una partícula de $P = (0, 0, 0)$ a $Q = (4, 8, 1)$ a lo largo de la trayectoria:

$$\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3, t) \text{ (en metros)} \qquad \text{para } 1 \le t \le 2$$

en presencia del campo de fuerza $\mathbf{F} = \langle x^2, -z, -yz^{-1} \rangle$ en newtons.

Solución Se tiene:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(t^2, t^3, t) = \langle t^4, -t, -t^2 \rangle$$
$$\mathbf{c}'(t) = \langle 2t, 3t^2, 1 \rangle$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \langle t^4, -t, -t^2 \rangle \cdot \langle 2t, 3t^2, 1 \rangle = 2t^5 - 3t^3 - t^2$$

El trabajo realizado contra el campo de fuerza, en julios, es:

$$W = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 (2t^5 - 3t^3 - t^2)\, dt = \frac{89}{12}$$

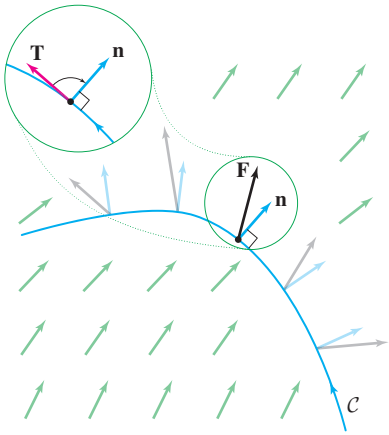


FIGURA 12

Las integrales de línea se suelen utilizar para calcular el "**flujo a través de una superficie plana**", que se define como la integral de la *componente normal* de un campo vectorial, diferente de la componente tangencial (figura 12). Suponga que una curva plana C se parametriza por $\mathbf{c}(t)$ para $a \le t \le b$ y sea:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(t) = \langle y'(t), -x'(t) \rangle \qquad \mathbf{e}_n(t) = \frac{\mathbf{n}(t)}{\|\mathbf{n}(t)\|}$$

Estos vectores son normales a C y apuntan hacia la derecha cuando se mueve por la curva en el sentido de $\mathbf{c}$. El flujo a través de C es la integral de la componente normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$, que se obtiene integrando $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{n}(t)$:

$$\text{Flujo a través de } C = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n) ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{n}(t)\, dt \qquad \boxed{10}$$

Si $\mathbf{F}$ es el campo velocidad de un fluido (modelado como un fluido en dos dimensiones), entonces el flujo es la cantidad de agua que atraviesa la curva por unidad de tiempo.

EJEMPLO 9 Flujo a través de una curva Calcule el flujo del campo velocidad $\mathbf{v} = \langle 3 + 2y - y^2/3, 0 \rangle$ (en centímetros por segundo) a través de la cuarta parte de la elipse $\mathbf{c}(t) = \langle 3\cos t, 6\,\text{sen}\, t \rangle$ para $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ (figura 13).

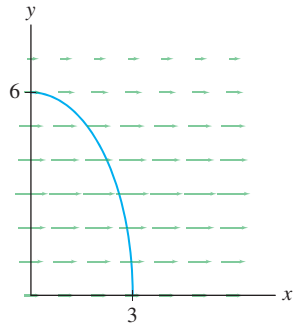


FIGURA 13

Solución El campo vectorial a lo largo de la trayectoria es:

$$\mathbf{v}(\mathbf{c}(t)) = \langle 3 + 2(6\,\text{sen}\, t) - (6\,\text{sen}\, t)^2/3, 0 \rangle = \langle 3 + 12\,\text{sen}\, t - 12\,\text{sen}^2\, t, 0 \rangle$$

El vector tangente es $\mathbf{c}'(t) = \langle -3\,\text{sen}\, t, 6\cos t \rangle$ y, por tanto, $\mathbf{n}(t) = \langle 6\cos t, 3\,\text{sen}\, t, \rangle$. La integración del producto escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{n}(t) &= \langle 3 + 12\,\text{sen}\, t - 12\,\text{sen}^2\, t, 0 \rangle \cdot \langle 6\cos t, 3\,\text{sen}\, t, \rangle \\ &= (3 + 12\,\text{sen}\, t - 12\,\text{sen}^2\, t)(6\cos t) \\ &= 18\cos t + 72\,\text{sen}\, t \cos t - 72\,\text{sen}^2\, t \cos t \end{aligned}$$

da lugar al flujo:

$$\int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{n}(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (18\cos t + 72\,\text{sen}\, t \cos t - 72\,\text{sen}^2\, t \cos t)\, dt =$$

$$= 18 + 36 - 24 = 30 \text{ cm}^2/\text{s}$$

17.2 RESUMEN

- La integral de línea sobre una curva de parametrización $\mathbf{c}(t)$ para $a \le t \le b$:

Integral de línea escalar: $$\int_C f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\, \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt$$

Integral de línea vectorial: $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt$$

- Diferencial longitud de arco: $ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$. Para evaluar una integral de línea escalar, sustituya $f(x,y,z)\,ds$ por $f(\mathbf{c}(t))\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$.
- Diferencial vectorial: $d\mathbf{s} = \mathbf{c}'(t)\,dt$. Para evaluar una integral de línea vectorial, sustituya $\mathbf{F}\cdot\,ds$ por $F(\mathbf{c}(t))\,\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$.
- Una *curva orientada* $\mathcal{C}$ es una curva en el que uno de los dos posibles sentidos a lo largo de $\mathcal{C}$ (llamado el *sentido positivo*) se ha elegido.
- La integral de línea vectorial depende de la orientación de la curva $\mathcal{C}$. La parametrización $\mathbf{c}(t)$ debe ser regular y debe describir $\mathcal{C}$ en el sentido positivo.
- Con la notación $-\mathcal{C}$ se indica la curva $\mathcal{C}$ con la orientación opuesta. Entonces:

$$\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

- Si $\rho(x,y,z)$ es la masa o la densidad de carga a lo largo de $\mathcal{C}$, entonces la masa total o la carga es igual a la integral de línea escalar $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \rho(x,y,z)\,ds$.
- La integral de línea vectorial se utiliza para calcular el trabajo W ejercido sobre un objeto a lo largo de una curva $\mathcal{C}$:

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

El trabajo realizado *contra* $\mathbf{F}$ es la cantidad $-\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

17.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿A qué es igual la integral de línea de la función constante $f(x,y,z) = 10$ sobre una curva $\mathcal{C}$ de longitud 5?

2. ¿Cuál de los siguientes tiene integral de línea cero sobre el segmento vertical que va de $(0,0)$ a $(0,1)$?

(a) $f(x,y) = x$ **(b)** $f(x,y) = y$

(c) $\mathbf{F} = \langle x, 0\rangle$ **(d)** $\mathbf{F} = \langle y, 0\rangle$

(e) $\mathbf{F} = \langle 0, x\rangle$ **(f)** $\mathbf{F} = \langle 0, y\rangle$

3. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si la afirmación es falsa, proporcione el enunciado verdadero.

(a) La integral de línea escalar no depende de cómo se parametriza la curva.

(b) Si invierte la orientación de la curva, ni la integral de línea escalar ni la integral de línea vectorial cambian de signo.

4. Suponga que la longitud de $\mathcal{C}$ es 5. ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ si:

(a) $\mathbf{F}(P)$ es normal a $\mathcal{C}$ en todos los puntos P sobre $\mathcal{C}$?

(b) $\mathbf{F}(P)$ es un vector unitario que apunta en el sentido negativo a lo largo de la curva?

Problemas

1. Sea $f(x,y,z) = x + yz$ y sea $\mathcal{C}$ el segmento rectilíneo que va de $P = (0,0,0)$ a $(6,2,2)$.

(a) Calcule $f(\mathbf{c}(t))$ y $ds = \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$ para la parametrización $\mathbf{c}(t) = (6t, 2t, 2t)$ para $0 \le t \le 1$.

(b) Evalúe $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds$.

2. Repita el problema 1 ahora con la parametrización $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^2, t^2)$ para $0 \le t \le \sqrt{2}$.

3. Sea $\mathbf{F} = \langle y^2, x^2\rangle$ y sea $\mathcal{C}$ la curva $y = x^{-1}$ para $1 \le x \le 2$, orientada de izquierda a derecha.

(a) Calcule $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ y $d\mathbf{s} = \mathbf{c}'(t)\,dt$ para la parametrización de $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{c}(t) = (t, t^{-1})$.

(b) Calcule el producto escalar $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$ y evalúe $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

4. Sea $\mathbf{F} = \langle z^2, x, y\rangle$ y sea $\mathcal{C}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t) = \langle 3 + 5t^2, 3 - t^2, t\rangle$ para $0 \le t \le 2$.

(a) Calcule $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ y $d\mathbf{s} = \mathbf{c}'(t)\,dt$.

(b) Calcule el producto escalar $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$ y evalúe $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

En los problemas 5-8, calcule la integral de la función escalar o del campo vectorial sobre $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ *para* $0 \le t \le \pi$.

5. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ **6.** $f(x,y,z) = xy + z$

7. $\mathbf{F} = \langle x, y, z\rangle$ **8.** $\mathbf{F} = \langle xy, 2, z^3\rangle$

En los problemas 9-16, calcule $\int_C f\,ds$ *para la curva especif cada.*

9. $f(x,y) = \sqrt{1+9xy}$, $y = x^3$ para $0 \le x \le 1$

10. $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^7}$, $y = \frac{1}{4}x^4$ para $1 \le x \le 2$

11. $f(x,y,z) = z^2$, $\mathbf{c}(t) = (2t, 3t, 4t)$ para $0 \le t \le 2$

12. $f(x,y,z) = 3x - 2y + z$, $\mathbf{c}(t) = (2+t, 2-t, 2t)$ para $-2 \le t \le 1$

13. $f(x,y,z) = xe^{z^2}$, trayectoria lineal a trozos de $(0,0,1)$ a $(0,2,0)$ y de este punto a $(1,1,1)$

14. $f(x,y,z) = x^2z$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t})$ para $0 \le t \le 1$

15. $f(x,y,z) = 2x^2 + 8z$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, t^2, t)$, $0 \le t \le 1$

16. $f(x,y,z) = 6xz - 2y^2$, $\mathbf{c}(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}, \dfrac{t^3}{3}\right)$, $0 \le t \le 2$

17. Calcule $\int_C 1\,ds$, donde la curva C está parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (4t, -3t, 12t)$ para $2 \le t \le 5$. ¿Qué representa esta integral?

18. Calcule $\int_C 1\,ds$, donde la curva C está parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (e^t, \sqrt{2}t, e^{-t})$ para $0 \le t \le 2$.

En los problemas 19-26, calcule $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ *para la curva orientada especif cada.*

19. $\mathbf{F} = \langle x^2, xy\rangle$, segmento rectilíneo de $(0,0)$ a $(2,2)$.

20. $\mathbf{F} = \langle 4, y\rangle$, cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ dada por $x \le 0, y \le 0$, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

21. $\mathbf{F} = \langle x^2, xy\rangle$, parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ con $x \le 0$, $y \ge 0$, orientada en el sentido de las agujas del reloj.

22. $\mathbf{F} = \langle e^{y-x}, e^{2x}\rangle$, traycetoria lineal a trozos de $(1,1)$ a $(2,2)$ y de este punto a $(0,2)$.

23. $\mathbf{F} = \langle 3zy^{-1}, 4x, -y\rangle$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^t, t)$ para $-1 \le t \le 1$

24. $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{-y}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}\right\rangle$, circunferencia de radio R, centro en el origen y orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

25. $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{1}{y^3+1}, \dfrac{1}{z+1}, 1\right\rangle$, $\mathbf{c}(t) = (t^3, 2, t^2)$ para $0 \le t \le 1$

26. $\mathbf{F} = \langle z^3, yz, x\rangle$, cuarta parte de la circunferencia de radio 2 en el plano yz, de centro en el origen, donde $y \ge 0$ y $z \ge 0$, orientada en el sentido de las agujas del reloj cuando se mira desde el eje de las x positivas.

En los problemas 27-32, evalúe la integral de línea.

27. $\int_C ydx - xdy$, parábola $y = x^2$ para $0 \le x \le 2$.

28. $\int_C ydx + zdy + xdz$, $\mathbf{c}(t) = (2 + t^{-1}, t^3, t^2)$ para $0 \le t \le 1$

29. $\int_C (x-y)dx + (y-z)dy + zdz$, segmento rectilíneo de $(0,0,0)$ a $(1,4,4)$.

30. $\int_C z\,dx + x^2\,dy + y\,dz$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \tan t, t)$ para $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

31. $\int_C \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$, segmento de $(1,0)$ a $(0,1)$.

32. $\int_C y^2dx + z^2dy + (1-x^2)dz$, cuarta parte de la circunferencia de radio 1 en el plano xz de centro en el origen en el cuadrante $x \ge 0$, $z \le 0$, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj cuando se mira desde el eje de las y positivas.

33. SAC Sea $f(x,y,z) = x^{-1}yz$ y sea C la curva parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (\ln t, t, t^2)$ para $2 \le t \le 4$. Use un programa informático de cálculo simbólico para calcular $\int_C f(x,y,z)\,ds$ con cuatro decimales de precisión.

34. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico para calcular $\int_C \langle e^{x-y}, e^{x+y}\rangle \cdot d\mathbf{s}$ con cuatro decimales de precisión, donde C es la curva $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le \pi$, orientada de izquierda a derecha.

En los problemas 35 y 36, calcule la integral de línea de $\mathbf{F} = \langle e^z, e^{x-y}, e^y\rangle$ *sobre la trayectoria dada.*

35. La trayectoria azul de P a Q en la f gura 14.

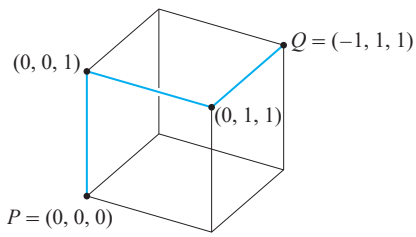


FIGURA 14

36. La trayectoria cerrada $ABCA$ en la f gura 15.

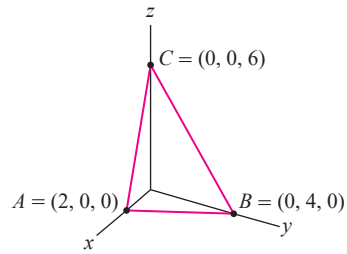


FIGURA 15

En los problemas 37 y 38, C es al trayectoria de P a Q en la f gura 16 que describe C_1, C_2 y C_3 en la orientación indicada y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial tal que:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 5 \qquad \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 8 \qquad \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 8$$

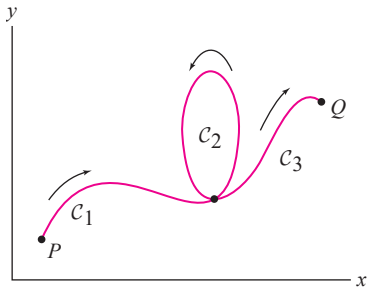


FIGURA 16

37. Determine:

(a) $\displaystyle\int_{-C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ **(b)** $\displaystyle\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ **(c)** $\displaystyle\int_{-C_1-C_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$

38. Halle el valor de $\displaystyle\int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde C' es la trayectoria que recorre el bucle C_2 cuatro veces en el sentido de las agujas del reloj.

39. A continuación se encuentran los valores de una función $f(x,y,z)$ y de un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ en seis puntos intermedios a lo largo de la trayectoria ABC de la f gura 17. Estime las integrales de línea de f y de $\mathbf{F}$ a lo largo de ABC.

Punto	$f(x,y,z)$	$\mathbf{F}(x,y,z)$
$(1, \frac{1}{6}, 0)$	3	$\langle 1,0,2\rangle$
$(1, \frac{1}{2}, 0)$	3,3	$\langle 1,1,3\rangle$
$(1, \frac{5}{6}, 0)$	3,6	$\langle 2,1,5\rangle$
$(1, 1, \frac{1}{6})$	4,2	$\langle 3,2,4\rangle$
$(1, 1, \frac{1}{2})$	4,5	$\langle 3,3,3\rangle$
$(1, 1, \frac{5}{6})$	4,2	$\langle 5,3,3\rangle$

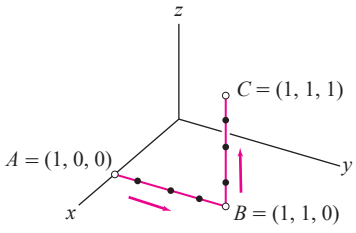


FIGURA 17

40. Estime las integrales de línea de $f(x,y)$ y de $\mathbf{F}(x,y)$ a lo largo de la cuarta parte de la circunferencia (orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj) en la f gura 18 usando los valores en los tres puntos intermedios a lo largo de cada trayectoria.

Punto	$f(x,y)$	$\mathbf{F}(x,y)$
A	1	$\langle 1,2\rangle$
B	−2	$\langle 1,3\rangle$
C	4	$\langle -2,4\rangle$

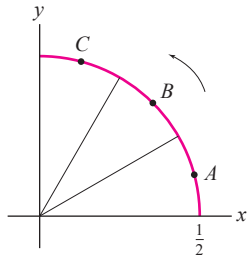
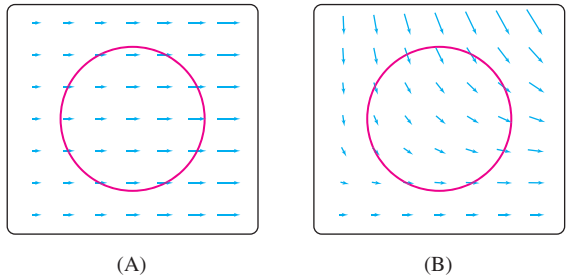
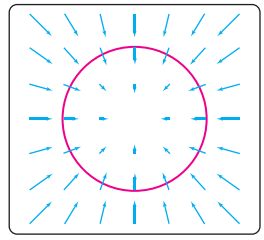


FIGURA 18

41. Determine si las integrales de línea de los campos vectoriales a lo largo de la circunferencia (orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj) en la f gura 19 son positivas, negativas o cero.



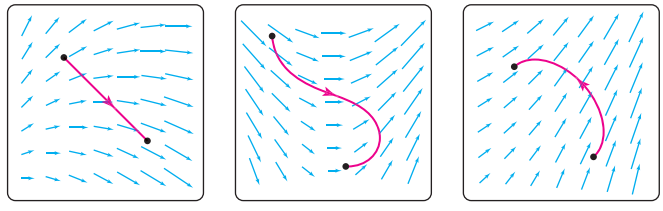
(A) (B)



(C)

FIGURA 19

42. Determine si las integrales de línea de los campos vectoriales a lo largo de las curvas orientadas en la f gura 20 son positivas o negativas.



(A) (B) (C)

FIGURA 20

43. Calcule la masa total de una pieza de alambre de forma circular con radio de 4 cm, centrada en el origen y cuya densidad de masa es $\rho(x,y) = x^2$ g/cm.

44. Calcule la masa total de un tubo de metal con la forma helicoidal $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$ (distancia en centímetros) para $0 \le t \le 2\pi$ si la densidad de masa es $\rho(x,y,z) = \sqrt{z}$ g/cm.

45. Halle la carga total sobre la curva $y = x^{4/3}$ para $1 \le x \le 8$ (en cm) suponiendo una densidad de carga de $\rho(x,y) = x/y$ (en unidades de 10^{-6} C/cm).

46. Halle la carga total sobre la curva $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen}^2 t)$ en centímetros para $0 \le t \le \frac{\pi}{8}$ suponiendo una densidad de carga de $\rho(x,y,z) = xy(y^2 - z)$ (en unidades de 10^{-6} C/cm).

En los problemas 47-50, use la ec. (6) para calcular la potencia eléctrica $V(P)$ en el punto P para la densidad de carga dada (en unidades de 10^{-6} C/cm).

47. Calcule $V(P)$ en $P = (0,0,12)$ si la carga eléctrica se distribuye a lo largo de la cuarta parte de una circunferencia de radio 4 centrada en el origen, con densidad de carga $\rho(x,y,z) = xy$.

48. Calcule $V(P)$ en el origen $P = (0,0)$ si la carga negativa se distribuye a lo largo de $y = x^2$ para $1 \le x \le 2$ con densidad de carga $\rho(x,y) = -y\sqrt{x^2+1}$.

49. Calcule $V(P)$ en $P = (2,0,2)$ si la carga negativa se distribuye a lo largo del eje y para $1 \le y \le 3$ con densidad de carga $\rho(x,y,z) = -y$.

50. Calcule $V(P)$ en el origen $P = (0,0)$ si la carga eléctrica se distribuye a lo largo de $y = x^{-1}$ para $\frac{1}{2} \le x \le 2$ con densidad de carga $\rho(x,y) = x^3 y$.

51. Calcule el trabajo realizado por un campo $\mathbf{F} = \langle x+y, x-y\rangle$ cuando un objeto se mueve de $(0,0)$ a $(1,1)$ a lo largo de cada una de las trayectorias $y = x^2$ y $x = y^2$.

52. Calcule el trabajo realizado por un campo de fuerza $\mathbf{F} = \langle x,y,z\rangle$ a lo largo de la trayectoria $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ para $0 \le t \le 3\pi$.

53. La figura 21 muestra un campo de fuerza $\mathbf{F}$.

(a) ¿Sobre cuál de las dos trayectorias, ADC o ABC, realiza $\mathbf{F}$ menos trabajo?

(b) Si tiene que realizar trabajo contra $\mathbf{F}$ para mover un objeto de C a A, ¿cuál de las trayectorias, CBA o CDA, requiere menos trabajo?

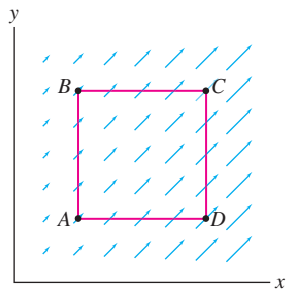


FIGURA 21

54. Compruebe que el trabajo realizado lo largo del segmento $\overline{PQ}$ por el campo vectorial constante $\mathbf{F} = \langle 2,-1,4\rangle$ es igual a $\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$ en estos casos:

(a) $P = (0,0,0)$, $Q = (4,3,5)$

(b) $P = (3,2,3)$, $Q = (4,8,12)$

55. Pruebe que el trabajo realizado por un campo de fuerza constante $\mathbf{F}$ sobre cualquier trayectoria $\mathcal{C}$ de P a Q es igual a $\mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

56. Observe que una curva $\mathcal{C}$ en la forma polar $r = f(\theta)$ se parametriza por $\mathbf{c}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta))$ pues las coordenadas x e y vienen dadas por $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$.

(a) Pruebe que $\|\mathbf{c}'(\theta)\| = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}$.

(b) Evalúe $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x-y)^2\, ds$, donde $\mathcal{C}$ es la semicircunferencia de la figura 22 de ecuación polar $r = 2\cos\theta$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

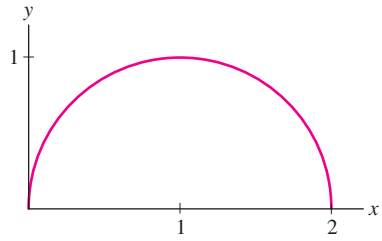


FIGURA 22 Semicircunferencia $r = 2\cos\theta$.

57. Se distribuye carga a lo largo de la espiral de ecuación polar $r = \theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$. La densidad de carga es $\rho(r,\theta) = r$ (suponga que la distancia viene dada en centímetros y la carga en unidades de 10^{-6} C/cm). Use el resultado del problema 56(a) para calcular la carga total.

En los problemas 58-61, sea $\mathbf{F}$ *el* **campo de vorticidad** *(llamado así porque se arremolina en torno al origen como en la figura 23):*

$$\mathbf{F} = \left\langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$$

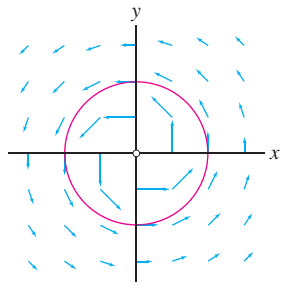


FIGURA 23 Campo de vorticidad $\mathbf{F} = \left\langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$.

58. Calcule $I = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Compruebe que I cambia de signo cuando $\mathcal{C}$ se orienta en el sentido de las agujas del reloj.

59. Pruebe que el valor de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathcal{C}_R$ es la circunferencia de radio R centrada en el origen y orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj, no depende de R.

60. Sea $a > 0$, $b < c$. Pruebe que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del segmento [figura 24(A)] de $P = (a,b)$ a $Q = (a,c)$ es igual al ángulo $\angle POQ$.

61. Sea $\mathcal{C}$ una curva en forma polar $r = f(\theta)$ para $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ [figura 24(B)], parametrizada por $\mathbf{c}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta)$ como en el problema 56.

(a) Pruebe que el campo de vorticidad, en coordenadas polares, se expresa como $\mathbf{F} = r^{-1}\langle -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta\rangle$.

(b) Pruebe que $\mathbf{F}\cdot\mathbf{c}'(\theta)\,d\theta = d\theta$.

(c) Pruebe que $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \theta_2 - \theta_1$.

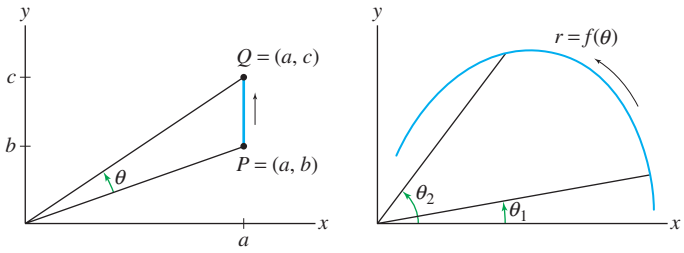


FIGURA 24

En los problemas 62-65, use la ec. (10) para calcular el flujo del campo vectorial a través de la curva especificada.

62. $\mathbf{F} = \langle -y, x\rangle$; mitad superior de la circunferencia unitaria, orientada en el sentido del las agujas del reloj.

63. $\mathbf{F} = \langle x^2, y^2\rangle$; segmento de $(3,0)$ a $(0,3)$, orientado hacia arriba.

64. $\mathbf{v} = \left\langle \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}, \dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}\right\rangle$; segmento $1 \le y \le 4$ a lo largo del eje y, orientado hacia arriba.

65. $\mathbf{v} = \langle e^y, 2x-1\rangle$; parábola $y = x^2$ para $0 \le x \le 1$, orientada de izquierda a derecha.

66. Sea $I = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds$. Suponga que $f(x,y,z) \ge m$ para algún número m y todo punto (x,y,z) sobre $\mathcal{C}$. ¿Cuál de las siguientes conclusiones es correcta? Explíquelo.

(a) $I \ge m$

(b) $I \ge mL$, donde L es la longitud de $\mathcal{C}$.

Problemas avanzados

67. Sea $\mathbf{F} = \langle x, 0\rangle$. Demuestre que si $\mathcal{C}$ es cualquier trayectoria de (a,b) a (c,d), entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}(c^2 - a^2)$$

68. Sea $\mathbf{F} = \langle y, x\rangle$. Demuestre que si $\mathcal{C}$ es cualquier trayectoria de (a,b) a (c,d), entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = cd - ab$$

69. Se desea definir el **valor promedio** $\Pr(f)$ de una función continua f a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ de longitud L. Divida $\mathcal{C}$ en N arcos consecutivos $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N$, cada uno de ellos de longitud L/N y sea P_i un punto intermedio en $\mathcal{C}_i$ (figura 25). La suma:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1} f(P_i)$$

se puede considerar una aproximación a $\Pr(f)$, por lo que se define:

$$\Pr(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1} f(P_i)$$

Demuestre que:

$$\Pr(f) = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds \qquad \boxed{11}$$

Indicación: pruebe que $\dfrac{L}{N}\displaystyle\sum_{i=1} f(P_i)$ es una suma de Riemann, aproximación a la integral de línea de f a lo largo de $\mathcal{C}$.

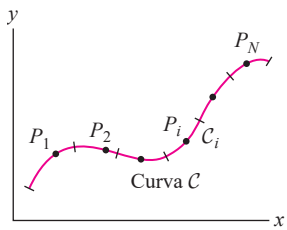


FIGURA 25

70. Use la ec. (11) para calcular el valor promedio de $f(x,y) = x - y$ a lo largo del segmento de $P = (2,1)$ a $Q = (5,5)$.

71. Use la ec. (11) para calcular el valor promedio de $f(x,y) = x$ a lo largo de la curva $y = x^2$ para $0 \le x \le 1$.

72. La temperatura (en grados centígrados) en un punto P sobre un alambre circular de radio 2 cm centrado en el origen es igual al cuadrado de la distancia de P a $P_0 = (2,0)$. Calcule la temperatura media a lo largo del alambre.

73. El valor de la integral de línea escalar no depende de la elección de la parametrización (porque está definida sin hacer referencia a la parametrización). Demuestre esta afirmación directamente. Es decir, suponga que $\mathbf{c}_1(t)$ y $\mathbf{c}(t)$ son dos parametrizaciones tales que $\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{c}(\varphi(t))$, donde $\varphi(t)$ es una función estrictamente creciente. Use la fórmula del cambio de variables para comprobar que:

$$\int_c^d f(\mathbf{c}_1(t))\|\mathbf{c}_1'(t)\|\,dt = \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt$$

donde $a = \varphi(c)$ y $b = \varphi(d)$.

17.3 Campos vectoriales conservativos

RECORDATORIO

- *Un campo vectorial* $\mathbf{F}$ *es conservativo si* $\mathbf{F} = \nabla V$ *para alguna función* $V(x, y, z)$.
- V *se denomina una función potencial.*

En esta sección se estudian los campos vectoriales conservativos con mayor profundidad. Por convenio, cuando se especif que una parametrización concreta $\mathbf{c}(t)$ de una curva orientada $\mathcal{C}$, se denotará la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ como:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Cuando la curva $\mathcal{C}$ sea *cerrada*, es habitual referirse a la integral de línea como a la **circulación** de $\mathbf{F}$ alrededor de $\mathcal{C}$ (f gura 1) y se denotará con el símbolo $\oint$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

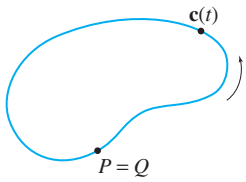


FIGURA 1 La circulación alrededor de una trayectoria cerrada se denota por $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

El primer resultado establece la **independencia respecto a la trayectoria** para campos vectoriales conservativos, lo que signif ca que la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de una trayectoria de P a Q sólo depende de los extremos P y Q y no de la trayectoria concreta seguida (f gura 2).

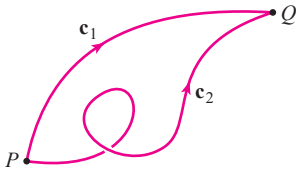


FIGURA 2 Independencia de trayectorias: si $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces las integrales de línea sobre $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son iguales.

TEOREMA 1 Teorema fundamental para campos vectoriales conservativos Suponga que $\mathbf{F} = \nabla V$ sobre un dominio $\mathcal{D}$.

1. Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria de P a Q en $\mathcal{D}$, entonces:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V(Q) - V(P) \qquad \boxed{1}$$

En particular, $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria seguida.

2. La circulación alrededor de una trayectoria cerrada $\mathbf{c}$ (es decir, $P = Q$) es cero:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Demostración Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria en $\mathcal{D}$ para $a \le t \le b$ y con $\mathbf{c}(a) = P$ y $\mathbf{c}(b) = Q$. Entonces:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \nabla V \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla V(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt$$

Sin embargo, por la regla de la cadena para trayectorias (teorema 2 en la sección 15.5),

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{c}(t)) = \nabla V(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{d}{dt} V(\mathbf{c}(t))\, dt = V(\mathbf{c}(t))\Big|_a^b = V(\mathbf{c}(b)) - V(\mathbf{c}(a)) = V(Q) - V(P)$$

Esto demuestra la ec. (1). También demuestra la independencia respecto a la trayectoria pues la cantidad $V(Q) - V(P)$ depende de los extremos pero no de la trayectoria $\mathbf{c}$. Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria cerrada, entonces $P = Q$ y $V(Q) - V(P) = 0$. ■

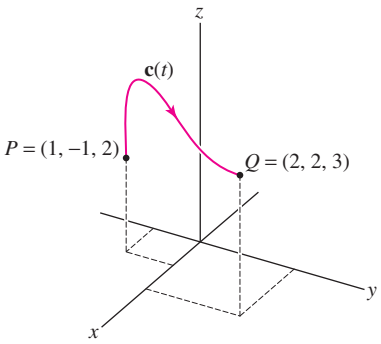


FIGURA 3 Una trayectoria arbitraria de $(1,-1,2)$ a $(2,2,3)$.

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{F} = \langle 2xy + z, x^2, x \rangle$.

(a) Compruebe que $V(x,y,z) = x^2y + xz$ es una función potencial.

(b) Evalúe $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}$ es una trayectoria de $P = (1,-1,2)$ a $Q = (2,2,3)$.

Solución (a) Las derivadas parciales de $V(x,y,z) = x^2y + xz$ son las componentes de $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy + z \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = x^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = x$$

Por tanto, $\nabla V = \langle 2xy + z, x^2, x \rangle = \mathbf{F}$.

(b) Según el teorema 1, la integral de línea sobre cualquier trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de P = = $(1,-1,2)$ a $Q = (2,2,3)$ [f gura 3] tiene el valor:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= V(Q) - V(P) = \\ &= V(2,2,3) - V(1,-1,2) = \\ &= \left(2^2(2) + 2(3)\right) - \left(1^2(-1) + 1(2)\right) = 13 \end{aligned}$$

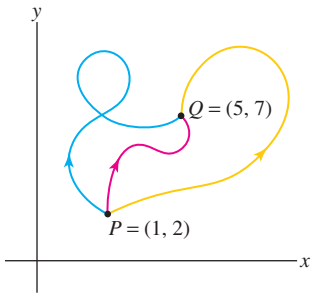


FIGURA 4 Trayectorias de $(1,2)$ a $(5,7)$.

EJEMPLO 2 Halle una función potencial para $\mathbf{F} = \langle 2x + y, x \rangle$ y úsela para evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}$ es cualquier trayectoria (f gura 4) de $(1,2)$ a $(5,7)$.

Solución Se va a desarrollar un método general para obtener funciones potenciales. Observe que $V(x,y) = x^2 + xy$ cumple $\nabla V = \mathbf{F}$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy) = 2x + y$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy) = x$$

Por tanto, para cualquier trayectoria $\mathbf{c}$ de $(1,2)$ a $(5,7)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= V(5,7) - V(1,2) = \\ &= (5^2 + 5(7)) - (1^2 + 1(2)) = 57 \end{aligned}$$

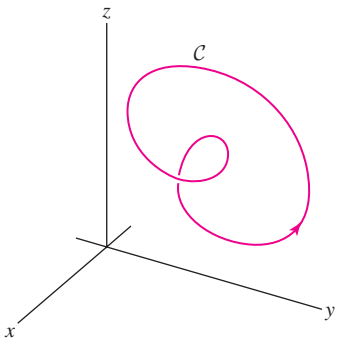


FIGURA 5 La integral de línea de un campo vectorial conservativo alrededor de una curva cerrada es cero.

EJEMPLO 3 Integral alrededor de una trayectoria cerrada Sea $V(x,y,z) = xy\,\text{sen}(yz)$. Evalúe $\oint_C \nabla V \cdot d\mathbf{s}$, donde C es la curva cerrada de la f gura 5.

Solución Por el teorema 1, la integral de un vector gradiente alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero. Dicho de otro modo, $\oint_C \nabla V \cdot d\mathbf{s} = 0$.

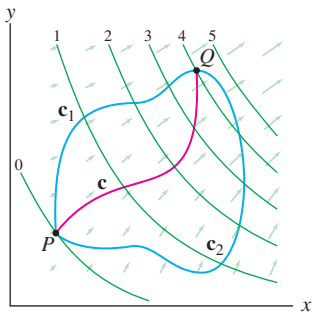


FIGURA 6 Campo vectorial $\mathbf{F} = \nabla V$ con las líneas de contorno V.

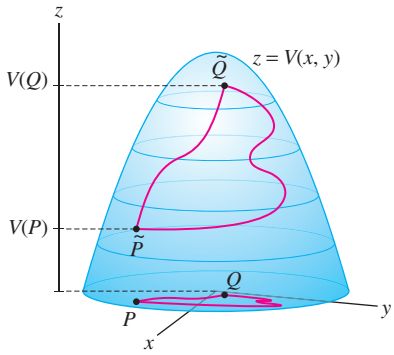


FIGURA 7 La superf cie potencial $z = V(x, y)$.

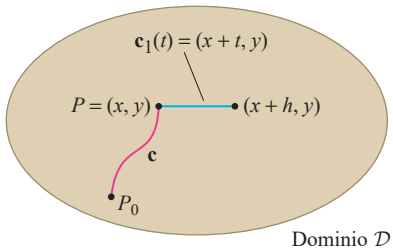


FIGURA 8

UN APUNTE CONCEPTUAL Una buena manera de entender la independencia respecto a la trayectoria es en términos de la función potencial. Considere un campo vectorial $\mathbf{F} = \nabla V$ en el plano (f gura 6). Las curvas de nivel de V se denominan **curvas equipotenciales** y el valor $V(P)$ se denomina el potencial en P.

Cuando se integra $\mathbf{F}$ a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de P a Q, el integrando es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \nabla V(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$$

Ahora, recuerde que por la regla de la cadena para trayectorias:

$$\nabla V(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)) = \frac{d}{dt} V(\mathbf{c}(t))$$

Dicho de otro modo, el integrando es la tasa a la que el potencial cambia a lo largo de la trayectoria y, por eso, la integral propiamente dicha es el cambio neto en el potencial:

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \underbrace{V(Q) - V(P)}_{\text{Cambio neto en el potencial}}$$

A nivel informal, lo que la integral de línea hace es contar el número neto de curvas equipotenciales atravesadas para un desplazamiento de P a Q a lo largo de cualquier trayectoria. Por "número neto" se indica que los cruces en la dirección opuesta contabilizan con un signo negativo. Este número neto es independiente de la trayectoria concreta considerada.

También se puede interpretar la integral de línea en términos de la gráf ca de la función potencial $z = V(x, y)$. La integral de línea calcula el cambio en la altura cuando uno se desplaza hacia arriba por la superf cie (f gura 7). De nuevo, este cambio en altura no depende de la trayectoria de P a Q. Por supuesto, estas interpretaciones sólo son válidas para campos vectoriales conservativos; en caso contrario no existe función potencial.

Uno puede preguntarse si existen otros campos vectoriales con esta propiedad de independencia respecto a la trayectoria, además de los campos conservativos. La respuesta es que no. Según el siguiente teorema, cualquier campo vectorial con la propiedad de independencia respecto a la trayectoria es necesariamente conservativo.

TEOREMA 2 Un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre un dominio abierto y arcoconexo $\mathcal{D}$ es independiente respecto a la trayectoria si y sólo si es conservativo.

Demostración Ya se ha demostrado que los campos conservativos son independientes respecto a la trayectoria. Así, suponga que $\mathbf{F}$ es independiente respecto a la trayectoria; se va a demostrar que $\mathbf{F}$ tiene función potencial.

Para simplif car la notación, se va a considerar un campo vectorial en el plano $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2 \rangle$. La demostración para campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ es similar. Fije un punto P_0 en $\mathcal{D}$ y para todo punto $P = (x, y) \in \mathcal{D}$, def na:

$$V(P) = V(x, y) = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

donde $\mathbf{c}$ es cualquier trayectoria en $\mathcal{D}$ de P_0 a P (f gura 8). Observe que esta def nición de $V(P)$ tiene sentido únicamente porque se está suponiendo que la integral de línea no depende de la trayectoria $\mathbf{c}$.

Se va a demostrar que $\mathbf{F} = \nabla V$, lo que se reduce a demostrar $\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_1$ y $\dfrac{\partial V}{\partial y} = F_2$. Únicamente se va a comprobar la primera ecuación, pues la segunda se puede verif car de

manera similar. Sea $\mathbf{c}_1$ la trayectoria horizontal $\mathbf{c}_1(t) = (x + t, y)$ para $0 \le t \le h$. Si $|h|$ es suf cientemente pequeño, $\mathbf{c}_1$ se encuentra dentro de $\mathcal{D}$. Denote como $\mathbf{c} + \mathbf{c}_1$ la trayectoria $\mathbf{c}$ seguida de $\mathbf{c}_1$. Empieza en P_0 y f naliza en $(x + h, y)$, por lo que:

$$V(x+h,y) - V(x,y) = \int_{\mathbf{c}+\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} =$$

$$\left(\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}\right) - \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

El vector tangente de la trayectoria $\mathbf{c}_1$ es $\mathbf{c}_1'(t) = \langle 1, 0 \rangle$, por lo que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}_1(t)) \cdot \mathbf{c}_1'(t) = \langle F_1(x+t,y), F_2(x+t,y) \rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle = F_1(x+t,y)$$

$$V(x+h,y) - V(x,y) = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^h F_1(x+t,y)\, dt$$

Usando la sustitución $u = x + t$, se tiene:

$$\frac{V(x+h,y) - V(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h F_1(x+t,y)\, dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F_1(u,y)\, du$$

La integral a la derecha es el valor promedio de $F_1(u,y)$ sobre el intervalo $[x, x+h]$. Converge al valor $F_1(x,y)$ cuando $h \to 0$, lo que conduce al resultado que se quería probar:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{V(x+h,y) - V(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F_1(u,y)\, du = F_1(x,y)$$

Campos conservativos en física

El principio de conservación de la energía dice que la suma $KE + PE$ de energías cinética y potencial se mantiene constante en un sistema aislado. Por ejemplo, un objeto que cae gana energía cinética a medida que cae a la tierra, pero este aumento en la energía cinética es compensado por una pérdida en la energía potencial gravitatoria (g veces el cambio en altura), de tal manera que la suma $KE + PE$ se mantiene constante.

Se va a probar que la conservación de la energía es válida para el movimiento de una partícula de masa m bajo un campo de fuerza $\mathbf{F}$, si $\mathbf{F}$ tiene función potencial. Esto explica por qué el término "conservativo" se utiliza para describir campos vectoriales que tengan función potencial.

Se seguirá el convenio de la física de expresar la función potencial con un signo menos:

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

Cuando la partícula está situada en $P = (x,y,z)$, se dice que tiene **energía potencial** $V(P)$. Suponga que la partícula se mueve siguiendo una trayectoria $\mathbf{c}(t)$. La velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(t)$ y su energía cinética es $KE = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Por def nición, la **energía total** en el instante t es la suma:

$$E = KE + PE = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + V(\mathbf{c}(t))$$

En un campo vectorial conservativo, el trabajo W contra $\mathbf{F}$ necesario para mover la partícula de P a Q es igual al cambio en energía potencial:

$$W = -\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V(Q) - V(P)$$

TEOREMA 3 Conservación de la energía La energía total E de de una partícula en movimiento bajo la inf uencia de un campo de fuerza conservativo $\mathbf{F} = -\nabla V$ es constante en el tiempo. Es decir, $\dfrac{dE}{dt} = 0$.

Las funciones potenciales aparecieron por primera vez en 1774 en los trabajos de Jean-Louis Lagrange (1736-1813). Lagrange, uno de los más grandes matemáticos de su época, hizo contribuciones fundamentales a la física, análisis, álgebra y teoría de números. Nació en Turín, Italia, en el seno de una familia de origen francés, pero pasó la mayor parte de su carrera primero en Berlín y luego en París. Después de la Revolución Francesa, fue obligado a enseñar en los cursos de matemáticas elementales y, al parecer, su discurso era demasiado elevado para su audiencia. Un contemporáneo escribió: "cualquier cosa que este gran hombre diga merece el más alto grado de consideración, pero resulta demasiado abstracto para los jóvenes."

Demostración Sea $\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t)$ la aceleración de la partícula y sea m su masa. Según la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t)$ y por tanto:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + V(\mathbf{c}(t))\right) = \\ &= m\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} + \nabla V(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t) = && \text{(producto y reglas de la cadena)} \\ &= \mathbf{v}\cdot m\mathbf{a} - \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = && \text{(ya que } \mathbf{F} = -\nabla V \text{ y } \mathbf{c}'(t) = \mathbf{v}\text{)} \\ &= \mathbf{v}\cdot(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) = 0 && \text{(ya que } \mathbf{F} = m\mathbf{a}\text{)}\end{aligned}$$

■

En el ejemplo 6 de la sección 17.1, se verif có que los campos vectoriales cuadrático-inversos son conservativos:

$$\mathbf{F} = k\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = -\nabla V \quad \text{con} \quad V = \frac{k}{r}$$

Ejemplos básicos de campos vectoriales cuadrático-inversos son las fuerzas gravitatoria y electrostática debidas a una masa o carga puntual. Por convenio, estos campos tienen unidades de fuerza *por unidad de masa o unidad de carga*. De esta manera, si $\mathbf{F}$ es un campo gravitatorio, la fuerza sobre una partícula de masa m es $m\mathbf{F}$ y su energía potencial es mV, donde $\mathbf{F} = -\nabla V$.

■ **EJEMPLO 4 Trabajo contra la gravedad** Calcule el trabajo W contra el campo gravitatorio terrestre necesario para mover un satélite de masa $m = 600$ kg a lo largo de cualquier trayectoria desde una órbita de altitud 2000 km a una órbita de altitud 4000 km.

En el ejemplo 6 de la sección 17.1 se probó que:

$$\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

La constante k es igual a GM_e donde $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} y la masa de la Tierra es $M_e \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg:

$$k = GM_e \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Solución El campo gravitatorio terrestre es el campo cuadrático-inverso:

$$\mathbf{F} = -k\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = -\nabla V \qquad V = -\frac{k}{r}$$

donde r es la distancia desde el centro de la Tierra y $k = 4 \cdot 10^{14}$ (vea la nota al margen). El radio de la Tierra es aproximadamente $6{,}4 \cdot 10^6$ metros por lo que el satélite debe ser desplazado desde $r = 8{,}4 \cdot 10^6$ metros a $r = 10{,}4 \cdot 10^6$ metros. La fuerza sobre el satélite es $m\mathbf{F} = 600\mathbf{F}$ y el trabajo W necesario para desplazar el satélite a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}$ es:

$$\begin{aligned}W &= -\int_{\mathbf{c}} m\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 600\int_{\mathbf{c}} \nabla V\cdot d\mathbf{s} = \\ &= -\frac{600k}{r}\Big|_{8{,}4\cdot 10^6}^{10{,}4\times 10^6} \approx \\ &\approx -\frac{2{,}4\cdot 10^{17}}{10{,}4\cdot 10^6} + \frac{2{,}4\cdot 10^{17}}{8{,}4\cdot 10^6} \approx 5{,}5\cdot 10^9 \text{ julios}\end{aligned}$$

■

■ **EJEMPLO 5** Un electrón se desplaza en la dirección de las x positivas con velocidad $v_0 = 10^7$ m/s. Cuando pasa por $x = 0$, se conecta un campo eléctrico $\mathbf{E} = 100x\mathbf{i}$ (en newtons por culombio). Halle la velocidad del electrón después que éste haya viajado 2 metros. Suponga que $q_e/m_e = -1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg, donde q_e y m_e son la masa y la carga del electrón respectivamente.

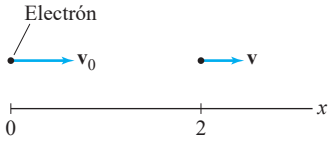


FIGURA 9 Un electrón moviéndose en un campo eléctrico.

Solución Se tiene que $\mathbf{E} = -\nabla V$ donde $V(x, y, z) = -50x^2$, por lo que el campo eléctrico es conservativo. Como V sólo depende de x, se escribirá $V(x)$ en lugar de $V(x, y, z)$. Por la ley de la conservación de la energía, la energía total del electrón E es constante y, por tanto, E tiene el mismo valor cuando el electrón se encuentra en $x = 0$ y en $x = 2$:

$$E = \frac{1}{2}m_e v_0^2 + q_e V(0) = \frac{1}{2}m_e v^2 + q_e V(2)$$

Como $V(0) = 0$, se obtiene:

$$\frac{1}{2}m_e v_0^2 = \frac{1}{2}m_e v^2 + q_e V(2) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2(q_e/m_e)V(2)}$$

Usando el valor numérico de q_e/m_e, se obtiene:

$$v \approx \sqrt{10^{14} - 2(-1{,}76 \cdot 10^{11})(-50(2)^2)} \approx \sqrt{2{,}96 \cdot 10^{13}} \approx 5{,}4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Observe que la velocidad ha decrecido. Esto es así porque **E** ejerce una fuerza sobre una carga negativa que va en la dirección de las x negativas. ■

Determinación de funciones potenciales

Todavía no se dispone de una forma efectiva de decidir si un campo vectorial es, o no, conservativo. Según el teorema 1 de la sección 17.1, todo campo vectorial conservativo cumple la condición de las parciales cruzadas:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \tag{2}$$

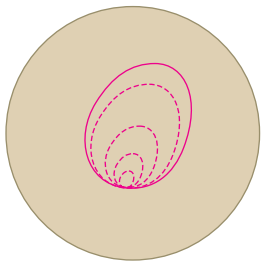
Pero, ¿garantiza esta condición que **F** sea conservativo? La respuesta es un si con reservas; la condición de las parciales cruzadas garantiza que **F** sea conservativo, pero sólo en dominios $\mathcal{D}$ con la propiedad de ser simplemente conexos.

En términos generales, un dominio $\mathcal{D}$ en el plano es **simplemente conexo** si no tiene ningún "agujero" (f gura 10). De manera más precisa, $\mathcal{D}$ es simplemente conexo si cualquier bucle hacia un punto en $\mathcal{D}$ se puede trazar o "contraer," *pero siempre continuando dentro de* $\mathcal{D}$, como se ilustra en la f gura 11(A). Ejemplos de regiones simplemente conexas en $\mathbb{R}^2$ son discos, rectángulos y el propio plano $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, el disco de la f gura 11(B) al que se le ha quitado un punto no es simplemente conexo: llega un momento en que el bucle no se puede trazar sin pasar por el punto que se eliminó. En $\mathbb{R}^3$, los interiores de las bolas y de las cajas son simplemente conexos, y también lo es la totalidad de $\mathbb{R}^3$.

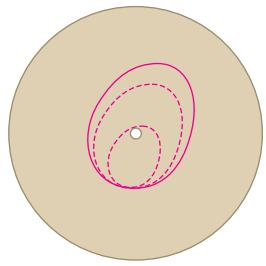
Regiones simplemente conexas

Regiones que no son simplemente conexas

FIGURA 10 Simplemente conexo quiere decir que "no tiene agujeros."



(A) Región simplemente conexa: se puede trazar cualquier bucle hacia un punto continuando dentro de la región.



(B) Región no simplemente conexa: llega un momento en que el bucle no se puede trazar sin pasar a través del agujero.

FIGURA 11

TEOREMA 4 Existencia de una función potencial Sea **F** un campo vectorial en un dominio simplemente conexo $\mathcal{D}$. Si **F** cumple la condición de las parciales cruzadas (2), entonces **F** es conservativo.

En lugar de demostrar el teorema 4, se va a ilustrar un procedimiento práctico para hallar una función potencial cuando se verif ca la condición de las parciales cruzadas. La demostración propiamente dicha involucra en teorema de Stokes y es algo técnica por el papel que desempeñada la propiedad de que el domino es simplemente conexo.

EJEMPLO 6 Determinación de una función potencial Pruebe que:

$$\mathbf{F} = \langle 2xy + y^3, x^2 + 3xy^2 + 2y \rangle$$

es conservativo y halle una función potencial.

Solución En primer lugar, observe que las derivadas parciales cruzadas son iguales:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + y^3) \qquad = 2x + 3y^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy^2 + 2y) = 2x + 3y^2$$

Además, $\mathbf{F}$ está def nido sobre todo $\mathbb{R}^2$, que es un domino simplemente conexo. Por tanto, por el teorema 4, existe una función potencial.

Ahora la función potencial V cumple:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_1(x, y) = 2xy + y^3$$

Esto indica que V es una primitiva de $F_1(x, y)$, entendida como función de x únicamente:

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int F_1(x, y)\, dx = \\ &= \int (2xy + y^3)\, dx = \\ &= x^2y + xy^3 + g(y) \end{aligned}$$

Observe que para obtener la primitiva general de $F_1(x, y)$ respecto a x, se debe sumar una función arbitraria $g(y)$ que dependa únicamente de y, en lugar de la constante habitual de integración. Análogamente, se tiene:

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int F_2(x, y)\, dy = \\ &= \int (x^2 + 3xy^2 + 2y)\, dy = \\ &= x^2y + xy^3 + y^2 + h(x) \end{aligned}$$

Las dos expresiones para $V(x, y)$ deben ser la misma:

$$x^2y + xy^3 + g(y) = x^2y + xy^3 + y^2 + h(x)$$

Así, $g(y) = y^2$ y $h(x) = 0$, salvo por una suma de una constante arbitraria numérica C. De esta manera se obtiene la función potencial general

$$V(x, y) = x^2y + xy^3 + y^2 + C$$

El mismo método funciona para campos vectoriales en el espacio tridimensional.

EJEMPLO 7 Halle una función potencial para:

$$\mathbf{F} = \left\langle 2xyz^{-1}, z + x^2z^{-1}, y - x^2yz^{-2} \right\rangle$$

Solución Si existiera una función potencial V, ésta cumpliría:

$$V(x,y,z) = \int 2xyz^{-1}\,dx \qquad = x^2yz^{-1} + f(y,z)$$
$$V(x,y,z) = \int (z + x^2z^{-1})\,dy \quad = zy + x^2z^{-1}y + g(x,z)$$
$$V(x,y,z) = \int (y - x^2yz^{-2})\,dz = yz + x^2yz^{-1} + h(x,y)$$

Estas tres maneras de expresar $V(x,y,z)$ deben ser iguales:

$$x^2yz^{-1} + f(y,z) = zy + x^2z^{-1}y + g(x,z) = yz + x^2yz^{-1} + h(x,y)$$

En el ejemplo 7, $\mathbf{F}$ sólo está definida para $z \neq 0$, por lo que el dominio está formado por dos mitades: $z > 0$ y $z < 0$. Se pueden escoger diferentes constantes C sobre las dos mitades si así se desea.

Estas igualdades son ciertas si $f(y,z) = yz$, $g(x,z) = 0$ y $h(x,y) = 0$. Por tanto, $\mathbf{F}$ es conservativo y, para cualquier constante C, una función potencial es:

$$V(x,y,z) = x^2yz^{-1} + yz + C$$

Las hipótesis son importantes No se puede esperar que el método para hallar la función potencial funcione, si $\mathbf{F}$ no cumple la condición de las parciales cruzadas (pues, en tal caso, no existe función potencial). ¿Qué es lo que no funciona? Considere $\mathbf{F} = \langle y, 0 \rangle$. Si se intentara hallar una función potencial, se calcularía

$$V(x,y) = \int y\,dx = xy + g(y)$$
$$V(x,y) = \int 0\,dy = 0 + h(x)$$

Sin embargo, no hay ninguna elección de $g(y)$ y de $h(x)$ para las que $xy + g(y) = h(x)$. Si existiera, se podría derivar esta ecuación dos veces, una respecto a x y una respecto a y. Esto conduciría a $1 = 0$, lo que es una contradicción. El método falla en este caso porque $\mathbf{F}$ no cumple la condición de las parciales cruzadas y, por tanto, no es conservativo.

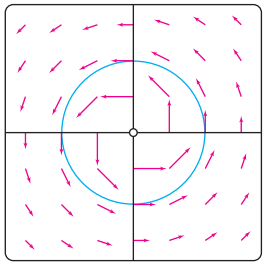


FIGURA 12 El campo de vorticidad.

El campo de vorticidad ¿Por qué razón se supone en el teorema 4 que el domino es simplemente conexo? Se trata de una pregunta interesante que se puede responder examinando el campo vectorial de vorticidad (f gura 12):

$$\mathbf{F} = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$$

EJEMPLO 8 Pruebe que el campo de vorticidad cumple la condición de las parciales cruzadas pero que no es conservativo. ¿Contradice esto el teorema 4?

Solución Se puede comprobar la condición de las parciales cruzadas directamente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(\partial/\partial x)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)}\right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(\partial/\partial y)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ahora considere la integral de línea de $\mathbf{F}$ alrededor de la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$:

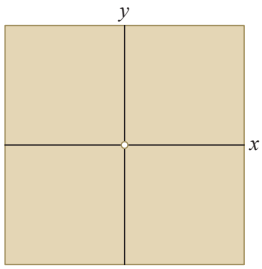


FIGURA 13 El dominio $\mathcal{D}$ de la vorticidad $\mathbf{F}$ es el plano sin el origen. Este dominio no es simplemente conexo.

$$F(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t \rangle \cdot \langle -\operatorname{sen} t, \cos t \rangle = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0 \qquad \boxed{3}$$

Si $\mathbf{F}$ fuera conservativo, por el teorema 1, su circulación sobre cualquier curva cerrada sería cero. Por tanto, $\mathbf{F}$ no puede ser conservativo, aunque cumpla la condición de las parciales cruzadas.

Este resultado no entra en contradicción con el teorema 4 porque el domino de $\mathbf{F}$ no es simplemente conexo. Como $\mathbf{F}$ no está def nido en $(x, y) = (0, 0)$, su dominio es $\mathcal{D} = \{(x, y) : (x, y) \neq (0, 0)\}$ y y este dominio no es simplemente conexo (f gura 13). ■

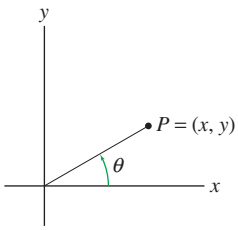


FIGURA 14 La función potencial $V(x, y)$ alcanza el valor θ en (x, y).

UN APUNTE CONCEPTUAL Aunque el campo de vorticidad $\mathbf{F}$ no es conservativo sobre su dominio, sí que es conservativo sobre cualquier dominio menor, simplemente conexo como, por ejemplo, el semiplano $\{(x, y) : y > 0\}$. En realidad, se puede demostrar (vea la nota al margen) que $\mathbf{F} = \nabla V$, donde:

$$V(x, y) = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Entonces, por def nición, el potencial $V(x, y)$ en cualquier punto (x, y) es el ángulo θ del punto en coordenadas polares (f gura 14). La integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ es igual al cambio en potencial θ a lo largo de la trayectoria [f guras 15(A) y (B)]:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \theta_2 - \theta_1 = \text{el cambio en ángulo } \theta \text{ a lo largo de } \mathbf{c}$$

Se puede ver ahora lo que impide a $\mathbf{F}$ ser conservativo sobre todo su dominio. El ángulo θ está def nido salvo múltiplos enteros de 2π. El ángulo a lo largo de una trayectoria que recorre todo el camino en torno al origen no retorna a su valor original sino que se incrementa en 2π. Esto explica por qué la integral de línea sobre la circunferencia unitaria (ec. 3) es 2π y no 0. Y también muestra que $V(x, y) = \theta$ no se puede def nir como una función continua sobre el dominio completo $\mathcal{D}$. Sin embargo, θ es continuo sobre cualquier dominio que no incluya al origen y, sobre esos dominios, se tiene que $\mathbf{F} = \nabla\theta$.

En general, si una trayectoria cerrada $\mathbf{c}$ se enrosca alrededor del origen n veces (siendo n negativo si la curva se enrosca en la dirección de las agujas del reloj), entonces [f guras 15(C) y (D)]:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi n$$

El número n se denomina *índice* de la trayectoria. Desempeña un papel importante en la disciplina matemática denominada topología.

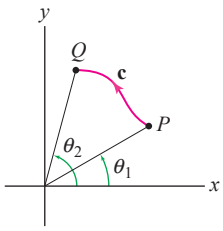
Usando la regla de la cadena y la fórmula:

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} t = \frac{1}{1 + t^2}$$

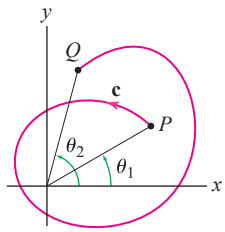
se puede comprobar que $\mathbf{F} = \nabla V$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

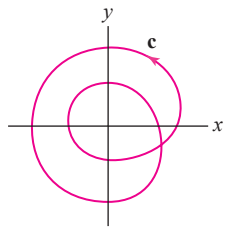
$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$



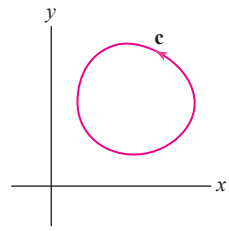
(A) $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \theta_2 - \theta_1$



(B) $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \theta_2 - \theta_1 + 2\pi$



(C) $\mathbf{c}$ pasa alrededor del origen dos veces: $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi$.



(D) $\mathbf{c}$ no pasa alrededor del origen: $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

FIGURA 15 La integral de línea del campo de vorticidad $\mathbf{F} = \nabla\theta$ es igual al cambio en θ a lo largo de la trayectoria.

17.3 RESUMEN

- Un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre un dominio $\mathcal{D}$ es conservativo si existe una función V tal que $\nabla V = \mathbf{F}$ sobre $\mathcal{D}$. La función V se denomina una *función potencial* de $\mathbf{F}$.
- Un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre un dominio $\mathcal{D}$ se denomina *independiente respecto a la trayectoria* si dados dos puntos cualesquiera $P, Q \in \mathcal{D}$, se tiene:

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

para cualesquiera dos trayectorias $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ en $\mathcal{D}$ de P a Q.

- El *teorema fundamental para campos vectoriales conservativos*: si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V(Q) - V(P)$$

para cualquier $\mathbf{c}$ de P a Q en el dominio de $\mathbf{F}$. Esto demuestra que los campos vectoriales conservativos son independientes respecto a la trayectoria. En particular, si $\mathbf{c}$ es una *trayectoria cerrada* ($P = Q$), entonces:

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- El recíproco también es cierto: sobre un dominio abierto y conexo, un campo vectorial independiente respecto a la trayectoria es conservativo.
- Los campos vectoriales conservativos cumplen la condición de las parciales cruzadas

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \tag{4}$$

- La igualdad de las parciales cruzadas garantiza que $\mathbf{F}$ es conservativo si el dominio $\mathcal{D}$ es simplemente conexo, es decir cualquier bucle en $\mathcal{D}$ se puede conducir hacia un punto en $\mathcal{D}$.

17.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. El siguiente enunciado es falso. *Si* $\mathbf{F}$ *es un campo vectorial gradiente, entonces la integral de línea de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de cualquier curva es cero.* Se debe añadir una palabra para que sea cierto. ¿Cuál es?

2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para cualquier campo vectorial y cuáles lo son únicamente para campos vectoriales conservativos?

(a) La integral de línea a lo largo de una trayectoria de P a Q no depende de la trayectoria que se elija.

(b) La integral de línea sobre una curva orientada $\mathcal{C}$ no depende de cómo se ha parametrizado $\mathcal{C}$.

(c) La integral de línea sobre una curva cerrada es cero.

(d) La integral de línea cambia de signo si se invierte la orientación.

(e) La integral de línea es igual a la diferencia de una función potencial evaluada en los dos extremos.

(f) La integral de línea es igual a la integral de la componente tangencial a lo largo de la curva.

(g) Las parciales cruzadas de las componentes son iguales.

3. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial sobre un dominio abierto y arcoconexo $\mathcal{D}$. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son siempre ciertos y cuáles son ciertos bajo hipótesis adicionales sobre $\mathcal{D}$?

(a) Si $\mathbf{F}$ tiene una función potencial, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo

(b) Si $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces las parciales cruzadas de $\mathbf{F}$ son iguales.

(c) Si las parciales cruzadas de $\mathbf{F}$ son iguales, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

4. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ las curvas orientadas de la f gura 16 y sea $\mathbf{F} = \nabla V$ un campo vectorial gradiente tal que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4$. ¿Cuáles son los valores de las siguientes integrales?

(a) $\int_{\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ **(b)** $\int_{\mathcal{E}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

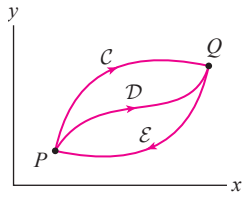


FIGURA 16

Problemas

1. Sea $V(x,y,z) = xy\,\text{sen}(yz)$ y $\mathbf{F} = \nabla V$. Evalúe $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}$ es cualquier trayectoria de $(0,0,0)$ a $(1,1,\pi)$.

2. Sea $\mathbf{F} = \langle x^{-1}z, y^{-1}z, \log(xy)\rangle$.

(a) Compruebe que $\mathbf{F} = \nabla V$, donde $V(x,y,z) = z\ln(xy)$.

(b) Evalúe $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = \langle e^t, e^{2t}, t^2\rangle$ para $1 \le t \le 3$.

(c) Evalúe $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para cualquier trayectoria $\mathbf{c}$ de $P = (\frac{1}{2}, 4, 2)$ a $Q = (2,2,3)$ contenida en la región $x > 0$, $y > 0$.

(d) ¿Por qué es necesario especif car que la trayectoria se encuentra en la región en las que x e y son positivas?

En los problemas 3-6, compruebe que $\mathbf{F} = \nabla V$ *y evalúe la integral de línea de* $\mathbf{F}$ *sobre la trayectoria dada.*

3. $\mathbf{F} = \langle 3, 6y\rangle$, $V(x,y,z) = 3x + 3y^2$; $\mathbf{c}(t) = (t, 2t^{-1})$ para $1 \le t \le 4$

4. $\mathbf{F} = \langle \cos y, -x\,\text{sen}\,y\rangle$, $V(x,y) = x\cos y$; mitad superior de la circunferencia unitaria centrada en el origen, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

5. $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xye^z\mathbf{k}$, $V(x,y,z) = xye^z$; $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3, t-1)$ para $1 \le t \le 2$

6. $\mathbf{F} = \frac{z}{x}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \ln x\mathbf{k}$, $V(x,y,z) = y + z\ln x$; circunferencia $(x-4)^2 + y^2 = 1$, orientada en el sentido de las agujas del reloj.

En los problemas 7-16, halle una función potencial para $\mathbf{F}$ *o establezca que* $\mathbf{F}$ *no es conservativo.*

7. $\mathbf{F} = \langle z, 1, x\rangle$

8. $\mathbf{F} = x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$

9. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^z)\mathbf{j} + ye^z\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F} = \langle y, x, z^3\rangle$

11. $\mathbf{F} = \langle \cos(xz), \text{sen}(yz), xy\,\text{sen}\,z\rangle$

12. $\mathbf{F} = \langle \cos z, 2y, -x\,\text{sen}\,z\rangle$

13. $\mathbf{F} = \langle z\sec^2 x, z, y + \tan x\rangle$

14. $\mathbf{F} = \langle e^x(z+1), -\cos y, e^x\rangle$

15. $\mathbf{F} = \langle 2xy + 5, x^2 - 4z, -4y\rangle$

16. $\mathbf{F} = \langle yze^{xy}, xze^{xy} - z, e^{xy} - y\rangle$

17. Evalúe:

$$\int_{\mathbf{c}} 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$$

sobre la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, \text{sen}(\pi t/4), e^{t^2-2t})$ para $0 \le t \le 2$.

18. Evalúe:

$$\oint_{\mathcal{C}} \text{sen}\,x\,dx + z\cos y\,dy + \text{sen}\,y\,dz$$

donde $\mathcal{C}$ es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, orientada en el sentido de las agujas del reloj.

19. En la f gura 17 se muestra un campo vectorial $\mathbf{F}$ y las líneas de contorno de una función potencial para $\mathbf{F}$. Calcule el valor común de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para las curvas que se muestran en la f gura 17 orientadas en la dirección que va de P a Q.

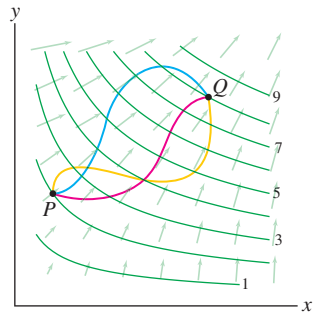


FIGURA 17

20. Proporcione una razón por la que el campo vectorial $\mathbf{F}$ de la f gura 18 no es conservativo.

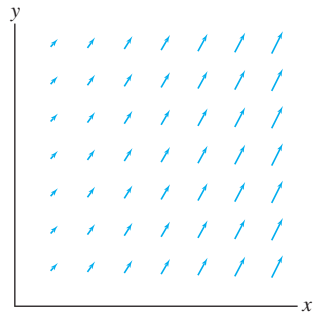


FIGURA 18

21. Calcule el trabajo realizado cuando una partícula se mueve de O a Q a lo largo de los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{PQ}$ de la f gura 19 bajo la presencia del campo de fuerza $\mathbf{F} = \langle x^2, y^2\rangle$. ¿Cuánto trabajo se emplea en el movimiento por el circuito completo formado por el cuadrado?

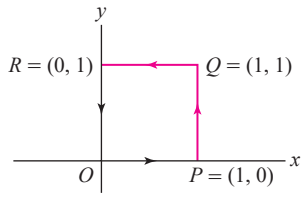


FIGURA 19

22. Sea $\mathbf{F} = \left\langle \frac{1}{x}, \frac{-1}{y} \right\rangle$. Calcule el trabajo contra F necesario para mover un objeto de $(1,1)$ a $(3,4)$ a lo largo de cualquier trayectoria en el primer cuadrante.

23. Calcule el trabajo W contra el campo terrestre gravitatorio necesario para mover un satélite de masa $m = 1000$ kg a lo largo de cualquier trayectoria desde una órbita de altitud 4000 km a una órbita de altitud 6000 km.

24. Un dipolo eléctrico con momento dipolar $p = 4 \times 10^{-5}$ C-m crea un campo eléctrico (en newtons por culombio):

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{kp}{r^5}\langle 3xz, 3yz, 2z^2 - x^2 - y^2\rangle$$

donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ con la distancia expresada en metros y $k = 8{,}99 \times 10^9$ N-m^2/C^2. Calcule el trabajo contra $\mathbf{F}$ necesario para mover una partícula de carga $q = 0{,}01$ C de $(1, -5, 0)$ a $(3, 4, 4)$. *Nota:* la fuerza sobre q es $q\mathbf{F}$ newtons.

25. Sobre la superf cie de la Tierra, el campo gravitatorio terrestre (con z como coordenada vertical, medida en metros) es $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -g\rangle$.

(a) Halle una función potencial para $\mathbf{F}$.

(b) Desde el reposo, una bola de masa $m = 2$ kg se mueve bajo la inf uencia de la gravedad (sin fricción) sobre una trayectoria de $P = = (3, 2, 400)$ a $Q = (-21, 40, 50)$. Halle la velocidad de la bola cuando llega a Q.

26. Un electrón, que inicialmente está en reposo en $P = (1, 1, 1)$, se mueve a lo largo de una trayectoria que f naliza en $Q = (5, 3, 7)$ bajo la inf uencia de un campo eléctrico (en newtons por culombio):

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 400(x^2 + z^2)^{-1}\langle x, 0, z\rangle$$

(a) Halle una función potencial para $\mathbf{F}$.

(b) ¿Cuál es la velocidad del electrón en Q? Use el principio de la conservación de la energía y el valor $q_e/m_e = -1{,}76 \times 10^{11}$ C/kg, donde q_e y m_e son la carga y la masa del electrón, respectivamente.

27. Sea $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$ el campo de vorticidad. Determine $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para cada una de las trayectorias de la f gura 20.

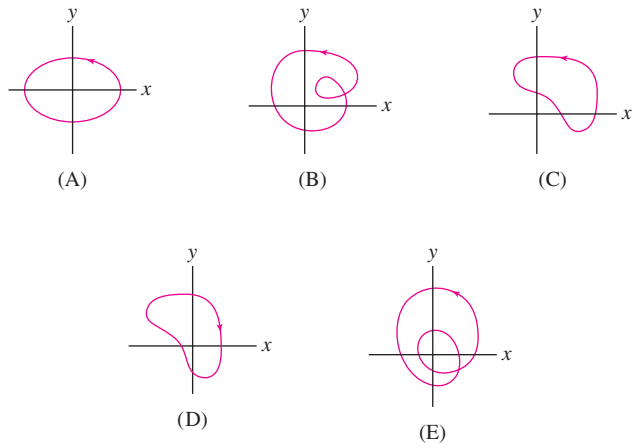


FIGURA 20

28. El campo vectorial $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right\rangle$ está def nido sobre el dominio $\mathcal{D} = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$.

(a) ¿Es $\mathcal{D}$ simplemente conexo?

(b) Pruebe que $\mathbf{F}$ cumple la condición de las parciales cruzadas. ¿Garantiza esto que $\mathbf{F}$ es conservativo?

(c) Pruebe que $\mathbf{F}$ es conservativo sobre $\mathcal{D}$ hallando una función potencial.

(d) ¿Contradicen estos resultados el teorema 4?

Problemas avanzados

29. Suponga que $\mathbf{F}$ está def nido sobre $\mathbb{R}^3$ y que $\displaystyle\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para toda trayectoria cerrada $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre:

(a) $\mathbf{F}$ es independiente respecto a la trayectoria; es decir dadas dos trayectorias cualesquiera $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ en $\mathcal{D}$ con los mismos puntos inicial y f nal, se cumple:

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

(b) $\mathbf{F}$ es conservativo.

17.4 Superficies parametrizadas e integrales de superficie

La idea básica de la integral f gura en diversos conceptos. Hasta ahora, se han def nido las integrales simples, dobles, triples y, en el apartado anterior, las integrales de línea sobre curvas. Ahora se considera un último tipo de integral: las integrales sobre superf cies. En esta sección se tratarán las integrales de superf cie escalares y en la siguiente las integrales de superf cie vectoriales.

Al igual que las curvas parametrizadas son un ingrediente clave en el estudio de las integrales de línea, las integrales de superf cie requieren de la noción de **superf cie parametrizada**, esto es una superf cie $\mathcal{S}$ cuyos puntos son descritos de la forma:

$$G(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Las variables u, v (llamadas parámetros) varían sobre una región $\mathcal{D}$ llamado el **dominio de los parámetros**. Se necesitan dos parámetros u y v para parametrizar una superf cie dado que ésta es bidimensional.

La f gura 1 muestra una representación de la superf cie $\mathcal{S}$ con la parametrización:

$$G(u, v) = (u + v, u^3 - v, v^3 - u)$$

Esta superf cie está formada por todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tales que:

$$x = u + v \qquad y = u^3 - v \qquad z = v^3 - u$$

para (u, v) en $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

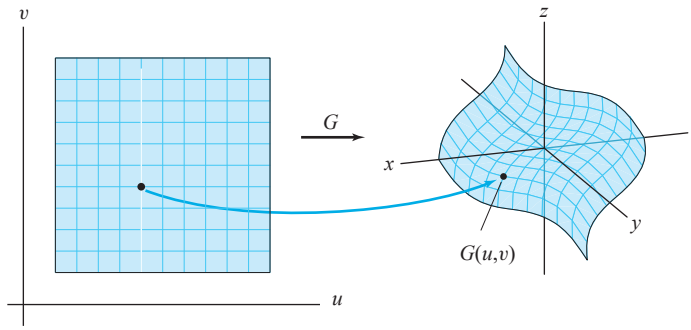


FIGURA 1 La superf cie paramétrica $G(u, v) = (u + v, u^3 - v, v^3 - u)$.

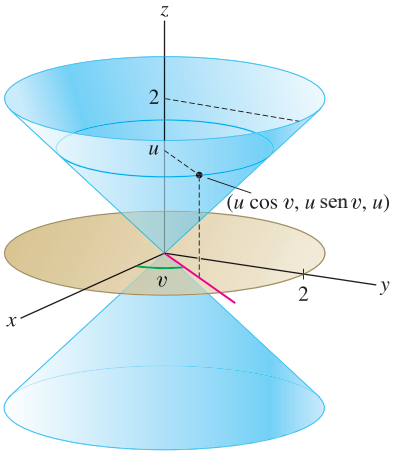


FIGURA 2 El cono $x^2 + y^2 = z^2$.

EJEMPLO 1 Parametrización de un cono Halle una parametrización de la porción $\mathcal{S}$ del cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra por encima, o por debajo, del disco $x^2 + y^2 \leq 4$. Especif que el dominio $\mathcal{D}$ de la parametrización.

Solución Esta superf cie $x^2 + y^2 = z^2$ es un cono cuya sección horizontal transversal a altura $z = u$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = u^2$ de radio u (f gura 2). Por tanto, las coordenadas de un punto sobre el cono a altura u son $(u \cos v, u \operatorname{sen} v, u)$ para algún ángulo v. Así, la parametrización del cono es:

$$G(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u)$$

Como estamos interesados en la porción del cono en que $x^2 + y^2 = u^2 \leq 4$, la variable altura u cumple $-2 \leq u \leq 2$. La variable angular v varía en el intervalo $[0, 2\pi)$ y, por tanto, el dominio de la parametrización es $\mathcal{D} = [-2, 2] \times [0, 2\pi)$. ■

En los cálculos suelen aparecer tres tipos de parametrizaciones estándar. En primer lugar, el **cilindro de radio** R de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ se parametriza convenientemente en coordenadas cilíndricas (f gura 3). Los puntos sobre el cilindro tienen coordenadas cilíndricas (R, θ, z), por lo que se usa θ y z como parámetros (con R f jado).

Si fuera necesario, revise las coordenadas cilíndricas y esféricas en la sección 13.7. Se suelen utilizar en los cálculos relacionados con superficies.

Parametrización de un cilindro:

$$G(\theta, z) = (R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta, z) \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

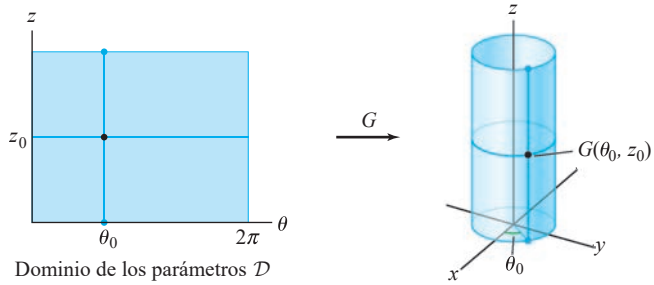


FIGURA 3 La parametrización de un cilindro mediante coordenadas cilíndricas consigue envolver el rectángulo alrededor del cilindro.

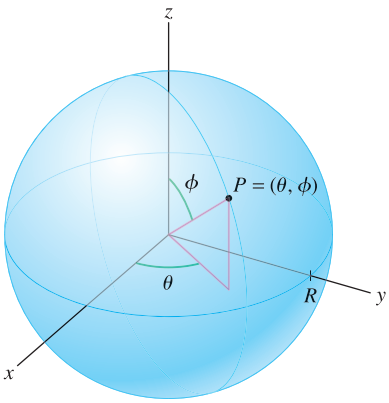


FIGURA 4 Coordenadas esféricas sobre una esfera de radio R.

La esfera de radio R con centro en el origen se parametriza convenientemente usando coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) con $\rho = R$ (f gura 4).

Parametrización de una esfera:

$$G(\theta, \phi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\phi) \quad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \pi$$

Los polos norte y sur corresponden a $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ para cualquier valor de θ (la aplicación G deja de ser inyectiva en los polos):

$$\text{Polo norte: } G(\theta, 0) = (0, 0, R) \qquad \text{Polo sur: } G(\theta, \pi) = (0, 0, -R)$$

Tal y como se muestra en la f gura 5, G aplica cada segmento horizontal $\phi = c\ (0 < c < \pi)$ en una latitud (una circunferencia paralela al ecuador) y cada segmento vertical $\theta = c$ a un arco longitudinal desde el polo norte al polo sur.

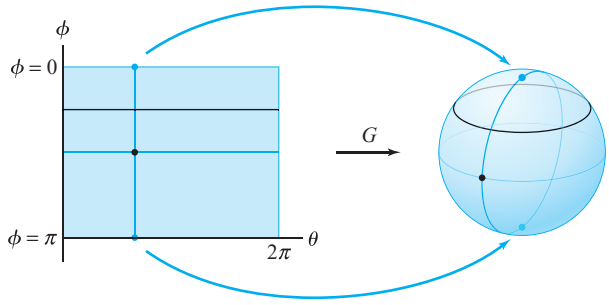


FIGURA 5 La parametrización mediante coordenadas esféricas consigue envolver el rectángulo alrededor de la esfera. Los bordes de la parte superior e inferior del rectángulo se contraen sobre los polos norte y sur respectivamente.

Por último, la **gráf ca de una función** $z = f(x, y)$ siempre admite la siguiente parametrización simple (f gura 6).

Parametrización de una gráfica:

$$G(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

En este caso, los parámetros son x e y.

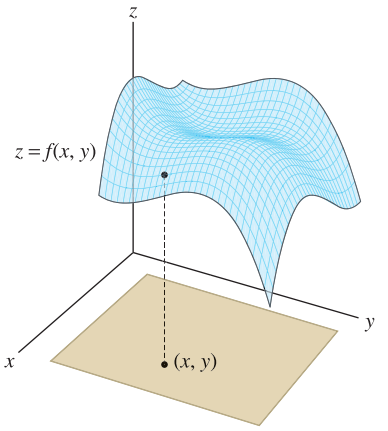


FIGURA 6

Curvas de cuadrícula, vectores normales y el plano tangente

Suponga que una superf cie $\mathcal{S}$ admite la parametrización:

$$G(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

que es inyectiva sobre un dominio $\mathcal{D}$. Siempre se puede asumir que G es **diferenciable con continuidad**, con el signif cado que las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas.

En el plano uv, se puede formar una cuadrícula de líneas paralelas a los ejes de coordenadas. Estas líneas de cuadrícula corresponden, bajo G a un sistema de **curvas de cuadrícula** sobre la superf cie (f gura 7). Concretamente, las rectas horizontales y verticales que pasan por (u_0, v_0) en el dominio corresponden a las curvas de cuadrícula $G(u, v_0)$ y $G(u_0, v)$ que se cortan en el punto $P = G(u_0, v_0)$.

En esencia, una parametrización etiqueta todo punto P sobre $\mathcal{S}$ mediante un único par (u_0, v_0) en el dominio de parámetros. Se puede pensar en (u_0, v_0) como en las "coordenadas" de P determinadas por la parametrización. En ocasiones se llaman ***coordenadas curvilíneas****.*

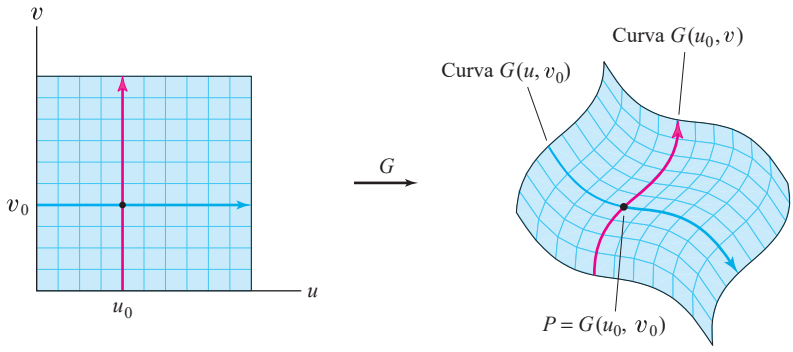


FIGURA 7 Curvas de cuadrícula.

Considere ahora los vectores tangentes a estas curvas de cuadrícula (f gura 8):

$$\text{Para } G(u, v_0): \quad \mathbf{T}_u(P) = \frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right\rangle$$

$$\text{Para } G(u_0, v): \quad \mathbf{T}_v(P) = \frac{\partial G}{\partial v}(u_0, v_0) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right\rangle$$

La parametrización G se denomina **regular** en P si el siguiente producto vectorial es diferente de cero:

$$\mathbf{n}(P) = \mathbf{n}(u_0, v_0) = \mathbf{T}_u(P) \times \mathbf{T}_v(P)$$

En tal caso, $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ generan el plano tangente a $\mathcal{S}$ en P y $\mathbf{n}(P)$ es un **vector normal** al plano tangente. Se dice que $\mathbf{n}(P)$ es una normal a la superf cie $\mathcal{S}$.

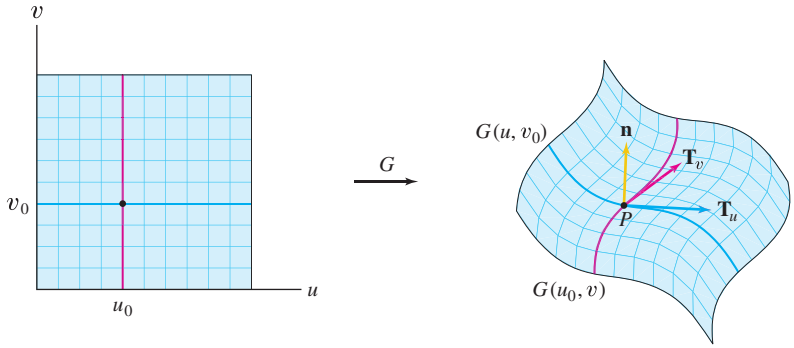


FIGURA 8 Los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son tangentes a las curvas de cuadrícula que pasan por $P = G(u_0, v_0)$.

En cada punto de la superficie, el vector normal apunta en uno de dos sentidos opuestos. Si se cambia la parametrización, la longitud de **n** *puede cambiar y su sentido ser el contrario.*

Se suele escribir $\mathbf{n}$ en lugar de $\mathbf{n}(P)$ o $\mathbf{n}(u, v)$, pero se sobreentiende que el vector $\mathbf{n}$ varía de punto a punto de la superf cie. Análogamente se suelen denotar los vectores tangentes como $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$. Observe que $\mathbf{T}_u$, $\mathbf{T}_v$ y $\mathbf{n}$ no tienen por qué ser vectores unitarios (por tanto, la notación aquí dif ere de la de las secciones 14.4, 14.5 y 17.2, en que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{n}$ denotaban vectores unitarios).

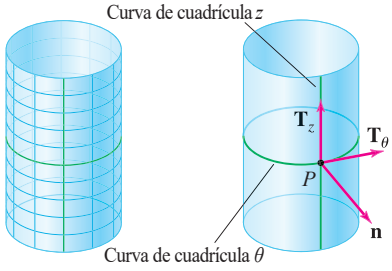


FIGURA 9 Curvas de cuadrícula sobre el cilindro.

EJEMPLO 2 Considere la parametrización $G(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z)$ del cilindro $x^2 + y^2 = 4$:

(a) Describa las curvas de cuadrícula. **(b)** Calcule $\mathbf{T}_\theta$, $\mathbf{T}_z$ y $\mathbf{n}(\theta, z)$.

(c) Halle una ecuación del plano tangente en $P = G(\frac{\pi}{4}, 5)$.

Solución

(a) Las curvas de cuadrícula sobre el cilindro que pasan por $P = (\theta_0, z_0)$ son (f gura 9)

curva de cuadrícula θ: $G(\theta, z_0) = (2\cos\theta, 2\,\text{sen}\,\theta, z_0)$ (circunferencia de radio 2 a la altura $z = z_0$)

curva de cuadrícula z: $G(\theta_0, z) = (2\cos\theta_0, 2\,\text{sen}\,\theta_0, z)$ (recta vertical que pasa por P con $\theta = \theta_0$)

(b) Las derivadas parciales de $G(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z)$ proporcionan los vectores tangentes en P:

$$\text{curva de cuadrícula } \theta\text{:} \quad \mathbf{T}_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z) = \langle -2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0\rangle$$

$$\text{curva de cuadrícula } z\text{:} \quad \mathbf{T}_z = \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z) = \langle 0, 0, 1\rangle$$

En la f gura 9 observe que $\mathbf{T}_\theta$ es tangente a la curva de cuadrícula θ y que $\mathbf{T}_z$ es tangente a la curva de cuadrícula z. El vector normal es:

$$\mathbf{n}(\theta, z) = \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\operatorname{sen}\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

El coef ciente de **k** es cero, por lo que **n** apunta directamente hacia fuera del cilindro.

RECORDATORIO *Una ecuación del plano de vector normal* **n** *que pasa por* $P = (x_0, y_0, z_0)$ *es:*

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle \cdot \mathbf{n} = 0$$

(c) Para $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = 5$,

$$P = G\left(\frac{\pi}{4}, 5\right) = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}, 5\rangle \qquad \mathbf{n} = \mathbf{n}\left(\frac{\pi}{4}, 5\right) = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\rangle$$

El plano tangente por P tiene vector normal **n** y, por tanto, ecuación:

$$\langle x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}, z - 5\rangle \cdot \langle \sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\rangle = 0$$

Esto se puede expresar como:

$$\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 0 \qquad \text{o} \qquad x + y = 2\sqrt{2}$$

El plano tangente es vertical (pues z no aparece en la ecuación). ■

■ **EJEMPLO 3** SAC **Superficie helicoidal** Describa la superf cie $\mathcal{S}$ de parametrización

$$G(u, v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, v), \qquad -1 \le u \le 1, \quad 0 \le v < 2\pi$$

(a) Use un programa informático de cálculo simbólico para representar $\mathcal{S}$.

(b) Calcule $\mathbf{n}(u, v)$ en $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{\pi}{2}$.

Solución Para cada valor f jo $u = a$, la curva $G(a, v) = (a\cos v, a\operatorname{sen} v, v)$ es una hélice de radio a. Por tanto, cuando u varía de -1 a 1, $G(u, v)$ describe una familia de hélices de radio u. La superf cie resultante es una "rampa helicoidal."

(a) He aquí una instrucción típica para un programa informático de cálculo simbólico que genera la superf cie helicoidal que se muestra a la derecha de la f gura 10.

```
ParametricPlot3D[{u*Cos[v],u*Sin[v],v},{u,-1,1},{v,0,2Pi}]
```

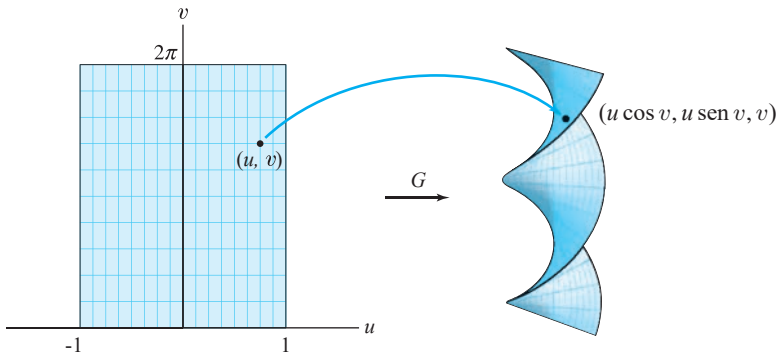


FIGURA 10 Helicoide.

(b) Los vectores tangente y normal son:

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial G}{\partial u} = \langle \cos v, \operatorname{sen} v, 0 \rangle$$

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial G}{\partial v} = \langle -u \operatorname{sen} v, u \cos v, 1 \rangle$$

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\operatorname{sen} v)\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

En $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{\pi}{2}$, se tiene $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$. ■

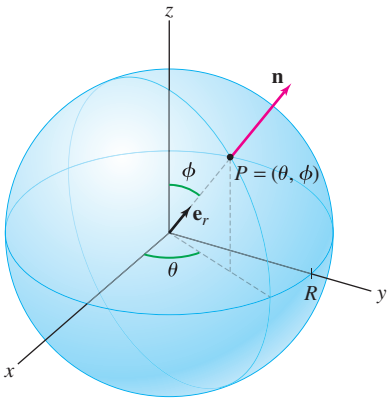


FIGURA 11 El vector normal $\mathbf{n}$ apunta en la dirección radial $\mathbf{e}_r$.

Para futuras consultas, se va a calcular el vector normal que apunte hacia afuera en la parametrización estándar de la esfera de radio R centrada en el origen (figura 11):

$$G(\theta, \phi) = (R \cos\theta \operatorname{sen}\phi, R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\phi)$$

Observe en primer lugar que, como la distancia de $G(\theta, \phi)$ al origen es R, el vector radial *unitario* en $G(\theta, \phi)$ se obtiene dividiendo por R:

$$\mathbf{e}_r = \langle \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi \rangle$$

Además:

$$\mathbf{T}_\theta = \langle -R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0 \rangle$$

$$\mathbf{T}_\phi = \langle R\cos\theta\cos\phi, R\operatorname{sen}\theta\cos\phi, -R\operatorname{sen}\phi \rangle$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & R\cos\theta\operatorname{sen}\phi & 0 \\ R\cos\theta\cos\phi & R\operatorname{sen}\theta\cos\phi & -R\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi\,\mathbf{i} - R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi\,\mathbf{j} - R^2\cos\phi\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{k} =$$

$$= -R^2\operatorname{sen}\phi\,\langle\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\phi\rangle = \quad \boxed{1}$$

$$= -(R^2\operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{e}_r$$

Se trata de un vector normal que apunta hacia el interior. Sin embargo, en la mayoría de los cálculos se suele utilizar el vector normal que apunta hacia afuera:

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta = (R^2\operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{e}_r \qquad \|\mathbf{n}\| = R^2\operatorname{sen}\phi \qquad \boxed{2}$$

Área de una superficie

La longitud $\|\mathbf{n}\|$ del vector normal en una parametrización admite una interpretación importante en términos de área. Suponga, por simplicidad, que $\mathcal{D}$ es un rectángulo (el razonamiento también se puede aplicar a dominios más generales). Divida $\mathcal{D}$ en una cuadrícula de pequeños rectángulos $\mathcal{R}_{ij}$ de tamaño $\Delta u \times \Delta v$, como en la figura 12 y compare el área de $\mathcal{R}_{ij}$ con el área de su imagen bajo G. Esta imagen es un paralelogramo "curvado" $\mathcal{S}_{ij} = G(\mathcal{R}_{ij})$.

En primer lugar, observe que si Δu y Δv en la figura 12 son pequeños, entonces el paralelogramo curvado $\mathcal{S}_{ij}$ tiene aproximadamente la misma área que el paralelogramo "genuino" de lados $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PS}$. Recuerde que el área del paralelogramo generado por dos vectores es la longitud de su producto vectorial , por lo que:

$$\text{Área}(\mathcal{S}_{ij}) \approx \|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}\|$$

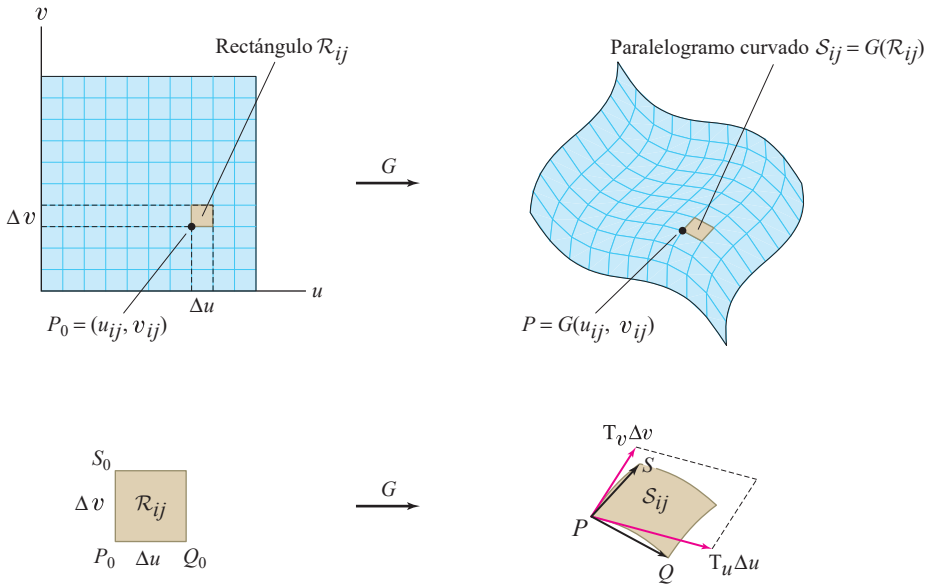


FIGURA 12

RECORDATORIO Por el teorema 3 de la sección 13.4, el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *en* $\mathbb{R}^3$ *es igual a* $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$.

A continuación, se utiliza la aproximación lineal para estimar los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PS}$:

$$\overrightarrow{PQ} = G(u_{ij} + \Delta u, v_{ij}) - G(u_{ij}, v_{ij}) \approx \frac{\partial G}{\partial u}(u_{ij}, v_{ij})\Delta u = \mathbf{T}_u \Delta u$$

$$\overrightarrow{PS} = G(u_{ij}, v_{ij} + \Delta v) - G(u_{ij}, v_{ij}) \approx \frac{\partial G}{\partial v}(u_{ij}, v_{ij})\Delta v = \mathbf{T}_v \Delta v$$

La aproximación (3) es válida para cualquier región pequeña $\mathcal{R}$ *en el plano* uv:

$$\text{Área}\,(\mathcal{S}) \approx \|\mathbf{n}(u_0, v_0))\|\text{Área}\,(\mathcal{R})$$

donde $\mathcal{S} = G(\mathcal{R})$ *y* (u_0, v_0) *es cualquier punto intermedio en* $\mathcal{R}$. *Aquí, "pequeño" significa contenido en un pequeño disco. No se permite que* $\mathcal{R}$ *sea muy estrecho y amplio.*

De esta manera:

$$\text{Área}(\mathcal{S}_{ij})) \approx \|\mathbf{T}_u \Delta u \times \mathbf{T}_v \Delta v\| = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,\Delta u\,\Delta v$$

Como $\mathbf{n}(u_{ij}, v_{ij}) = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ y $\text{Área}(\mathcal{R}_{ij}) = \Delta u \Delta v$, se obtiene

$$\boxed{\text{Área}(\mathcal{S}_{ij}) \approx \|\mathbf{n}(u_{ij}, v_{ij})\|\text{Área}(\mathcal{R}_{ij})} \quad \boxed{3}$$

La conclusión es la siguiente: $\|\mathbf{n}\|$ *es un factor de distorsión que mide la manera en que el área del pequeño rectángulo* $\mathcal{R}_{ij}$ *queda alterada bajo la aplicación* G.

Para calcular el área de la superf cie $\mathcal{S}$, se supondrá que G es inyectiva, excepto posiblemente en la frontera de $\mathcal{D}$. También se supone que G es regular, excepto posiblemente en la frontera de $\mathcal{D}$. Recuerde que"regular" signif ca que $\mathbf{n}(u, v)$ es diferente de cero.

Nota: se exige que G *sea inyectiva únicamente en el interior de* $\mathcal{D}$. *Muchas parametrizaciones habituales (como las parametrizaciones por coordenadas cilíndricas y por coordenadas esféricas) no son inyectivas en las fronteras de sus dominios.*

La superf cie total $\mathcal{S}$ es la unión de pequeños sectores $\mathcal{S}_{ij}$, de manera que se puede aplicar la aproximación en cada sector y obtener:

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = \sum_{i,j} \text{Área}(\mathcal{S}_{ij}) \approx \sum_{i,j} \|\mathbf{n}(u_{ij}, v_{ij})\|\Delta u \Delta v \quad \boxed{4}$$

La suma a la derecha es una suma de Riemann para la doble integral de $\|\mathbf{n}(u, v)\|$ sobre el dominio de parámetros $\mathcal{D}$. Cuando Δu y Δv tienden a cero, estas sumas de Riemann convergen a una integral doble, que se def ne como área de la superf cie:

$$\boxed{\text{Área}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \|\mathbf{n}(u, v)\|\,du\,dv}$$

Integral de superficie

Se puede def nir ahora la integral de superf cie de una función $f(x, y, z)$:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS$$

Es similar a la def nición de la integral de línea de una función sobre una curva. Considere un punto intermedio $P_{ij} = G(u_{ij}, v_{ij})$ en cada pequeño sector $\mathcal{S}_{ij}$ y forme la suma:

$$\sum_{i,j} f(P_{ij})\text{Área}(\mathcal{S}_{ij}) \qquad \boxed{5}$$

El límite de estas sumas cuando Δu y Δv tienden a cero (si existe) es la **integral de superf cie**:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \lim_{\Delta u, \Delta v \to 0} \sum_{i,j} f(P_{ij})\text{Área}(\mathcal{S}_{ij})$$

Para evaluar la integral de superf cie, se utiliza la ec. (3) para expresar:

$$\sum_{i,j} f(P_{ij})\text{Área}(\mathcal{S}_{ij}) \approx \sum_{i,j} f(G(u_{ij}, v_{ij}))\|\mathbf{n}(u_{ij}, v_{ij})\|\, \Delta u\, \Delta v \qquad \boxed{6}$$

A la derecha se tiene una suma de Riemann para la integral doble de:

$$f(G(u, v))\|\mathbf{n}(u, v)\|$$

sobre el dominio de parámetros $\mathcal{D}$. Bajo la hipótesis que G es diferenciable con continuidad, se puede demostrar que estas sumas en ec. (6) tienden al mismo límite. Esto da lugar al siguiente teorema.

TEOREMA 1 Integrales de superficie y área de una superficie Sea $G(u, v)$ una parametrización de una superf cie $\mathcal{S}$ con dominio de parámetros $\mathcal{D}$. Suponga que G es diferenciable con continuidad, inyectiva y regular (excepto posiblemente en la frontera de $\mathcal{D}$). Entonces:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \iint_{\mathcal{D}} f(G(u, v))\|\mathbf{n}(u, v)\|\, du\, dv \qquad \boxed{7}$$

Para $f(x, y, z) = 1$, se obtiene el área de la superf cie $\mathcal{S}$:

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \|\mathbf{n}(u, v)\|\, du\, dv$$

Es interesante hacer notar que la ec. (7) incluye la fórmula del cambio de variables para integrales dobles (teorema 1 de la sección 16.6) como caso particular. Si la superficie $\mathcal{S}$ es un dominio en el plano xy [dicho de otro modo, $z(u, v) = 0$], entonces la integral sobre $\mathcal{S}$ se reduce a la integral de la función $f(x, y, 0)$. Se puede entender $G(u, v)$ como una aplicación del plano uv en el plano xy, y se vería que, en tal caso, $\|\mathbf{n}(u, v)\|$ es el jacobiano de esta aplicación.

La ecuación (7) se resume mediante la expresión simbólica para el "elemento de superf - cie":

$$dS = \|\mathbf{n}(u, v)\|\, du\, dv$$

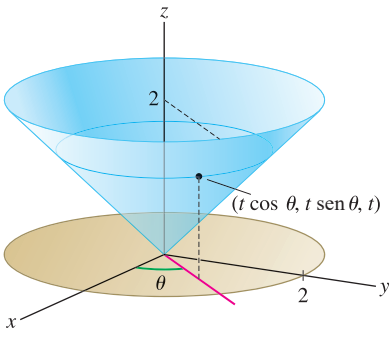


FIGURA 13 Porción $\mathcal{S}$ del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra por encima del disco $x^2 + y^2 \le 4$.

EJEMPLO 4 Calcule el área de la superf cie correspondiente a la porción $\mathcal{S}$ del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que se encuentra por encima del disco $x^2 + y^2 \le 4$ (f gura 13). A continuación calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} x^2 z\, dS$.

Solución En el ejemplo 1 se halló una parametrización del cono. Usando las variables θ y t, esta parametrización es:

$$G(\theta, t) = (t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, t) \qquad 0 \le t \le 2, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

RECORDATORIO *En este ejemplo,*

$$G(\theta, t) = (t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, t)$$

Etapa 1. **Calcule los vectores tangente y normal**

$$\mathbf{T}_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} = \langle -t\,\text{sen}\,\theta, t\cos\theta, 0\rangle \qquad \mathbf{T}_t = \frac{\partial G}{\partial t} = \langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1\rangle$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_t = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -t\,\text{sen}\,\theta & t\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 1 \end{vmatrix} = t\cos\theta\,\mathbf{i} + t\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} - t\mathbf{k}$$

La longitud del vector normal es:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{t^2\cos^2\theta + t^2\,\text{sen}^2\,\theta + (-t)^2} = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2}\,|t|$$

Por tanto, $dS = \sqrt{2}|t|\,d\theta\,dt$. Como $t \geq 0$ sobre nuestro dominio, se elimina el valor absoluto.

Etapa 2. **Calcule el área de la superf cie**

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \|\mathbf{n}\|\,du\,dv = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,t\,d\theta\,dt = \sqrt{2}\pi t^2\Big|_0^2 = 4\sqrt{2}\pi$$

Etapa 3. **Calcule la integral de superf cie**

Exprese $f(x, y, z) = x^2 z$ en términos de los parámetros t y θ y evalúe:

$$f(G(\theta, t)) = f(t\cos\theta, t\,\text{sen}\,\theta, t) = (t\cos\theta)^2 t = t^3\cos^2\theta$$

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\,dS &= \int_{t=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} f(G(\theta, t))\,\|\mathbf{n}(\theta, t)\|\,d\theta\,dt = \\ &= \int_{t=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} (t^3\cos^2\theta)(\sqrt{2}t)\,d\theta\,dt = \\ &= \sqrt{2}\left(\int_0^2 t^4\,dt\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta\right) = \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{32}{5}\right)(\pi) = \frac{32\sqrt{2}\pi}{5}\end{aligned}$$

RECORDATORIO

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\,d\theta = \pi$$

En las discusiones previas de integrales múltiples y de línea, se aplicó el principio de que la integral de una densidad es la cantidad total. Esto también se aplica a las integrales de superf cie. Por ejemplo, una superf cie con una densidad de masa $\rho(x, y, z)$ [en unidades de masa por área] es la integral de superf cie de la densidad de masa

$$\text{Masa de } \mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z)\,dS$$

Análogamente, si una carga eléctrica se distribuye sobre $\mathcal{S}$ con densidad de carga $\rho(x, y, z)$, entonces la integral de superf cie de $\rho(x, y, z)$ es la carga total sobre $\mathcal{S}$.

EJEMPLO 5 Carga total sobre una superficie Halle la carga total (en culombios) sobre una esfera S de radio 5 cm cuya densidad de carga en coordenadas esféricas es $\rho(\theta, \phi) = 0{,}003\cos^2\phi$ C/cm^2.

Solución Parametrice S en coordenadas esféricas:

$$G(\theta, \phi) = (5\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, 5\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, 5\cos\phi)$$

Según la ec. (2), $\|\mathbf{n}\| = 5^2\,\text{sen}\,\phi$ y:

$$\text{Carga total} = \iint_S \rho(\theta, \phi)\,dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \rho(\theta, \phi)\|\mathbf{n}\|\,d\phi\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} (0{,}003 \cos^2 \phi)(25 \operatorname{sen} \phi)\, d\phi\, d\theta =$$

$$= (0{,}075)(2\pi) \int_{\phi=0}^{\pi} \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi\, d\phi =$$

$$= 0{,}15\pi \left(-\frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_0^{\pi} = 0{,}15\pi \left(\frac{2}{3} \right) \approx 0{,}1\pi \text{ C}$$

■

Cuando una gráf ca $z = g(x, y)$ se parametriza por $G(x, y) = (x, y, g(x, y))$, los vectores tangente y normal son:

$$\mathbf{T}_x = (1, 0, g_x) \qquad \mathbf{T}_y = (0, 1, g_y)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & g_x \\ 0 & 1 & g_y \end{vmatrix} = -g_x \mathbf{i} - g_y \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \|\mathbf{n}\| = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} \tag{8}$$

La integral de superf cie sobre la porción de una gráf ca que se encuentra sobre un dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy es:

$$\text{Integral de superf cie sobre una gráf ca} = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy \tag{9}$$

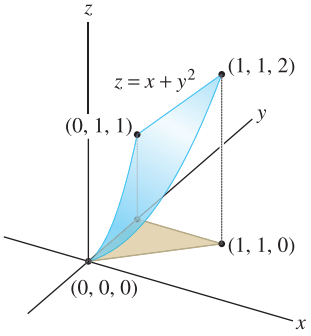


FIGURA 14 La superf cie $z = x + y^2$ sobre $0 \le x \le y \le 1$.

■ **EJEMPLO 6** Calcule $\iint_{\mathcal{S}} (z - x)\, dS$, donde $\mathcal{S}$ es la porción de la gráf ca de $z = x + y^2$ donde $0 \le x \le y$, $0 \le y \le 1$ (f gura 14).

Solución Sea $z = g(x, y) = x + y^2$. Entonces $g_x = 1$, $g_y = 2y$ y:

$$dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dx\, dy = \sqrt{2 + 4y^2}\, dx\, dy$$

Sobre la superf cie $\mathcal{S}$, se tiene que $z = x + y^2$ y, por tanto:

$$f(x, y, z) = z - x = (x + y^2) - x = y^2$$

Según la ec. (9):

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} y^2 \sqrt{2 + 4y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_{y=0}^{1} \left(y^2 \sqrt{2 + 4y^2} \right) x \Big|_{x=0}^{y} dy = \int_0^1 y^3 \sqrt{2 + 4y^2}\, dy$$

Ahora, use la sustitución $u = 2 + 4y^2$, $du = 8y\, dy$. Entonces $y^2 = \frac{1}{4}(u - 2)$ y:

$$\int_0^1 y^3 \sqrt{2 + 4y^2}\, dy = \frac{1}{8} \int_2^6 \frac{1}{4}(u - 2) \sqrt{u}\, du = \frac{1}{32} \int_2^6 (u^{3/2} - 2u^{1/2})\, du =$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} \right) \Big|_2^6 = \frac{1}{30}(6\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 0{,}54$$

■

El matemático francés Pierre Simon, Marqués de Laplace (1749-1827) probó que el potencial gravitatorio cumple la ecuación de Laplace $\Delta V = 0$, *donde* Δ *es el* operador de Laplace*:*

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Esta ecuación desempeña un papel importante en ramas más avanzadas de las matemáticas y de la física.

Visita guiada

Es un resultado importante de la física que el campo gravitatorio $\mathbf{F}$ correspondiente a cualquier disposición de masa es conservativo; es decir, $\mathbf{F} = -\nabla V$ (recuerde que el signo menos es un convenio de la física). El campo en un punto P debido a una masa m situada en un punto Q es $\mathbf{F} = -\dfrac{Gm}{r^2}\mathbf{e}_r$, donde $\mathbf{e}_r$ es el vector unitario que apunta de Q hacia P y r es la distancia de P a Q, que se denotará como $|P - Q|$. Tal y como se vió en el ejemplo 4 de la sección 17.3:

$$V(P) = -\frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{|P - Q|}$$

Si, en lugar de una sola masa, se tienen N masa puntuales $m_1, \ldots, m_N$ situadas en $Q_1, \ldots, Q_N$, entonces el potencial gravitatorio es la suma:

$$V(P) = -G \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|P - Q_i|} \qquad \boxed{10}$$

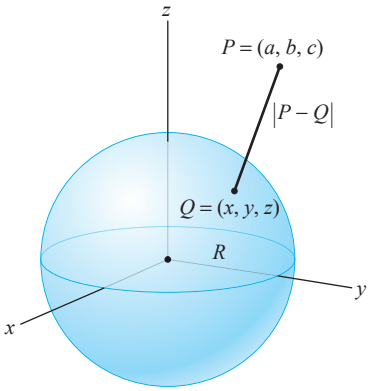


FIGURA 15

Si se distribuye masa de forma continua sobre una superf cie f na $\mathcal{S}$ con función de densidad de masa $\rho(x, y, z)$, se reemplaza la suma por la integral de superf cie:

$$V(P) = -G \iint_{\mathcal{S}} \frac{\rho(x, y, z)\, dS}{|P - Q|} = -G \iint_{\mathcal{S}} \frac{\rho(x, y, z)\, dS}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}} \qquad \boxed{11}$$

donde $P = (a, b, c)$. Sin embargo, esta integral de superf cie no se puede evaluar de forma explícita salvo si la superf cie y la distribución de masa son suf cientemente simétricas, como en el caso de una esfera hueca de densidad de masa uniforme (f gura 15).

TEOREMA 2 Potencial gravitatorio sobre una esfera hueca uniforme El potencial gravitatorio V debido a una esfera hueca de radio R con distribución de masa uniforme de masa total m en un punto P situado a una distancia r del centro de la esfera es:

$$V(P) = \begin{cases} \dfrac{-Gm}{r} & \text{si } r > R \quad (P \text{ fuera de la esfera}) \\ \dfrac{-Gm}{R} & \text{si } r < R \quad (P \text{ dentro de la esfera}) \end{cases} \qquad \boxed{12}$$

Se deja este cálculo como un problema (problema 48), pues se volverá a deducir con mucho menos esfuerzo usando la ley de Gauss en la sección 18.3.

En su obra magna, *Principia Mathematica*, Isaac Newton demostró que una esfera de densidad de masa uniforme (sea hueca o sólida) atrae a una partícula en el exterior de la esfera como si toda la masa estuviera concentrada en el centro. Dicho de otro modo, en lo que respecta a la gravedad, una esfera uniforme se comporta como una masa puntual. Además, si la esfera está vacía, entonces ésta no ejerce ninguna fuerza gravitatoria sobre una partícula que se encuentre dentro de ella. El resultado de Newton se obtiene de la ec. (12). Fuera de la esfera, V tiene la misma fórmula que la del potencial debido a una masa puntual. Dentro de la esfera, el potencial es *constante* de valor $-Gm/R$. Pero potencial constante quiere decir fuerza cero porque la fuerza es el gradiente (negativo) del potencial. Este argumento también se aplica a la fuerza electrostática. En particular, una esfera cargada uniformemente se comporta como una carga puntual (cuando se mira desde fuera de la esfera).

17.4 RESUMEN

• Una *superf cie parametrizada* es una superf cie $\mathcal{S}$ cuyos puntos son descritos de la forma

$$G(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

donde los *parámetros* u y v varían en un dominio $\mathcal{D}$ en el plano uv.

• Vectores tangente y normal:

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial G}{\partial u} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\rangle, \qquad \mathbf{T}_v = \frac{\partial G}{\partial v} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\rangle$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v) = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$$

La parametrización es *regular* en (u, v) si $\mathbf{n}(u, v) \neq \mathbf{0}$.

• La cantidad $\|\mathbf{n}\|$ es un "factor de distorsión del área". Si $\mathcal{D}$ es una pequeña región en el plano uv y $\mathcal{S} = G(\mathcal{D})$, entonces:

$$\text{Área}(\mathcal{S}) \approx \|\mathbf{n}(u_0, v_0)\| \text{Área}(\mathcal{D})$$

donde (u_0, v_0) es cualquier punto intermedio en $\mathcal{D}$.

• Fórmulas:

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \|\mathbf{n}(u, v)\| \, du \, dv$$

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) \, dS = \iint_{\mathcal{D}} f(G(u, v)) \, \|\mathbf{n}(u, v)\| \, du \, dv$$

• Algunas parametrizaciones estándar:

– Cilindro de radio R (eje z como eje central):

$$G(\theta, z) = (R \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta, z)$$

Normal hacia el exterior: $\mathbf{n} = \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_z = R \langle \cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0 \rangle$

$$dS = \|\mathbf{n}\| \, d\theta \, dz = R \, d\theta \, dz$$

– Esfera de radio R, centrada en el origen:

$$G(\theta, \phi) = (R \cos \theta \operatorname{sen} \phi, R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, R \cos \phi)$$

Vector radial unitario: $\mathbf{e}_r = \langle \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi \rangle$

Normal hacia el exterior: $\mathbf{n} = \mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta = (R^2 \operatorname{sen} \phi) \, \mathbf{e}_r$

$$dS = \|\mathbf{n}\| \, d\phi \, d\theta = R^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

– Gráf ca de $z = g(x, y)$:

$$G(x, y) = (x, y, g(x, y))$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = \left\langle -g_x, -g_y, 1 \right\rangle$$

$$dS = \|\mathbf{n}\| \, dx \, dy = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} \, dx \, dy$$

17.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la integral de superf cie de la función $f(x,y,z) = 10$ sobre una superf cie de área total 5?

2. ¿Qué interpretación se puede dar a la longitud $\|\mathbf{n}\|$ del vector normal para una parametrización $G(u,v)$?

3. Una parametrización aplica el rectángulo de tamaño $0{,}01 \times 0{,}02$ en el plano uv en un pequeño sector $\mathcal{S}$ de una superf cie. Estime Área($\mathcal{S}$) si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \langle 1,2,2\rangle$ en un punto intermedio del rectángulo.

4. Se divide una pequeña superf cie $\mathcal{S}$ en tres trozos pequeños, cada uno de ellos de área 0,2. Estime $\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS$ si $f(x,y,z)$ alcanza los valores 0,9, 1 y 1,1 en puntos intermedios de estos tres trozos.

5. Una superf cie $\mathcal{S}$ admite una parametrización cuyo dominio es el cuadrado $0 \le u, v \le 2$ de tal manera que $\|\mathbf{n}(u,v)\| = 5$ para todo (u,v). ¿Cuál es el Área($\mathcal{S}$)?

6. ¿Cuál es el vector normal unitario que apunta en el sentido hacia el exterior de una esfera de radio 3 centrada en el origen, en el punto $P = (2,2,1)$?

Problemas

1. Relacione cada parametrización con la correspondiente superf cie en la f gura 16.

(a) $(u, \cos v, \operatorname{sen} v)$

(b) $(u, u+v, v)$

(c) (u, v^3, v)

(d) $(\cos u \operatorname{sen} v, 3\cos u \operatorname{sen} v, \cos v)$

(e) $(u, u(2+\cos v), u(2+\operatorname{sen} v))$

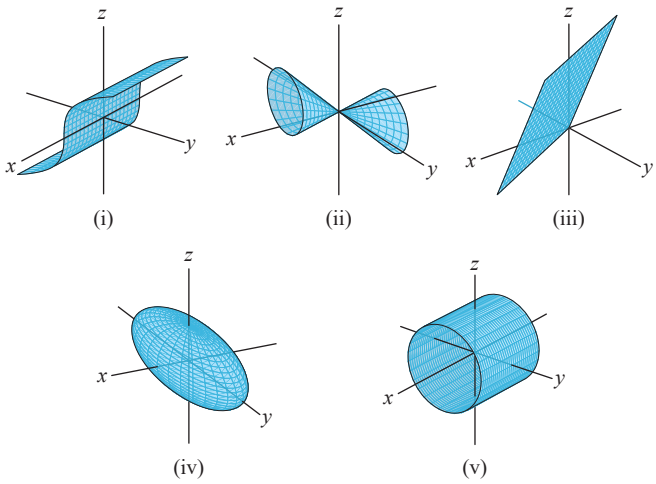


FIGURA 16

2. Pruebe que $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1-r^2)$ parametriza el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. Describa las curvas de cuadrícula de esta parametrización.

3. Pruebe que $G(u,v) = (2u+1, u-v, 3u+v)$ parametriza el plano $2x - y - z = 2$. A continuación:

(a) Calcule $\mathbf{T}_u$, $\mathbf{T}_v$ y $\mathbf{n}(u,v)$.

(b) Halle el área de $\mathcal{S} = G(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D} = \{(u,v) : 0 \le u \le 2, 0 \le v \le 1\}$.

(c) Exprese $f(x,y,z) = yz$ en términos de u y v y evalúe

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS.$$

4. Sea $\mathcal{S} = G(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D} = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le 1, u \ge 0, v \ge 0\}$ y G está def nida como en el problema 3.

(a) Calcule el área de la superf cie $\mathcal{S}$.

(b) Evalúe $\iint_{\mathcal{S}} (x-y)\,dS$. *Indicación:* use coordenadas polares.

5. Sea $G(x,y) = (x,y,xy)$.

(a) Calcule $\mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_y$ y $\mathbf{n}(x,y)$.

(b) Sea S la parte de la superf cie con dominio de parámetros $\mathcal{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$. Compruebe la siguiente fórmula y evalúe usando coordenadas polares:

$$\iint_S 1\,dS = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

(c) Compruebe la siguiente fórmula y evalúe:

$$\iint_S z\,dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\operatorname{sen}\theta\cos\theta) r^3 \sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta$$

6. Una superf cie $\mathcal{S}$ admite una parametrización $G(u,v)$ cuyo dominio $\mathcal{D}$ es el cuadrado de la f gura 17. Suponga que G tiene los siguientes vectores normales:

$$\mathbf{n}(A) = \langle 2,1,0\rangle,\ \mathbf{n}(B) = \langle 1,3,0\rangle$$
$$\mathbf{n}(C) = \langle 3,0,1\rangle,\ \mathbf{n}(D) = \langle 2,0,1\rangle$$

Estime $\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS$, donde f es una función tal que $f(G(u,v)) = u + v$.

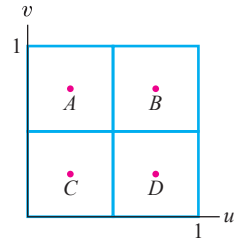


FIGURA 17

En los problemas 7-10, calcule $\mathbf{T}_u$, $\mathbf{T}_v$ *y* $\mathbf{n}(u,v)$ *para la superf cie parametrizada en el punto que se indica. A continuación, halle la ecuación del plano tangente a la superf cie en ese punto.*

7. $G(u,v) = (2u+v, u-4v, 3u)$; $\quad u=1, \quad v=4$

8. $G(u,v) = (u^2-v^2, u+v, u-v)$; $\quad u=2, \quad v=3$

9. $G(\theta,\phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$; $\quad \theta=\frac{\pi}{2}, \quad \phi=\frac{\pi}{4}$

10. $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 1-r^2)$; $\quad r=\frac{1}{2}, \quad \theta=\frac{\pi}{4}$

11. Use el vector normal calculado en el problema 8 para estimar el área del pequeño sector de la superf cie $G(u,v) = (u^2-v^2, u+v, u-v)$ def nido por:

$$2 \le u \le 2{,}1 \qquad 3 \le v \le 3{,}2$$

12. Dibuje el pequeño sector de la esfera cuyas coordenadas esféricas cumplen:

$$\frac{\pi}{2} - 0{,}15 \le \theta \le \frac{\pi}{2} + 0{,}15 \qquad \frac{\pi}{4} - 0{,}1 \le \phi \le \frac{\pi}{4} + 0{,}1$$

Use el vector normal calculado en el problema 9 para estimar su área.

En los problemas 13-26, calcule $\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS$ *para la superf cie y función dadas.*

13. $G(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u)$, $\quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1$; $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$

14. $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, $\quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$; $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

15. $y = 9-z^2$, $\quad 0 \le x \le 3, 0 \le z \le 3$; $\quad f(x,y,z) = z$

16. $y = 9-z^2$, $\quad 0 \le x \le z \le 3$; $\quad f(x,y,z) = 1$

17. $x^2+y^2+z^2 = 1$, $\quad x,y,z \ge 0$; $\quad f(x,y,z) = x^2$.

18. $z = 4-x^2-y^2$, $\quad 0 \le z \le 3$; $\quad f(x,y,z) = x^2/(4-z)$

19. $x^2+y^2 = 4$, $\quad 0 \le z \le 4$; $\quad f(x,y,z) = e^{-z}$

20. $G(u,v) = (u, v^3, u+v)$, $\quad 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$; $f(x,y,z) = y$

21. Porción del plano $x+y+z = 1$, donde $x,y,z \ge 0$; $f(x,y,z) = z$

22. Porción del plano $x+y+z = 0$ contenida en el cilindro $x^2+y^2 = 1$; $f(x,y,z) = z^2$

23. $x^2+y^2+z^2 = 4$, $1 \le z \le 2$; $f(x,y,z) = z^2(x^2+y^2+z^2)^{-1}$

24. $x^2+y^2+z^2 = 4$, $0 \le y \le 1$; $\quad f(x,y,z) = y$

25. Porción de la superf cie $z = x^3$, donde $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$; $f(x,y,z) = z$

26. Porción de la esfera unidad centrada en el origen, donde $x \ge 0$ y $|y| \le x$; $\quad f(x,y,z) = x$

27. Una superf cie $\mathcal{S}$ admite una parametrización dada por $G(u,v)$ con dominio $0 \le u \le 2, 0 \le v \le 4$ y tal que las siguientes derivadas parciales son constantes:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \langle 2,0,1\rangle \qquad \frac{\partial G}{\partial v} = \langle 4,0,3\rangle$$

¿Cuál es el área de la superf cie $\mathcal{S}$?

28. Sea S la esfera de radio R centrada en el origen. Explique, utilizando simetría:

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_S y^2\,dS = \iint_S z^2\,dS$$

A continuación, muestre que $\iint_S x^2\,dS = \frac{4}{3}\pi R^4$ sumando las integrales.

29. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} (xy + e^z)\,dS$, donde $\mathcal{S}$ es el triángulo de la f gura 18 de vértices $(0,0,3)$, $(1,0,2)$ y $(0,4,1)$.

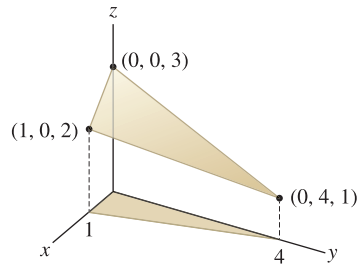


FIGURA 18

30. Use coordenadas esféricas para calcular el área de la superf cie correspondiente a una esfera de radio R.

31. Use coordenadas cilíndricas para calcular el área de la superf cie correspondiente a una esfera de radio R.

32. SAC Sea $\mathcal{S}$ la superf cie de parametrización:

$$G(u,v) = ((3+\operatorname{sen} v)\cos u, (3+\operatorname{sen} v)\operatorname{sen} u, v)$$

para $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$. Usando un programa informático de cálculo simbólico:

(a) Represente $\mathcal{S}$ desde varios puntos de vista. ¿Cómo se describe mejor $\mathcal{S}$: como un "vaso que contiene agua" o como un "vaso sin fondo"?

(b) Calcule el vector normal $\mathbf{n}(u,v)$.

(c) Calcule el área de la superf cie $\mathcal{S}$ con cuatro decimales de precisión.

33. SAC Sea $\mathcal{S}$ la superf cie $z = \ln(5-x^2-y^2)$ para $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Utilizando un programa informático de cálculo simbólico:

(a) Calcule el área de la superf cie $\mathcal{S}$ con cuatro decimales de precisión.

(b) Calcule $\iint_{\mathcal{S}} x^2y^3\,dS$ con cuatro decimales de precisión.

34. Halle el área de la porción del plano $2x+3y+4z = 28$ que se encuentra por encima de $1 \le x \le 3$, $2 \le y \le 5$ en el plano xy.

35. ¿Cuál es el área de la porción del plano $2x + 3y + 4z = 28$ que se encuentra por encima del dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy en la figura 19 si Área$(\mathcal{D}) = 5$?

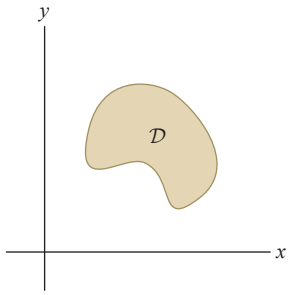


FIGURA 19

36. Halle el área de la superficie formada por la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ comprendida entre los planos $z = 2$ y $z = 5$.

37. Halle el área de la superficie formada por la porción S del cono $z^2 = x^2 + y^2$, donde $z \geq 0$, que se encuentra contenida en $y^2 + z^2 \leq 1$.

38. Calcule la integral de ze^{2x+y} sobre la superficie de la caja de la figura 20.

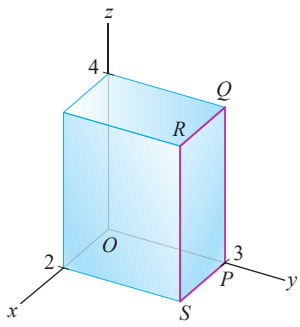


FIGURA 20

39. Calcule $\iint_G x^2 z \, dS$, donde G es el cilindro (incluyendo la tapa y la base) $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$.

40. Sea S la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, donde $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ y $z \geq 0$ (figura 21). Halle una parametrización de S en coordenadas polares y úsela para calcular:

(a) El área de S **(b)** $\iint_S z^{-1} \, dS$

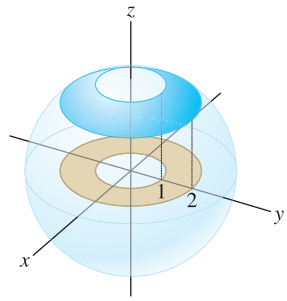


FIGURA 21

41. Demuestre un famoso resultado de Arquímedes: el área de la porción de la esfera de radio R comprendida entre dos planos horizontales $z = a$ y $z = b$ es igual al área de la correspondiente porción del cilindro circunscrito (figura 22).

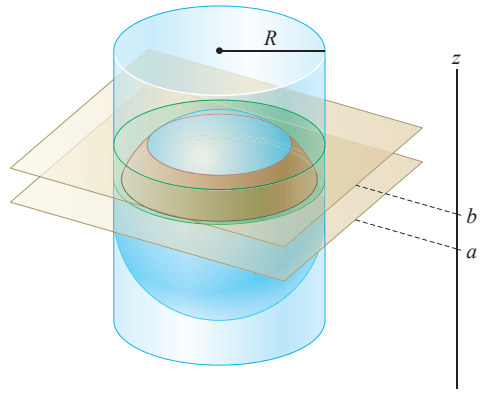


FIGURA 22

Problemas avanzados

42. Superficies de revolución Sea $\mathcal{S}$ la superficie que se forma al rotar la región por debajo de la gráfica $z = g(y)$ en el plano yz para $c \leq y \leq d$ respecto al eje z, donde $c \geq 0$ (figura 23).

(a) Pruebe que la circunferencia generada al rotar un punto $(0, a, b)$ respecto al eje z queda parametrizada por:

$$(a \cos \theta, a \operatorname{sen} \theta, b), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

(b) Pruebe que $\mathcal{S}$ queda parametrizada por:

$$G(y, \theta) = (y \cos \theta, y \operatorname{sen} \theta, g(y)) \qquad \boxed{13}$$

para $c \leq y \leq d$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(c) Use la ec. (13) para demostrar la fórmula

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + g'(y)^2} \, dy \qquad \boxed{14}$$

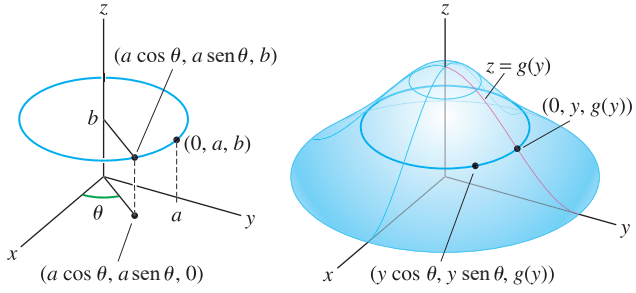


FIGURA 23

43. Use la ec. (14) para calcular el área de la superf cie $z = 4 - y^2$ para $0 \le y \le 2$ rotada respecto al eje z.

44. Describa la mitad superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$ para $0 \le z \le d$ como una superf cie de revolución (f gura 2) y use la ec. (14) para calcular su área.

45. Área de un toro Sea T el toro obtenido por rotación de la circunferencia en el plano yz de radio a centrada en $(0, b, 0)$ respecto al eje z (f gura 24). Suponga que $b > a > 0$.

(a) Use la ec. (14) para probar que:

$$\text{Área(T)} = 4\pi \int_{b-a}^{b+a} \frac{ay}{\sqrt{a^2 - (b-y)^2}}\, dy$$

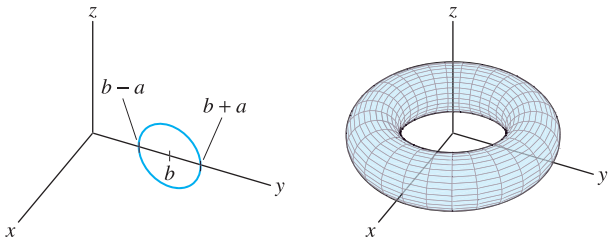


FIGURA 24 El toro obtenido por rotación de una circunferencia de radio a.

(b) Pruebe que $\text{Área(T)} = 4\pi^2 ab$.

46. El **Teorema de Pappus** (también denominado la **regla de Guldin**) af rma que el área de la superf cie de revolución $\mathcal{S}$ es igual a la longitud L de la curva generatriz por la distancia recorrida por el centro de masa. Use la ec. (14) para demostrar el teorema de Pappus. Si $\mathcal{C}$ es la gráf ca $z = g(y)$ para $c \le y \le d$, entonces el centro de masa se def ne como el punto $(\overline{y}, \overline{z})$ con:

$$\overline{y} = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{C}} y\, ds, \qquad \overline{z} = \frac{1}{L}\int_{\mathcal{C}} z\, ds$$

47. Calcule el área de la superf cie correspondiente al toro en el problema 45 usando el teorema de Pappus.

48. **Potencial debido a una esfera uniforme** Sea $\mathcal{S}$ una esfera hueca de radio R y centro en el origen con distribución de masa uniforme, de masa total m [como el área de la superf cie $\mathcal{S}$ es $4\pi R^2$, la densidad de masa es $\rho = m/(4\pi R^2)$]. El potencial gravitatorio $V(P)$ debido a $\mathcal{S}$ en un punto $P = (a, b, c)$ es igual a:

$$-G \iint_{\mathcal{S}} \frac{\rho\, dS}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

(a) Use simetría para deducir que el potencial depende únicamente de la distancia r de P al centro de la esfera. Por tanto, es suf ciente calcular $V(P)$ para un punto $P = (0, 0, r)$ sobre el eje z (con $r \ne R$).

(b) Use coordenadas esféricas para probar que $V(0, 0, r)$ es igual a:

$$\frac{-Gm}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi}}$$

(c) Use la sustitución $u = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi$ para probar que:

$$V(0, 0, r) = \frac{-mG}{2Rr}(|R + r| - |R - r|)$$

(d) Compruebe la ec. (12) para V.

49. Calcule el potencial gravitatorio V para una semiesfera de radio R con distribución de masa uniforme.

50. La superf cie de un cilindro de radio R y longitud L presenta distribución de masa uniforme ρ (la tapa y la base del cilindro se excluyen). Use la ec. (11) para hallar el potencial gravitatorio en un punto P situado a lo largo del eje del cilindro.

51. Sea S la porción de la gráf ca de $z = g(x, y)$ que se encuentra por encima de $\mathcal{D}$ en el plano xy. Sea $\phi = \phi(x, y)$ el ángulo entre el vector normal a S y la vertical. Demuestre la fórmula:

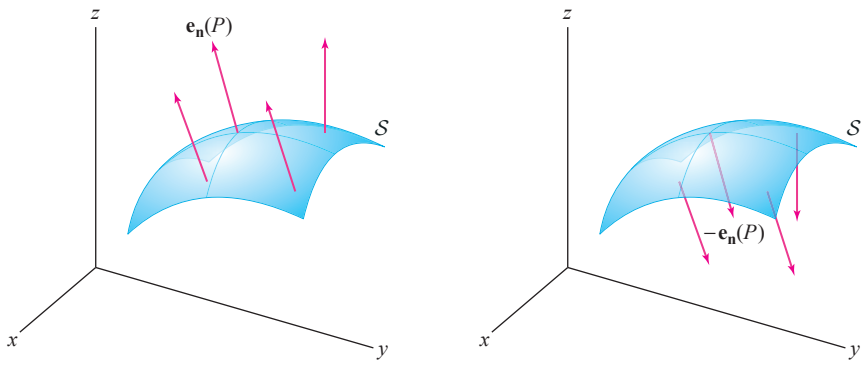
$$\text{Área}(S) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dA}{|\cos\phi|}$$

17.5 Integrales de superficie de campos vectoriales

Las últimas integrales que se van a considerar son las integrales de campos vectoriales. Estas integrales representan f ujo, o tasas de f ujo, a través de una superf cie. Un ejemplo es el f ujo de moléculas a través de la membrana de una célula (número de moléculas por unidad de tiempo).

*La palabra **flujo** viene del término en latín **fluere**, que significa "fluir".*

Como el f ujo a través de una superf cie va de un lado de la superf cie al otro, se necesita def nir un *sentido positivo* de f ujo. Esto se consigue mediante una **orientación**, que es una elección de un vector normal unitario $\mathbf{e_n}(P)$ en cada punto P de $\mathcal{S}$, elegido de manera continua (f gura 1). Existen dos orientaciones normales en cada punto, de manera que la orientación sirve para especif car una de las dos "caras" de la superf cie de una manera consistente. Los vectores unitarios $-\mathbf{e_n}(P)$ def nen la *orientación opuesta*. Por ejemplo, si $\mathbf{e_n}$ son vectores normales unitarios que apuntan hacia el exterior de una esfera, entonces un f ujo desde el interior de la esfera hacia el exterior es un f ujo positivo.



(A) Una orientación posible de S (B) La orientación opuesta

FIGURA 1 La superf cie $\mathcal{S}$ admite dos orientaciones posibles.

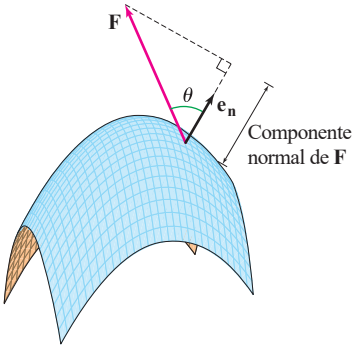


FIGURA 2 La componente normal de un vector a una superf cie.

La **componente normal** de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en un punto P sobre una superf cie orientada $\mathcal{S}$ es el producto escalar:

$$\text{Componente normal en } P = \mathbf{F}(P) \cdot \mathbf{e_n}(P) = \|\mathbf{F}(P)\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{F}(P)$ y $\mathbf{e_n}(P)$ (f gura 2). Se suele escribir $\mathbf{e_n}$ en lugar de $\mathbf{e_n}(P)$, pero se sobreentiende que $\mathbf{e_n}$ varía de punto a punto sobre la superf cie. La integral de superf cie vectorial, que se denota como $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, se def ne como la integral de la componente normal:

$$\text{Integral de superf cie vectorial: } \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e_n})\, dS$$

Esta cantidad también se denomina **f ujo** de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}$.

Una orientación parametrizada $G(u, v)$ es una orientación regular (esto es $\mathbf{n}(u, v)$ es diferente de cero para todo u, v) cuyo vector unitario def ne la orientación:

$$\mathbf{e_n} = \mathbf{e_n}(u, v) = \frac{\mathbf{n}(u, v)}{\|\mathbf{n}(u, v)\|}$$

Aplicando la ec. (1) al margen a $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathcal{D}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e_n})\|\mathbf{n}(u, v)\|\, du\, dv = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(G(u, v)) \cdot \left(\frac{\mathbf{n}(u, v)}{\|\mathbf{n}(u, v)\|}\right)\|\mathbf{n}(u, v)\|\, du\, dv = \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(G(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v)\, du\, dv \qquad \boxed{2}\end{aligned}$$

Esta fórmula continúa siendo válida incluso si $\mathbf{n}(u, v)$ es cero en puntos de la frontera del dominio de parámetros $\mathcal{D}$. Si se cambia la orientación de $\mathcal{S}$ en una integral de superf cie vectorial, $\mathbf{n}(u, v)$ se sustituye por $-\mathbf{n}(u, v)$ y la integral cambia de signo.

Se puede pensar en $d\mathbf{S}$ como en un "elemento de superf cie vectorial" que está relacionado con una parametrización mediante la ecuación simbólica:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}(u, v)\, du\, dv$$

◀··· ***RECORDATORIO*** *Fórmula para una integral de superficie escalar en términos de una parametrización orientada:*

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \iint f(G(u, v))\|\mathbf{n}(u, v)\|\, du\, dv \qquad \boxed{1}$$

TEOREMA 1 Integral de superficie vectorial Sea $G(u, v)$ una parametrización orientada de una superf cie orientada $\mathcal{S}$ con dominio de parámetros $\mathcal{D}$. Suponga que G es inyectiva y regular excepto, quizás, en los puntos de la frontera de $\mathcal{D}$. Entonces:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(G(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v)\, du\, dv \qquad \boxed{3}$$

Si se escoge la orientación contraria de $\mathcal{S}$, entonces la integral de superf cie cambia de signo.

EJEMPLO 1 Calcule $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = \langle 0, 0, x \rangle$ y $\mathcal{S}$ es la superf cie de parametrización $G(u, v) = (u^2, v, u^3 - v^2)$ para $0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1$ y orientada por vectores normales que apuntan hacia arriba.

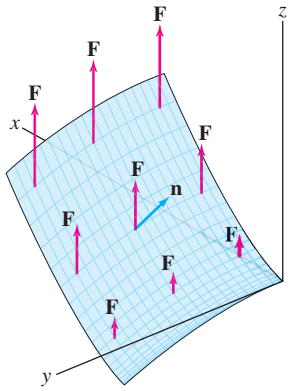


FIGURA 3 La superf cie $G(u, v) = (u^2, v, u^3 - v^2)$ con un vector normal que apunta hacia arriba. El campo vectorial $\mathbf{F} = \langle 0, 0, x \rangle$ apunta en la dirección vertical.

Solución

Etapa 1. **Calcule los vectores tangente y normal**

$$\mathbf{T}_u = \langle 2u, 0, 3u^2 \rangle \qquad T_v = \langle 0, 1, -2v \rangle$$

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 3u^2 \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} =$$

$$= -3u^2\mathbf{i} + 4uv\mathbf{j} + 2u\mathbf{k} = \langle -3u^2, 4uv, 2u \rangle$$

La componente z de $\mathbf{n}$ es positiva sobre el dominio $0 \le u \le 1$, pues $\mathbf{n}$ es el vector normal que apunta hacia arriba (f gura 3).

Etapa 2. **Evalúe $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$**

Exprese $\mathbf{F}$ en términos de los parámetros u y v. Como $x = u^2$, se tiene:

$$\mathbf{F}(G(u, v)) = \langle 0, 0, x \rangle = \langle 0, 0, u^2 \rangle$$

y

$$\mathbf{F}(G(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) = \langle 0, 0, u^2 \rangle \cdot \langle -3u^2, 4uv, 2u \rangle = 2u^3$$

Etapa 3. **Evalúe la integral de superf cie**

El dominio de parámetros es $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$, por lo que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} \mathbf{F}(G(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v)\, dv\, du =$$

$$= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1} 2u^3\, dv\, du = \int_{u=0}^{1} 2u^3\, du = \frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2 Integral sobre una semiesfera Calcule el f ujo de $\mathbf{F} = \langle z, x, 1 \rangle$ a través de la semiesfera $\mathcal{S}$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada con vectores normales que apuntan hacia el exterior (f gura 4).

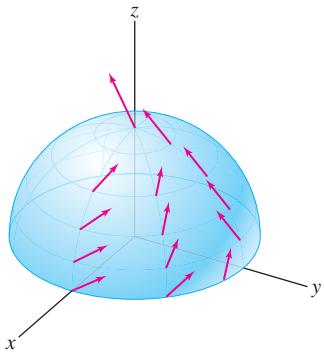


FIGURA 4 El campo vectorial $\mathbf{F} = \langle z, x, 1 \rangle$.

Solución Parametrice la semiesfera por medio de coordenadas esféricas:

$$G(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi) \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

Etapa 1. **Calcule el vector normal**

Según la ec. (2) de la sección 17.4, el vector normal que apunta hacia el exterior es:

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta = \operatorname{sen}\phi \langle \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi \rangle$$

Etapa 2. **Evalúe $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$**

$$\mathbf{F}(G(\theta,\phi)) = \langle z, x, 1\rangle = \langle \cos\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 1\rangle$$

$$\mathbf{F}(G(\theta,\phi)) \cdot \mathbf{n}(\theta,\phi) = \langle \cos\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 1\rangle \cdot \langle \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, \cos\phi \operatorname{sen}\phi\rangle$$

$$= \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi + \cos\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^3\phi + \cos\phi \operatorname{sen}\phi$$

Etapa 3. **Evalúe la integral de superf cie**

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathbf{F}(G(\theta,\phi)) \cdot \mathbf{n}(\theta,\phi)\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\underbrace{\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi + \cos\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^3\phi}_{\text{Integral sobre } \theta \text{ es cero}} + \cos\phi \operatorname{sen}\phi)\, d\theta\, d\phi$$

Las integrales de $\cos\theta$ y $\cos\theta \operatorname{sen}\theta$ sobre $[0, 2\pi]$ son ambas cero, por lo que queda:

$$\int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos\phi \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi = -2\pi \frac{\cos^2\phi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

■

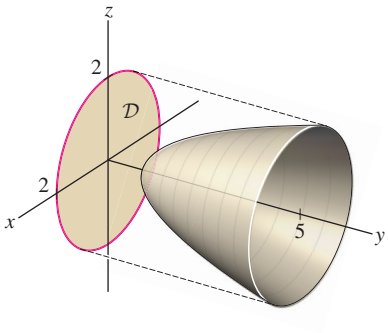


FIGURA 5

■ **EJEMPLO 3** **Integral de superficie sobre una gráfica** Calcule el f ujo de $\mathbf{F} = x^2\mathbf{j}$ a través de la superf cie $\mathcal{S}$ def nida por $y = 1 + x^2 + z^2$ para $1 \le y \le 5$. Oriente $\mathcal{S}$ con vectores normales que apunten en la dirección negativa de las y.

Solución Esta superf cie es la gráf ca de la función $y = 1 + x^2 + z^2$, donde x y z son las variables independientes (f gura 5).

Etapa 1. **Halle una parametrización**

Es conveniente utilizar x y z, pues y viene dada explícitamente como función de x y z. Por tanto, sea:

$$G(x,z) = (x, 1 + x^2 + z^2, z)$$

¿Cuál es el dominio de parámetros? La condición $1 \le y \le 5$ es equivalente a $1 \le 1 + x^2 + z^2 \le 5$ o a $0 \le x^2 + z^2 \le 4$. Así, el dominio de parámetros es el disco de radio 2 en el plano xz, es decir, $\mathcal{D} = \{(x,z) : x^2 + z^2 \le 4\}$.

Como el dominio de parámetros es un disco, tiene sentido utilizar coordenadas polares r y θ en el plano xz. Dicho de otro modo, exprese $x = r\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$. Entonces:

$$y = 1 + x^2 + z^2 = 1 + r^2$$

$$G(r,\theta) = (r\cos\theta, 1 + r^2, r\operatorname{sen}\theta) \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 2$$

Etapa 2. **Calcule los vectores tangente y normal**

$$\mathbf{T}_r = \langle \cos\theta, 2r, \operatorname{sen}\theta\rangle, \qquad \mathbf{T}_\theta = \langle -r\operatorname{sen}\theta, 0, r\cos\theta\rangle$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & 2r & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r^2\cos\theta\mathbf{i} - r\mathbf{j} + 2r^2\operatorname{sen}\theta\mathbf{k}$$

El coef ciente de $\mathbf{j}$ es $-r$. Como es negativo, $\mathbf{n}$ apunta en la dirección de las y negativas.

Etapa 3. **Evalúe $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$**

$$\mathbf{F}(G(r,\theta)) = x^2\mathbf{j} = r^2\cos^2\theta\,\mathbf{j} = \langle 0, r^2\cos^2\theta, 0\rangle$$

$$\mathbf{F}(G(r,\theta)) \cdot \mathbf{n} = \langle 0, r^2\cos^2\theta, 0\rangle \cdot \langle 2r^2\cos\theta, -r, 2r^2\operatorname{sen}\theta\rangle = -r^3\cos^2\theta$$

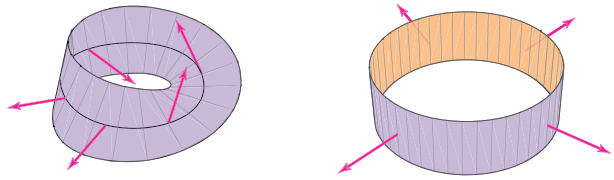
$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(G(r,\theta))\cdot\mathbf{n}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-r^3\cos^2\theta)\,dr\,d\theta =$$

$$= -\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^2 r^3\,dr\right) =$$

$$= -(\pi)\left(\frac{2^4}{4}\right) = -4\pi$$

ATENCIÓN *En el paso 3, se integra* $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ *respecto a* $dr\,d\theta$ *y no* $r\,dr\,d\theta$. *El factor de* r *en* $r\,dr\,d\theta$ *es el correspondiente al jacobiano que se añade únicamente cuando se realiza un cambio de variables en una integral doble. En las integrales de superficie, el factor jacobiano se incorpora en la magnitud de* $\mathbf{n}$ *(recuerde que* $\|\mathbf{n}\|$ *es el "factor de distorsión" del área).*

UN APUNTE CONCEPTUAL Como una integral de superf cie vectorial depende de la orientación de la superf cie, esta integral se def ne sólo para las superf cies que tienen dos caras. Sin embargo, algunas superf cies, como la banda de Möbius (descubierta en 1858 de forma independiente por August Möbius y Johann Listing), no pueden estar orientada, ya que son de un solo lado. Se puede construir una banda de Möbius M con un tira rectangular de papel: una los dos extremos de la tira realizando un giro de 180°. A diferencia de una banda normal de dos caras, la banda de Möbius M tiene un solo lado y no se puede especif car una dirección exterior de una manera consistente (f gura 6). Si elige un vector unitario normal en un punto P y desplaza este vector unitario de forma continua alrededor de M, cuando vuelve a P, el vector apunta en el sentido opuesto. Por tanto, no se puede integrar un campo vectorial sobre una banda de Möbius y no tiene sentido hablar del "f ujo" a través de M. Sin embargo, es posible integrar una función escalar. Por ejemplo, la integral de la densidad de masa sería igual a la masa total de la banda de Möbius.



Banda de Möbius — Tira ordinaria (sin giro)

FIGURA 6 No es posible elegir una vector unitario que varíe de forma continua en una banda de Möbius.

Flujo de fluidos

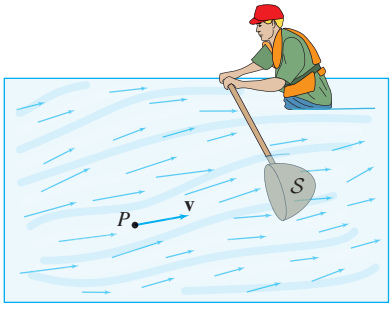


FIGURA 7 Campo velocidad en el f ujo de f uido.

Imagínese sumergiendo una red en una corriente de agua que f uye (f gura 7). La **tasa de f ujo** es el volumen de agua que pasa a través de la red por unidad de tiempo.

Para calcular la tasa de f ujo, sea $\mathbf{v}$ el campo vectorial velocidad. En cada punto P, $\mathbf{v}(P)$ es el vector velocidad de la partícula de f uido situada en el punto P. Af rmamos que *la tasa de f uido a través de una superf cie* $\mathcal{S}$ *es igual a la integral de superf cie de* $\mathbf{v}$ *sobre* $\mathcal{S}$.

Para explicar por qué, suponga en primer lugar que $\mathcal{S}$ sea un rectángulo de área A y $\mathbf{v}$ un campo vectorial constante de valor $\mathbf{v}_0$ perpendicular al rectángulo. Las partículas se desplazan a velocidad $\|\mathbf{v}_0\|$, digamos en metros por segundo, de manera que una partícula dada pasa a través de $\mathcal{S}$ en el lapso de un segundo de tiempo si su distancia a $\mathcal{S}$ es a lo sumo de $\|\mathbf{v}_0\|$ metros, dicho de otro modo, si su vector velocidad pasa a través de

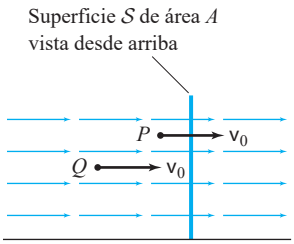


FIGURA 8 La partícula P pasa a través de $\mathcal{S}$ en en el lapso de un segundo, pero Q no pasa.

$\mathcal{S}$ (vea la figura 8). Por tanto, el bloque de fluido que pasa a través de $\mathcal{S}$ en un intervalo de un segundo es una caja de volumen $\|\mathbf{v}_0\|A$ (figura 9) y se verifica:

$$\text{Tasa de flujo} = (\text{velocidad})(\text{área}) = \|\mathbf{v}_0\|A$$

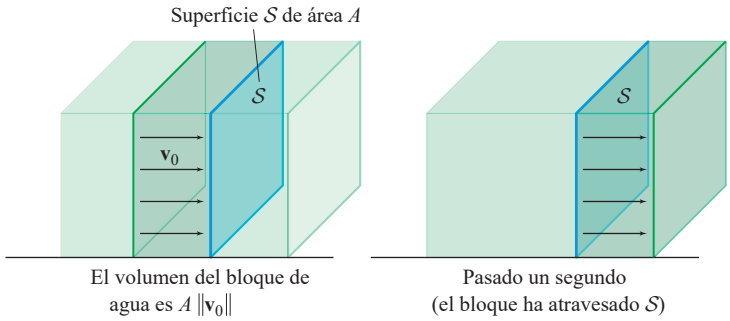


FIGURA 9

Si el fluido fluye a un ángulo θ relativo a $\mathcal{S}$, entonces el bloque de agua es un paralelepípedo (en lugar de una caja) de volumen $A\|\mathbf{v}_0\|\cos\theta$ (figura 10). Si $\mathbf{n}$ es un vector normal a $\mathcal{S}$ de longitud igual al área A, entonces se puede expresar la tasa de flujo como un producto escalar:

$$\text{Tasa de flujo} = A\|\mathbf{v}_0\|\cos\theta = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}$$

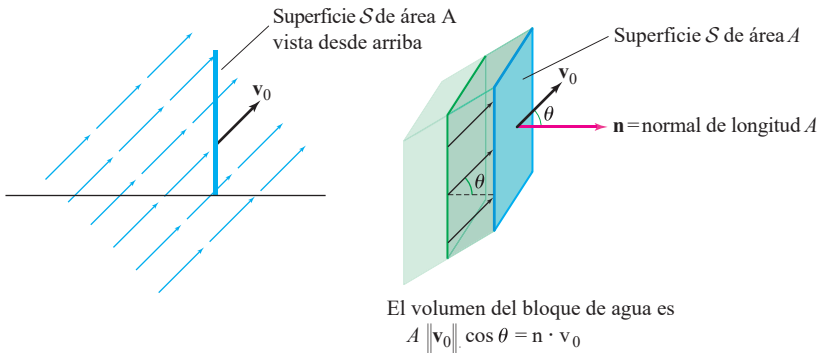


FIGURA 10 Agua que fluye a velocidad constante $\mathbf{v}_0$, formando un ángulo θ con una superficie rectangular.

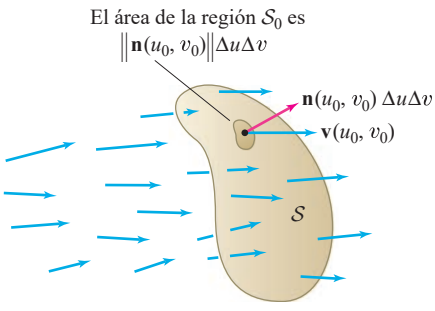


FIGURA 11 La tasa de flujo a través de una pequeña sección $\mathcal{S}_0$ es aproximadamente $\mathbf{v}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n}(u_0, v_0)\,\Delta u\,\Delta v$.

En el caso general, el campo velocidad $\mathbf{v}$ no es constante y la superficie $\mathcal{S}$ puede ser curvada. Para calcular la tasa de flujo, seleccione una parametrización $G(u, v)$ y considere un pequeño rectángulo de tamaño $\Delta u \times \Delta v$ que se aplica por G en una pequeña sección $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ (figura 11). Para cualquier punto intermedio $G(u_0, v_0)$ en $\mathcal{S}_0$, el vector $\mathbf{n}(u_0, v_0)\,\Delta u\,\Delta v$ es un vector normal de longitud aproximada $\mathcal{S}_0$ [ec. (3) de la sección 17.4]. Esta sección es prácticamente rectangular, por lo que se tiene la aproximación:

$$\text{Tasa de flujo a través de } \mathcal{S}_0 \approx \mathbf{v}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n}(u_0, v_0)\,\Delta u\,\Delta v$$

El flujo total por segundo es la suma de los flujos a través de las pequeñas secciones. Como es habitual, el límite de las sumas cuando Δu y Δv tienden a cero es la integral de $\mathbf{v}(u, v) \cdot \mathbf{n}(u, v)$, es decir, la integral de superficie de $\mathbf{v}$ sobre $\mathcal{S}$.

Tasa de flujo a a través de una superficie Para un fluido de campo vectorial velocidad $\mathbf{v}$,

$$\text{Tasa de flujo a través de } \mathcal{S} \text{ (volumen por unidad de tiempo)} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \qquad \boxed{4}$$

EJEMPLO 4 Sea $\mathbf{v} = \langle x^2 + y^2, 0, z^2 \rangle$ el campo velocidad (en centímetros por segundo) de un f uido en $\mathbb{R}^3$. Calcule la tasa de f ujo a través de la semiesfera superior $\mathcal{S}$ de la esfera unitaria centrada en el origen.

Solución Se utilizarán coordenadas esféricas:

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi \qquad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = \cos\phi$$

La semiesfera superior corresponde a $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Según la ec. (2) de la sección 17.4, la normal que apunta hacia arriba es:

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta = \operatorname{sen}\phi \langle \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi \rangle$$

Se tiene $x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2\phi$, por lo que:

$$\mathbf{v} = \langle x^2 + y^2, 0, z^2 \rangle = \langle \operatorname{sen}^2\phi, 0, \cos^2\phi \rangle$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{sen}\phi \langle \operatorname{sen}^2\phi, 0, \cos^2\phi \rangle \cdot \langle \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi \rangle =$$

$$= \operatorname{sen}^4\phi \cos\theta + \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\operatorname{sen}^4\phi \cos\theta + \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi)\, d\theta\, d\phi$$

La integral de $\operatorname{sen}^4\phi \cos\theta$ respecto a θ es cero, por lo que queda:

$$\int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \cos^3\phi\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_{\phi=0}^{\pi/2} \cos^3\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{\cos^4\phi}{4} \right) \Big|_{\phi=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^3/\text{s}$$

Como $\mathbf{n}$ es un vector normal que apunta hacia arriba, se trata de la tasa a la que el f uido atraviesa la semiesfera desde abajo hacia arriba. ■

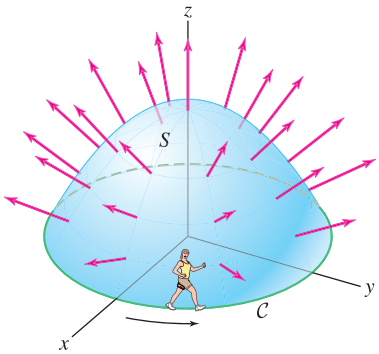


FIGURA 12 La dirección positiva a lo largo de la curva de frontera $\mathcal{C}$ se def ne de manera que si un peatón camina en la dirección positiva, con la superf cie a su izquierda, entonces su cabeza apunta en la dirección (normal) hacia el exterior.

Campos eléctrico y magnético

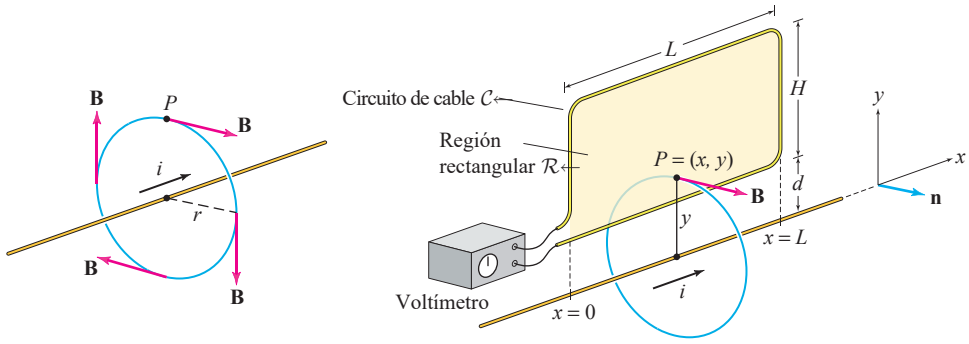
Las leyes de la electricidad y el magnetismo se expresan en términos de dos campos vectoriales, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$, cuyas propiedades se resumen en las cuatro ecuaciones de Maxwell. Una de estas ecuaciones es la **Ley de inducción de Faraday**, que se puede formular o bien como una ecuación diferencial en derivadas parciales, o bien en la siguiente "forma integral":

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad \boxed{5}$$

En esta ecuación, $\mathcal{S}$ es una superf cie orientada con frontera delimitada por una curva $\mathcal{C}$, orientada como se indica en la f gura 12. La integral de línea de $\mathbf{E}$ es igual a la caída de voltaje alrededor de la curva de la frontera (el trabajo realizado por $\mathbf{E}$ para mover una unidad de carga positiva alrededor de $\mathcal{C}$).

Para ilustrar la ley de Faraday, considere una corriente eléctrica de i amperios que circula a través de un cable recto. Según la ley de Biot-Savart, esta corriente produce un campo magnético $\mathbf{B}$ de magnitud $B(r) = \dfrac{\mu_0 |i|}{2\pi r}$ T, donde r es la distancia (en metros) al cable y $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m/A. En cada punto P, $\mathbf{B}$ es tangente a la circunferencia que pasa por P y que es perpendicular al cable, como se muestra en la f gura 13(A), con dirección y sentido determinado por la regla del sacacorchos: si el pulgar de su mano derecha apunta en la dirección y sentido de la corriente, entonces el resto de los dedos de su mano se enroscan en la dirección y sentido de $\mathbf{B}$.

La tesla *(T) es la unidad del SI para la fuerza del campo magnético. Una carga puntual de un culombio que pasa a través de un campo magnético de 1 T a 1 m/s experimenta una fuerza de 1 newton.*



(A) Campo magnético B debido a la corriente que circula por el cable

(B) El campo magnético B apunta en la dirección **n** normal a $\mathcal{R}$

FIGURA 13

El campo eléctrico **E** *es conservativo cuando las cargas son estacionarias o, de forma más general, cuando el campo magnético* **B** *es constante. Si* **B** *es variable respecto al tiempo, la integral a la derecha de la ec. (5) es diferente de cero para alguna superficie y, en consecuencia, el flujo de* **E** *alrededor de la curva de la frontera* $\mathcal{C}$ *también es diferente de cero. Esto prueba que* **E** *no es conservativo cuando* **B** *es variable respecto al tiempo.*

El flujo magnético, como función del tiempo, se suele denotar con la letra griega Φ*:*

$$\Phi(t) = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

EJEMPLO 5 Una corriente variable de magnitud (t en segundos)

$$i = 28\cos(400t) \text{ amperios}$$

circula a través de un cable recto [f gura 13(B)]. Un circuito rectangular de cable $\mathcal{C}$ de longitud $L = 1{,}2$ m y amplitud $H = 0{,}7$ m está situado a distancia $d = 0{,}1$ m desde el cable, como en la f gura. El circuito limita una superf cie rectangular $\mathcal{R}$, que queda orientada mediante vectores normales que apuntan hacia el exterior de la página.

(a) Calcule el f ujo $\Phi(t)$ de **B** a través de $\mathcal{R}$.
(b) Use la ley de Faraday para determinar la caída de voltaje (en voltios) alrededor del circuito $\mathcal{C}$.

Solución Considere coordenadas (x, y) sobre el rectángulo $\mathcal{R}$ como en la f gura 13, de tal manera que y sea la distancia desde el cable, y $\mathcal{R}$ la región:

$$0 \le x \le L \qquad d \le y \le H + d$$

La parametrización escogida para $\mathcal{R}$ es simplemente $G(x, y) = (x, y)$, para la que el vector normal **n** es el vector normal unitario perpendicular a $\mathcal{R}$, que apunta hacia fuera de la página. El campo magnético **B** en $P = (x, y)$ tiene magnitud $\dfrac{\mu_0 |i|}{2\pi y}$. Apunta hacia el exterior de la página, en la dirección de **n** cuando i es positiva, y hacia en interior de la página cuando i es negativa. Por tanto:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\mathbf{n} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}$$

(a) El f ujo $\Phi(t)$ de **B** a través de $\mathcal{R}$ en el instante t es:

$$\Phi(t) = \iint_{\mathcal{R}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{x=0}^{L} \int_{y=d}^{H+d} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dy\, dx =$$

$$= \int_{x=0}^{L} \int_{y=d}^{H+d} \frac{\mu_0 i}{2\pi y}\, dy\, dx = \frac{\mu_0 L i}{2\pi} \int_{y=d}^{H+d} \frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{\mu_0 L}{2\pi}\left(\ln \frac{H+d}{d}\right) i =$$

$$= \frac{\mu_0 (1{,}2)}{2\pi}\left(\ln \frac{0{,}8}{0{,}1}\right) 28\cos(400t)$$

Con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, se obtiene:

$$\Phi(t) \approx 1{,}4 \times 10^{-5} \cos(400t) \text{ T-m}^2$$

(b) Según la ley de Faraday [ec. (5)], la caída de voltaje a través del circuito rectangular $\mathcal{C}$, orientado en la dirección contraria a la de las agujas del reloj, es:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \approx -(1{,}4 \times 10^{-5})\,(400)\,\text{sen}\,(400t) = -0{,}0056\,\text{sen}\,(400t)\ \text{V}$$ ■

17.5 RESUMEN

- Una superf cie $\mathcal{S}$ está *orientada* si en cada punto de la superf cie se especif ca un vector normal unitario $\mathbf{e_n}(P)$ que varía de forma continua en $\mathcal{S}$. Esto distingue una dirección hacia en "exterior" sobre la superf cie.
- La integral de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre una superf cie orientada $\mathcal{S}$ se def ne como la integral de la componente normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e_n}$ sobre $\mathcal{S}$.
- Las integrales de superf cie vectoriales se calculan usando la fórmula:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(G(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v)\,du\,dv$$

Aquí, $G(u,v)$ es una parametrización de $\mathcal{S}$ tal que $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta en la dirección y sentido del vector normal unitario especif cado por la orientación.

- La integral de superf cie de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre $\mathcal{S}$ también se denomina *f ujo* de $\mathbf{F}$ a través de G. Si $\mathbf{F}$ es el campo velocidad de un f uido, entonces $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es la tasa a la que el f uido circula a través de $\mathcal{S}$ por unidad de tiempo.

17.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Sean $\mathbf{F}$ un campo vectorial, $G(u,v)$ una parametrización de una superf cie $\mathcal{S}$ y $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$. ¿Cuál de los siguientes es la componente normal de $\mathbf{F}$?

(a) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ **(b)** $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e_n}$

2. La integral de superf cie vectorial $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es igual a la integral de superf cie escalar de la función (elija la respuesta correcta):

(a) $\|\mathbf{F}\|$ **(b)** $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es un vector normal

(c) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e_n}$, donde $\mathbf{e_n}$ el vector normal unitario

3. $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es cero si (elija la respuesta correcta):

(a) $\mathbf{F}$ es tangente a $\mathcal{S}$ en cada punto.

(b) $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\mathcal{S}$ en cada punto.

4. Si $\mathbf{F}(P) = \mathbf{e_n}(P)$ en cada punto de $\mathcal{S}$, entonces $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es igual a (elija la respuesta correcta):

(a) Cero **(b)** Área($\mathcal{S}$)

(c) Ninguna de las anteriores

5. Sea $\mathcal{S}$ el disco $x^2 + y^2 \le 1$ en el plano xy orientado con vector normal en la dirección de las z positivas. Determine $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para cada uno de los siguientes campos vectoriales constantes:

(a) $\mathbf{F} = \langle 1,0,0\rangle$ **(b)** $\mathbf{F} = \langle 0,0,1\rangle$ **(c)** $\mathbf{F} = \langle 1,1,1\rangle$

6. Estime $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathcal{S}$ es una diminuta superf cie orientada de área 0,05 y el valor de $\mathbf{F}$ en un punto intermedio de $\mathcal{S}$ es un vector de longitud 2 que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con la normal a la superf cie.

7. Se divide una pequeña superf cie $\mathcal{S}$ en tres trozos de área 0,2. Estime $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial unitario que forma ángulos de 85°, 90° y 95° con el vector normal en puntos intermedios de estos tres trozos.

Problemas

1. Sean $\mathbf{F} = \langle z,0,y\rangle$ y $\mathcal{S}$ la superf cie orientada parametrizada por $G(u,v) = (u^2 - v, u, v^2)$ para $0 \le u \le 2$, $-1 \le v \le 4$. Calcule:

(a) $\mathbf{n}$ y $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ como funciones de u y v.

(b) La componente normal de $\mathbf{F}$ a la superf cie en $P = (3,2,1) = G(2,1)$.

(c) $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

2. Sean $\mathbf{F} = \langle y, -x, x^2 + y^2\rangle$ y $\mathcal{S}$ la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ donde $x^2 + y^2 \le 3$.

(a) Pruebe que si $\mathcal{S}$ es parametrizada en variables polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, entonces $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = r^3$.

(b) Pruebe que $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \, dr \, d\theta$ y evalúe.

3. Sea $\mathcal{S}$ el cuadrado unitario en el plano xy que se muestra en la figura 14, orientado con el vector normal apuntando en el sentido de las z positivas. Estime:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyos valores en los puntos etiquetados son:

$$\mathbf{F}(A) = \langle 2, 6, 4 \rangle \qquad \mathbf{F}(B) = \langle 1, 1, 7 \rangle$$
$$\mathbf{F}(C) = \langle 3, 3, -3 \rangle \qquad \mathbf{F}(D) = \langle 0, 1, 8 \rangle$$

4. Suponga que $\mathcal{S}$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$ con una parametrización G cuyo dominio $\mathcal{D}$ es el cuadrado de la figura 14. Los valores de una función f, un campo vectorial $\mathbf{F}$ y el vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ en $G(P)$ se encuentran en la siguiente tabla para cuatro puntos en $\mathcal{D}$. Estime las integrales de superficie de f y $\mathbf{F}$ sobre $\mathcal{S}$.

Punto P en $\mathcal{D}$	f	$\mathbf{F}$	$\mathbf{n}$
A	3	$\langle 2, 6, 4 \rangle$	$\langle 1, 1, 1 \rangle$
B	1	$\langle 1, 1, 7 \rangle$	$\langle 1, 1, 0 \rangle$
C	2	$\langle 3, 3, -3 \rangle$	$\langle 1, 0, -1 \rangle$
D	5	$\langle 0, 1, 8 \rangle$	$\langle 2, 1, 0 \rangle$

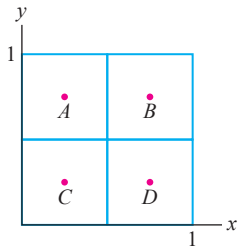


FIGURA 14

En los problemas 5-17, calcule $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ *para la superficie orientada dada.*

5. $\mathbf{F} = \langle y, z, x \rangle$, plano $3x - 4y + z = 1$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, normal apuntando hacia arriba.

6. $\mathbf{F} = \langle e^z, z, x \rangle$, $G(r, s) = (rs, r + s, r)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le s \le 1$, orientada por $\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_s$.

7. $\mathbf{F} = \langle 0, 3, x \rangle$, parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, donde $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, normal apuntando hacia el exterior.

8. $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$, parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, donde $\frac{1}{2} \le z \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, apuntando hacia el interior.

9. $\mathbf{F} = \langle z, z, x \rangle$, $z = 9 - x^2 - y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, normal apuntando hacia arriba.

10. $\mathbf{F} = \langle \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} z, yz \rangle$, rectángulo $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$ en el plano (y, z), normal apuntando en el sentido de las x negativas.

11. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - x\mathbf{k}$, porción del plano $x + y + z = 1$ en el octante $x, y, z \ge 0$, normal apuntando hacia arriba.

12. $\mathbf{F} = \langle x, y, e^z \rangle$, cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $1 \le z \le 5$, normal apuntando hacia el exterior.

13. $\mathbf{F} = \langle xz, yz, z^{-1} \rangle$, disco de radio 3 a altura 4 paralelo al plano xy, normal apuntando hacia arriba.

14. $\mathbf{F} = \langle xy, y, 0 \rangle$, cono $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 4$, $z \ge 0$, normal apuntando hacia abajo.

15. $\mathbf{F} = \langle 0, 0, e^{y+z} \rangle$, frontera del cubo unitario $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, normal apuntando hacia abajo.

16. $\mathbf{F} = \langle 0, 0, z^2 \rangle$, $G(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, v)$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$, normal apuntando hacia arriba.

17. $\mathbf{F} = \langle y, z, 0 \rangle$, $G(u, v) = (u^3 - v, u + v, v^2)$, $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 3$, normal apuntando hacia abajo.

18. Sea $\mathcal{S}$ la mitad del cilindro orientada de la figura 15. En (a)-(f), determine si $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es positiva, negativa, o cero. Justifique su respuesta.

(a) $\mathbf{F} = \mathbf{i}$ **(b)** $\mathbf{F} = \mathbf{j}$ **(c)** $\mathbf{F} = \mathbf{k}$

(d) $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$ **(e)** $\mathbf{F} = -y\mathbf{j}$ **(f)** $\mathbf{F} = x\mathbf{j}$

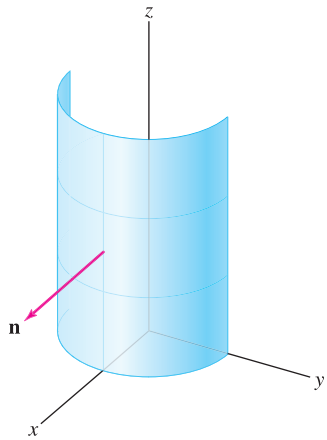


FIGURA 15

19. Sea $\mathbf{e_r} = \langle x/r, y/r, z/r \rangle$ el vector radial unitario, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calcule la integral de $\mathbf{F} = e^{-r}\mathbf{e_r}$ sobre:

(a) La semiesfera superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, normal apuntando hacia el exterior.

(b) El octante $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ de la esfera unitaria centrada en el origen.

20. Pruebe que el flujo de $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$ a través de una esfera centrada en el origen no depende del radio de la esfera.

21. El campo eléctrico debido a una carga puntual situada en el origen de $\mathbb{R}^3$ es $\mathbf{E} = k\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y k es una constante. Calcule el flujo de $\mathbf{E}$ a través del disco D de radio 2 paralelo al plano xy y de centro $(0, 0, 3)$.

22. Sea $\mathcal{S}$ el elipsoide $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$. Calcule el flujo de $\mathbf{F} = z\mathbf{i}$ sobre la porción de $\mathcal{S}$ donde $x, y, z \le 0$ con normal apuntando hacia arriba. *Indicación:* Parametrice $\mathcal{S}$ usando una versión modificada de coordenadas esféricas (θ, ϕ).

23. Sea $\mathbf{v} = z\mathbf{k}$ el campo velocidad (en metros por segundo) de un fluido en $\mathbb{R}^3$. Calcule la tasa de flujo (en metros cúbicos por segundo) a través de la semiesfera superior ($z \geq 0$) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

24. Calcule la tasa de flujo de un fluido cuyo campo velocidad es $\mathbf{v} = \langle x, y, x^2 y \rangle$ (en m/s) a través de la porción de la elipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ en el plano xy, donde $x, y \geq 0$, orientado con la normal en el sentido de las z positivas.

En los problemas 25-26, sea $\mathcal{T}$ la región triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ orientada mediante un vector normal que apunta hacia arriba (figura 16). Suponga que las distancias vienen dadas en metros.

25. El flujo de un fluido se realiza según el campo velocidad constante $\mathbf{v} = 2\mathbf{k}$ (m/s). Calcule:

(a) La tasa de flujo a través de $\mathcal{T}$.

(b) La tasa de flujo a través de la proyección de $\mathcal{T}$ sobre el plano xy [el triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$].

26. Calcule la tasa de flujo a través de $\mathcal{T}$ si $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$ m/s.

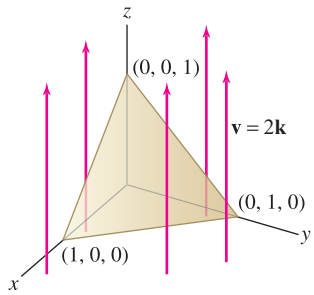


FIGURA 16

27. Demuestre que si $\mathcal{S}$ es la parte de una gráfica $z = g(x, y)$ que se encuentra sobre un dominio $\mathcal{D}$ en el plano xy, entonces:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \left(-F_1 \frac{\partial g}{\partial x} - F_2 \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \right) dx\, dy$$

En los problemas 28-29, una corriente variable $i(t)$ circula a través de un cable largo y estrecho en el plano xy como en el ejemplo 5. La corriente produce un campo magnético $\mathbf{B}$ cuya magnitud a distancia r del cable es $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ T, donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Tm/A. Además, $\mathbf{B}$ apunta hacia el interior de la página para los puntos P en el plano xy.

28. Suponga que $i(t) = t(12 - t)$ A (t en segundos). Calcule el flujo $\Phi(t)$, en el instante t, de $\mathbf{B}$ a través de un rectángulo de dimensiones $L \times H = 3 \times 2$ m cuyos lados superior e inferior son paralelos al cable y estando situado el lado superior a distancia $d = 0{,}5$ m por encima del cable, de manera similar a la figura 13(B). A continuación, use la ley de Faraday para determinar la caída de voltaje alrededor del circuito rectangular (la frontera del rectángulo) en el instante t.

29. Suponga que $i = 10e^{-0{,}1t}$ A (t en segundos). Calcule el flujo $\Phi(t)$, en el instante t, de $\mathbf{B}$ a través del triángulo isósceles de base 12 cm y altura 6 cm cuyo lado superior se encuentra a 3 cm del cable, como en la figura 17. Suponga que el triángulo está orientado con vector normal que apunta hacia el exterior de la página. Use la ley de Faraday para determinar la caída de voltaje alrededor del circuito triangular (la frontera del triángulo) en el instante t.

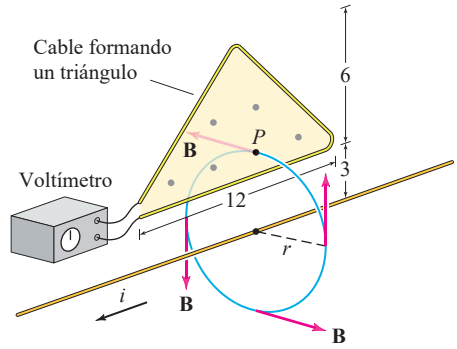


FIGURA 17

Problemas avanzados

30. Una masa puntual m se encuentra en el origen. Sea Q el flujo del campo gravitatorio $\mathbf{F} = -Gm\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$ a través del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ para $a \leq z \leq b$, incluyendo la tapa y la base (figura 18). Muestre que $Q = -4\pi Gm$ si $a < 0 < b$ (m se encuentra dentro del cilindro) y $Q = 0$ si $0 < a < b$ (m se encuentra fuera del cilindro).

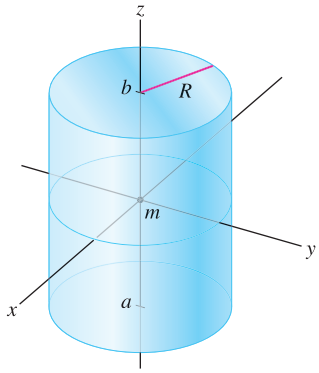


FIGURA 18

En los problemas 31 y 32, sea $\mathcal{S}$ la superficie de parametrización:

$$G(u, v) = \left(\left(1 + v \cos\frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + v \cos\frac{u}{2}\right) \operatorname{sen} u, v \operatorname{sen}\frac{u}{2} \right)$$

para $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}$.

31. SAC Use un programa informático de cálculo simbólico.

(a) Represente $\mathcal{S}$ y confirme visualmente que $\mathcal{S}$ es una banda de Möbius.

(b) La intersección de $\mathcal{S}$ con el plano xy es la circunferencia unitaria $G(u, 0) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$. Compruebe que el vector normal a lo largo de esta circunferencia es:

$$\mathbf{n}(u, 0) = \left\langle \cos u \operatorname{sen}\frac{u}{2}, \operatorname{sen} u \operatorname{sen}\frac{u}{2}, -\cos\frac{u}{2} \right\rangle$$

(c) Cuando u varía de 0 a 2π, el punto $G(u, 0)$ se desplaza una vez alrededor de la circunferencia unitaria, empezando y finalizando en $G(0, 0) = G(2\pi, 0) = (1, 0, 0)$. Compruebe que $\mathbf{n}(u, 0)$ es un vector unitario que varía de forma continua, pero que $\mathbf{n}(2\pi, 0) = -\mathbf{n}(0, 0)$. Esto prueba que $\mathcal{S}$ no es orientable, es decir que no es posible elegir un

vector normal diferente de cero en cada punto de $\mathcal{S}$ que varíe de forma continua (si fuera posible, el vector normal unitario volvería a ser él mismo, una vez que se ha dado la vuelta completa alrededor de la circunferencia).

32. SAC No es posible integrar campos vectoriales sobre $\mathcal{S}$ porque $\mathcal{S}$ no es orientable, pero sí que es posible integrar funciones sobre $\mathcal{S}$. Usando un programa informático de cálculo simbólico:

(a) Compruebe que:

$$\|\mathbf{n}(u,v)\|^2 = 1 + \frac{3}{4}v^2 + 2v\cos\frac{u}{2} + \frac{1}{2}v^2\cos u$$

(b) Calcule el área de $\mathcal{S}$ con cuatro decimales de precisión.

(c) Calcule $\iint_{\mathcal{S}} (x^2+y^2+z^2)\,dS$ con cuatro decimales de precisión.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Calcule el campo vectorial asignado al punto $P = (-3, 5)$ por el campo vectorial:

(a) $\mathbf{F} = \langle xy, y - x\rangle$

(b) $\mathbf{F} = \langle 4, 8\rangle$

(c) $\mathbf{F} = \langle 3^{x+y}, \log_2(x+y)\rangle$

2. Halle un campo vectorial $\mathbf{F}$ en el plano, tal que que $\|\mathbf{F}(x,y)\| = 1$ y $\mathbf{F}(x,y)$ sea ortogonal a $\mathbf{G}(x,y) = \langle x, y\rangle$ para todo x, y.

En los problemas 3-6, dibuje el campo vectorial.

3. $\mathbf{F}(x,y) = \langle y, 1\rangle$

4. $\mathbf{F}(x,y) = \langle 4, 1\rangle$

5. ∇V, donde $V(x,y) = x^2 - y$

6. $\mathbf{F}(x,y) = \left\langle \dfrac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}, \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+16y^2}} \right\rangle$

Indicación: pruebe que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial unitario tangente a la familia de elipses $x^2 + 4y^2 = c^2$.

En los problemas 7-15, determine si el campo vectorial es conservativo y, en caso afirmativo, halle una función potencial.

7. $\mathbf{F}(x,y) = \langle x^2y, y^2x\rangle$

8. $\mathbf{F}(x,y) = \langle 4x^3y^5, 5x^4y^4\rangle$

9. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle \operatorname{sen} x, e^y, z\rangle$

10. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle 2, 4, e^z\rangle$

11. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle xyz, \frac{1}{2}x^2z, 2z^2y\rangle$

12. $\mathbf{F}(x,y) = \langle y^4x^3, x^4y^3\rangle$

13. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left\langle \dfrac{y}{1+x^2}, \tan^{-1}x, 2z \right\rangle$

14. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left\langle \dfrac{2xy}{x^2+z}, \ln(x^2+z), \dfrac{y}{x^2+z} \right\rangle$

15. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle xe^{2x}, ye^{2z}, ze^{2y}\rangle$

16. Halle un campo vectorial conservativo de la forma $\mathbf{F} = \langle g(y), h(x)\rangle$, tal que $\mathbf{F}(0,0) = \langle 1, 1\rangle$, donde $g(y)$ y $h(x)$ son funciones diferenciables. Determine todos los campos vectoriales de este tipo.

En los problemas 17-20, calcule la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\,ds$ *para la función dada y la trayectoria o curva indicadas.*

17. $f(x,y) = xy$, la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, 2t-1)$ para $0 \le t \le 1$.

18. $f(x,y) = x - y$, la semicircunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1, y \ge 0$.

19. $f(x,y,z) = e^x - \dfrac{y}{2\sqrt{2}z}$, la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\ln t, \sqrt{2}t, \frac{1}{2}t^2)$ para $1 \le t \le 2$.

20. $f(x,y,z) = x + 2y + z$, la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ para $-1 \le t \le 3$.

21. Halle la masa total de una varilla en forma de L formada por los segmentos $(2t, 2)$ y $(2, 2-2t)$ para $0 \le t \le 1$ (longitud en centímetros) cuya densidad de masa es $\rho(x,y) = x^2y$ g/cm.

22. Halle $\mathbf{F} = \nabla V$, donde $V(x,y,z) = xye^z$ y calcule $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$, donde:

(a) $\mathcal{C}$ es cualquier curva de $(1,1,0)$ a $(3,e,-1)$.

(b) $\mathcal{C}$ es la frontera del cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

23. Calcule $\int_{\mathcal{C}_1} y\,dx + x^2y\,dy$, donde $\mathcal{C}_1$ es la curva orientada de la figura 1(A).

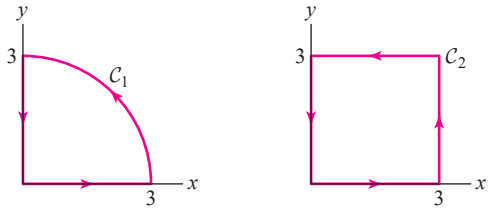


FIGURA 1

24. Sean $\mathbf{F}(x,y) = \langle 9y - y^3, e^{\sqrt{y}}(x^2 - 3x)\rangle$ y $\mathcal{C}_2$ la curva orientada de la figura 1(B).

(a) Pruebe que $\mathbf{F}$ no es conservativo.

(b) Pruebe que $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$ sin calcular explícitamente la integral. *Indicación:* pruebe que $\mathbf{F}$ es ortogonal a los lados a lo largo del cuadrado.

En los problemas 25-28, calcule la integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ *para el campo vectorial y trayectoria dados.*

25. $\mathbf{F}(x,y) = \left\langle \dfrac{2y}{x^2+4y^2}, \dfrac{x}{x^2+4y^2} \right\rangle$,

la trayectoria $\mathbf{c}(t) = \left(\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)$ para $0 \le t \le 2\pi$.

26. $\mathbf{F}(x,y) = \langle 2xy, x^2 + y^2 \rangle$, la parte de la circunferencia unitaria que se encuentra en el primer cuadrante, orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

27. $\mathbf{F}(x,y) = \langle x^2y, y^2z, z^2x \rangle$, la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t})$ para $0 \le t < +\infty$.

28. $\mathbf{F} = \nabla V$, donde $V(x,y,z) = 4x^2 \ln(1 + y^4 + z^2)$, la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^3, \ln(1 + t^2), e^t)$ para $0 \le t \le 1$.

29. Considere las integrales de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para los campos vectoriales **F** y las trayectorias **c** de la f gura 2. ¿Cuál de las dos integrales de línea parece que es igual a cero? ¿Cuál de las otras dos parece que tiene valor negativo?

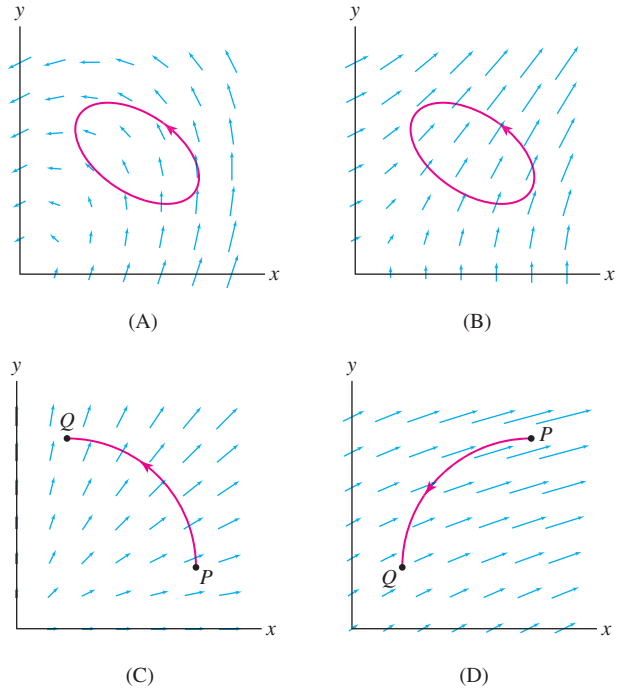


FIGURA 2

30. Calcule el trabajo necesario para mover un objeto desde $P = (1,1,1)$ a $Q = (3,-4,-2)$ contra el campo de fuerza $\mathbf{F}(x,y,z) = = -12r^{-4}\langle x,y,z \rangle$ (distancia en metros, fuerza en newtons), donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Indicación:* halle una función potencial para **F**.

31. Halle constantes a, b, c tales que:

$$G(u,v) = (u + av, bu + v, 2u - c)$$

parametrice el plano $3x - 4y + z = 5$. Calcule $\mathbf{T}_u$, $\mathbf{T}_v$ y $\mathbf{n}(u,v)$.

32. Calcule la integral de $f(x,y,z) = e^z$ sobre la porción del plano $x + 2y + 2z = 3$, donde $x,y,z \ge 0$.

33. Sea $\mathcal{S}$ la superf cie parametrizada por:

$$G(u,v) = \left(2u \operatorname{sen} \frac{v}{2}, 2u \cos \frac{v}{2}, 3v\right)$$

para $0 \le u \le 1$ y $0 \le v \le 2\pi$.

(a) Calcule los vectores tangentes $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ y el vector normal $\mathbf{n}(u,v)$ en $P = G(1, \frac{\pi}{3})$.

(b) Halle la ecuación del plano tangente en P.

(c) Calcule el área de la superf cie $\mathcal{S}$.

34. SAC Represente la superf cie de parametrización:

$$G(u,v) = (u + 4v, 2u - v, 5uv)$$

para $-1 \le v \le 1$, $-1 \le u \le 1$. Exprese el área de la superf cie como una integral doble y use un programa informático de cálculo simbólico para calcular el área numéricamente.

35. SAC Exprese el área de la superf cie $z = 10 - x^2 - y^2$ para $-1 \le x \le 1$, $-3 \le y \le 3$ como una integral doble. Evalúe la integral numéricamente usando un programa informático de cálculo simbólico.

36. Evalúe $\iint_{\mathcal{S}} x^2y \, dS$, donde $\mathcal{S}$ es la superf cie $z = \sqrt{3}x + y^2$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

37. Calcule $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) e^{-z} \, dS$, donde $\mathcal{S}$ es el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ para $0 \le z \le 10$.

38. Sea $\mathcal{S}$ la semiesfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$. Para cada una de las funciones (a)–(d), determine si $\iint_{\mathcal{S}} f \, dS$ es positiva, cero o negativa (sin evaluar la integral). Justif que su respuesta.

(a) $f(x,y,z) = y^3$ **(b)** $f(x,y,z) = z^3$

(c) $f(x,y,z) = xyz$ **(d)** $f(x,y,z) = z^2 - 2$

39. Sea $\mathcal{S}$ una pequeña sección de la superf cie de parametrización $G(u,v)$ para $0 \le u \le 0{,}1$, $0 \le v \le 0{,}1$ tal que el vector normal $\mathbf{n}(u,v)$ para $(u,v) = (0,0)$ es $\mathbf{n} = \langle 2, -2, 4 \rangle$. Use la ec. (3) de la sección 17.4 para estimar el área de la superf cie $\mathcal{S}$.

40. La mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ admite la parametrización $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{9 - r^2})$ en coordenadas cilíndricas (f gura 3).

(a) Calcule el vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta$ en el punto $G(2, \frac{\pi}{3})$.

(b) Use la ec. (3) de la sección 17.4 para estimar el área de la superf cie de $G(\mathcal{R})$, donde $\mathcal{R}$ es el pequeño dominio def nido por:

$$2 \le r \le 2{,}1 \qquad \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3} + 0{,}05$$

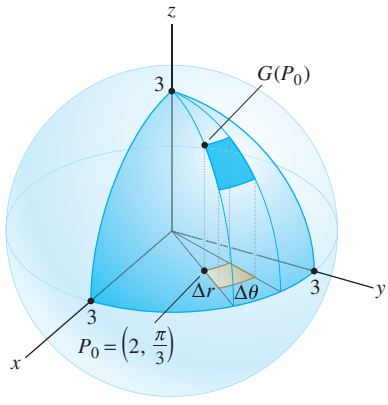


FIGURA 3

En los problemas 41-46, calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ *para la superf cie orientada o la superf cie parametrizada.*

41. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle y, x, e^{xz} \rangle$, $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0,$ $-3 \leq z \leq 3$, normal apuntando hacia el exterior.

42. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle -y, z, -x \rangle$, $G(u,v) = (u + 3v, v - 2u, 2v + 5)$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, normal apuntando hacia arriba.

43. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle 0, 0, x^2 + y^2 \rangle$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, normal apuntando hacia el exterior.

44. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle z, 0, z^2 \rangle$, $G(u,v) = (v \cosh u, v \operatorname{senh} u, v)$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, normal apuntando hacia arriba.

45. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle 0, 0, xze^{xy} \rangle$, $z = xy$, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, normal apuntando hacia arriba.

46. $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle 0, 0, z \rangle$, $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, normal apuntando hacia arriba.

47. Calcule la carga total sobre el cilindro:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad 0 \leq z \leq H$$

si la densidad de carga en coordenadas cilíndricas es $\rho(\theta, z) = Kz^2 \cos^2 \theta$, donde K es una constante.

48. Halle la tasa de f ujo de un f uido, cuyo campo velocidad es $\mathbf{v} = \langle 2x, y, xy \rangle$ m/s, a través de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ donde $x \geq 0, y \geq 0$ y $0 \leq z \leq 4$ (distancia en metros).

49. Con $\mathbf{v}$ como en el problema 48, calcule la tasa de f ujo a través de la parte del cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ donde $x \geq 0, y \geq 0$ y $0 \leq z \leq 4$.

50. Calcule el f ujo del campo vectorial $\mathbf{E}(x,y,z) = \langle 0, 0, x \rangle$ a través de la parte del elipsoide:

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$$

donde $z \geq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. *Indicación:* use la parametrización:

$$G(r, \theta) = (3r \cos \theta, 2r \operatorname{sen} \theta, 6\sqrt{1 - r^2})$$

La circulación de fluidos, como este vórtice de agua, se analiza usando teoremas fundamentales de análisis vectorial.

18 TEOREMAS FUNDAMENTALES DE ANÁLISIS VECTORIAL

En este último capítulo, se estudian tres generalizaciones del teorema fundamental del cálculo, conocidos como el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia. Se trata de la culminación de nuestros esfuerzos para extender las ideas del cálculo en una sola variable al contexto multivariable. Sin embargo, el análisis vectorial no debe entenderse como un punto final sino como una puerta de entrada a una serie de aplicaciones, no sólo en los dominios tradicionales de la física y la ingeniería, sino también en la biología, la tierra y ciencias ambientales, donde la comprensión de los fluidos, la aerodinámica y los materiales continuos es necesaria.

18.1 Teorema de Green

En la sección 17.3, se demostró que la circulación de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero. El teorema de Green establece lo que ocurre para campos vectoriales en el plano que no sean conservativos.

Para formular el teorema de Green, se necesita introducir cierta notación. Considere un dominio $\mathcal{D}$ cuya frontera $\mathcal{C}$ es una **curva cerrada simple**, es decir, una curva que no se interseca con ella misma (figura 1). Siguiendo el convenio estándar se denotará la curva frontera $\mathcal{C}$ como $\partial\mathcal{D}$. La orientación en el sentido antihorario de $\partial\mathcal{D}$ se denomina la **orientación de la frontera**. Cuando se recorre la frontera en este sentido, el dominio queda a su izquierda (figura 1).

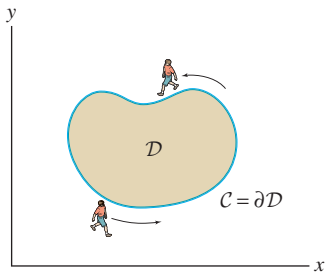


FIGURA 1 La frontera de $\mathcal{D}$ es una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ que se denota como $\partial\mathcal{D}$. La frontera está orientada en el sentido antihorario.

Recuerde que se dispone de dos notaciones para la integral de línea de $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2 \rangle$:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy$$

Si $\mathcal{C}$ está parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ para $a \le t \le b$, entonces:

$$dx = x'(t)\,dt, \qquad dy = y'(t)\,dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_a^b \left(F_1(x(t), y(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t))y'(t)\right)\,dt \qquad \boxed{1}$$

En todo este capítulo, se supondrá que las componentes de todos los campos vectoriales tienen derivadas parciales continuas, y también que $\mathcal{C}$ es suave ($\mathcal{C}$ tiene una parametrización con derivadas de todos los órdenes) o suave a trozos (una unión finita de curvas suaves unidas en, posiblemente, picos).

RECORDATORIO *La integral de línea de un campo vectorial sobre una curva se denomina la "circulación" y se suele denotar con el símbolo* $\oint$.

TEOREMA 1 El teorema de Green Sea $\mathcal{D}$ un dominio cuya frontera $\partial\mathcal{D}$ es una curva cerrada simple, orientada en el sentido antihorario. Entonces:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \qquad \boxed{2}$$

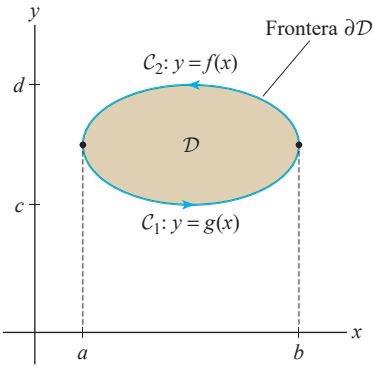


FIGURA 2 La curva frontera $\partial\mathcal{D}$ es la unión de las gráficas $y = g(x)$ e $y = f(x)$ orientada en el sentido antihorario.

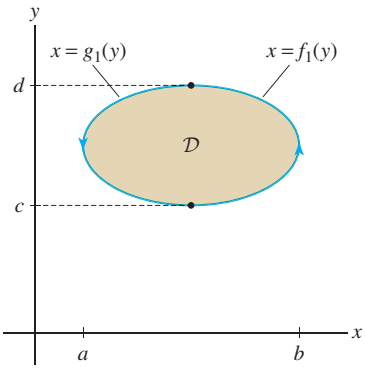


FIGURA 3 La curva frontera $\partial\mathcal{D}$ es también la unión de las gráficas de $x = g_1(x)$ y $y = f(x)$ orientadas en el sentido antihorario.

Demostración Como una demostración completa es bastante técnica, se introduce la hipótesis adicional de simplificación de que la frontera de $\mathcal{D}$ se puede expresar como la unión de dos gráficas $y = g(x)$ e $y = f(x)$ con $g(x) \le f(x)$ como en la figura 2 y también como la unión de dos gráficas $x = g_1(y)$ y $x = f_1(y)$, con $g_1(y) \le f_1(y)$ como en la figura 3.

El teorema de Green se divide en dos ecuaciones, una para F_1 y una para F_2:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_1\,dx = -\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA \qquad \boxed{3}$$

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_2\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dA \qquad \boxed{4}$$

Dicho de otro modo, el teorema de Green se obtiene sumando estas dos ecuaciones. Para demostrar la ec. (3), exprese:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_1\,dx = \oint_{\mathcal{C}_1} F_1\,dx + \oint_{\mathcal{C}_2} F_1\,dx$$

donde $\mathcal{C}_1$ es la gráfica de $y = g(x)$ y $\mathcal{C}_2$ es la gráfica de $y = f(x)$, orientadas como en la figura 2. Para calcular estas dos integrales de línea, se parametrizan las gráficas de izquierda a derecha, usando t como parámetro:

$$\begin{aligned} &\text{Gráfica de } y = g(x): && \mathbf{c}_1(t) = (t, g(t)), && a \le t \le b \\ &\text{Gráfica de } y = f(x): && \mathbf{c}_2(t) = (t, f(t)), && a \le t \le b \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}_2$ está orientada de derecha a izquierda, la integral de línea a través de $\partial\mathcal{D}$ es la diferencia:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_1\,dx = \int_{\mathbf{c}_1} F_1\,dx - \int_{\mathbf{c}_2} F_1\,dx$$

En ambas parametrizaciones, $x = t$, por lo que $dx = dt$ y, según la ec. (1):

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_1\,dx = \int_{t=a}^{b} F_1(t, g(t))\,dt - \int_{t=a}^{b} F_1(t, f(t))\,dt \qquad \boxed{5}$$

Ahora, el punto clave es aplicar el teorema fundamental del cálculo a $\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(t, y)$ como función de y manteniendo t constante:

$$F_1(t, f(t)) - F_1(t, g(t)) = \int_{y=g(t)}^{f(t)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(t, y)\,dy$$

Sustituyendo la integral a la derecha en la ec. (5), se obtiene la ec. (3):

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_1\,dx = -\int_{t=a}^{b}\int_{y=g(t)}^{f(t)} \frac{\partial F_1}{\partial y}(t, y)\,dy\,dt = -\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA$$

La ec. (4) se demuestra de manera similar, expresando $\partial\mathcal{D}$ como la unión de las gráficas de $x = f_1(y)$ y de $x = g_1(y)$ (figura 3). ■

Recuerde que si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces se cumple la condición de las derivadas parciales cruzadas:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

En tal caso, el teorema de Green simplemente confirma lo que ya se sabía: la integral de línea de un campo vectorial conservativo a lo largo de una curva cerrada es cero.

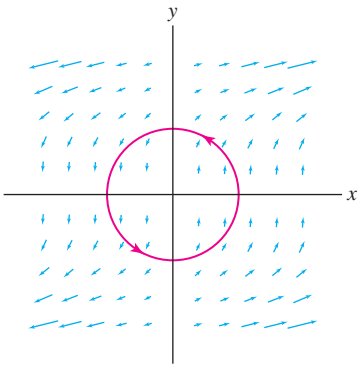


FIGURA 4 El campo vectorial $\mathbf{F} = \langle xy^2, x \rangle$.

El teorema de Green afirma que:

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

RECORDATORIO *Para integrar* $\cos^2 \theta$, *use la identidad* $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$.

EJEMPLO 1 Comprobación del teorema de Green Compruebe el teorema de Green para la integral de línea a través de la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$, orientada en el sentido antihorario (f gura 4):

$$\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,dx + x\,dy$$

Solución

Etapa 1. **Evalúe la integral de línea directamente**

Se utilizará la parametrización estándar de la circunferencia unitaria:

$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta$$
$$dx = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta \qquad dy = \cos\theta\,d\theta$$

El integrando en la integral de línea es:

$$xy^2\,dx + x\,dy = \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta(-\operatorname{sen}\theta\,d\theta) + \cos\theta(\cos\theta\,d\theta) =$$
$$= (-\cos\theta \operatorname{sen}^3\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

y

$$\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} (-\cos\theta \operatorname{sen}^3\theta + \cos^2\theta)\,d\theta =$$
$$= -\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{4}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\bigg|_0^{2\pi} =$$
$$= 0 + \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \boxed{\pi}$$

Etapa 2. **Evalúe la integral de línea mediante el teorema de Green**

En este ejemplo, $F_1 = xy^2$ y $F_2 = x$, por lo que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}xy^2 = 1 - 2xy$$

Según el teorema de Green:

$$\oint_{\mathcal{C}} xy^2\,dx + x\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_{\mathcal{D}} (1 - 2xy)\,dA$$

donde $\mathcal{D}$ es el disco $x^2 + y^2 \le 1$ limitado por $\mathcal{C}$. La integral de $2xy$ sobre $\mathcal{D}$ es cero por simetría: las contribuciones para las x positivas y negativas se cancelan. Se puede comprobar directamente:

$$\iint_{\mathcal{D}} (-2xy)\,dA = -2\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx = -\int_{x=-1}^{1} xy^2\Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

Por tanto:

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_{\mathcal{D}} 1\,dA = \text{Área}(\mathcal{D}) = \boxed{\pi}$$

Este resultado concuerda con el valor obtenido en la etapa 1, por lo que ha quedado comprobado el teorema de Green en este ejemplo. ■

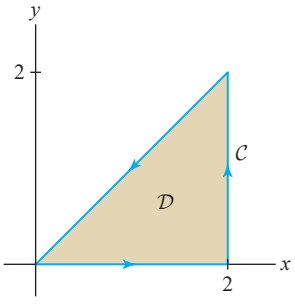


FIGURA 5 La región $\mathcal{D}$ queda descrita por $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$.

EJEMPLO 2 Cálculo de una integral de línea mediante el teorema de Green Calcule la circulación de $\mathbf{F} = \langle \operatorname{sen} x, x^2y^3 \rangle$ a lo largo de la trayectoria triangular $\mathcal{C}$ de la f gura 5.

Solución Para calcular la integral de línea directamente, se debería parametrizar cada uno de los tres lados del triángulo. En lugar de esto, se va a aplicar el teorema de Green al dominio $\mathcal{D}$ limitado por el triángulo. Este dominio queda descrito por $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$.

Aplicando el teorema de Green, se obtiene:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} x^2y^3 - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} x = 2xy^3$$

$$\oint_C \operatorname{sen} x\,dx + x^2y^3\,dy = \iint_{\mathcal{D}} 2xy^3\,dA = \int_0^2 \int_{y=0}^{x} 2xy^3\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}xy^4\Big|_0^x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^5\,dx = \frac{1}{12}x^6\Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

Cuando se aplica el teorema de Green a $\mathbf{F} = \langle -y, x\rangle$ se obtiene una fórmula para el área del dominio $\mathcal{D}$ limitado por una curva cerrada simple $\mathcal{C}$ (f gura 6). Se tiene:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 2$$

Según el teorema de Green, $\oint_C -y\,dx + x\,dy = \iint_{\mathcal{D}} 2\,dx\,dy = 2\,\text{Área}(\mathcal{D})$. Se obtiene:

$$\text{Área delimitada por } \mathcal{C} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \qquad \boxed{6}$$

Esta importante fórmula nos dice cómo calcular un área delimitada realizando medidas sólo en la frontera. Éstas son las bases matemáticas del **planímetro**, un dispositivo que calcula el área de una f gura irregular cuando se traza la frontera con un puntero situado al f nal de un brazo móvil (f gura 7).

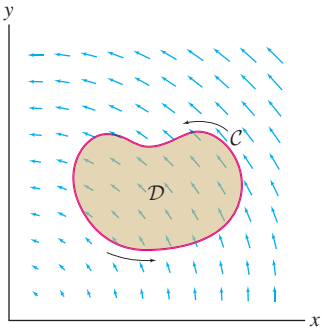


FIGURA 6 La integral de línea $\oint_C x\,dy - y\,dx$ es igual a dos veces el área delimitada por $\mathcal{C}$.

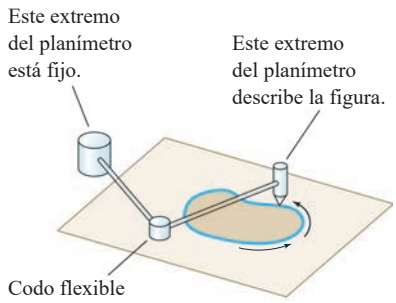


FIGURA 7 Un planímetro es un dispositivo mecánico que se utiliza para medir las áreas de f guras irregulares.

"Afortunadamente (para mí), era el único que había oído hablar del teorema de Green, ... y, aunque no era capaz de hacer contribuciones constructivas, sí que podía escuchar, asentir con la cabeza y exclamar de admiración en los momentos correctos".

John M. Crawford, geofísico y director de investigación de Conoco Oil, 1951-1971, relatando su primera entrevista de trabajo en 1943, cuando un científico que visitaba la compañía le habló sobre las aplicaciones de las matemáticas a la prospección petrolífera.

EJEMPLO 3 Cálculo del área mediante el teorema de Green Calcule el área de la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ utilizando una integral de línea.

Solución Parametrice la frontera de la elipse por:

$$x = a\cos\theta \qquad y = b\operatorname{sen}\theta \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

y aplique la ec. (6):

$$x\,dy - y\,dx = (a\cos\theta)(b\cos\theta\,d\theta) - (b\operatorname{sen}\theta)(-a\operatorname{sen}\theta\,d\theta) =$$

$$= ab(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = ab\,d\theta$$

$$\text{Área delimitada} = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab$$

Se trata de la fórmula estándar para el área de una elipse.

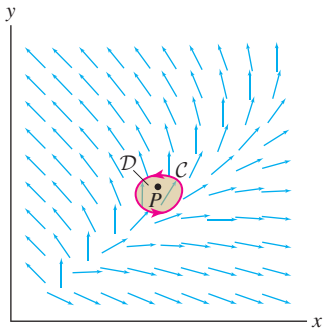


FIGURA 8 La circulación del **F** a lo largo de $\mathcal{C}$ es aproximadamente $\text{rot}_z(\mathbf{F})(P) \cdot \text{Área}(\mathcal{D})$.

UN APUNTE CONCEPTUAL ¿Cuál es el significado del integrando en el teorema de Green? Por convenio, se denota este integrando como $\text{rot}_z(\mathbf{F})$:

$$\text{rot}_z(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

En la sección 18.3, se ha visto que $\text{rot}_z(\mathbf{F})$ es la componente z del campo vectorial $\text{rot}(\mathbf{F})$, denominado el "rotacional" de **F**. Ahora, aplique el teorema de Green a un pequeño dominio $\mathcal{D}$ con curva de frontera cerrada y simple y sea P un punto de $\mathcal{D}$. Como $\text{rot}_z(\mathbf{F})$ es una función continua, su valor no cambia demasiado sobre D si $\mathcal{C}$ es suficientemente pequeña, por lo que, en primera aproximación, se puede sustituir $\text{rot}_z(\mathbf{F})$ por el valor constante $\text{rot}_z(\mathbf{F})(P)$ (figura 8). El teorema de Green da lugar a la siguiente aproximación para la circulación:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{\mathcal{D}} \text{rot}_z(\mathbf{F})\, dA \approx \\ &\approx \text{rot}_z(\mathbf{F})(P) \iint_{\mathcal{D}} dA \approx \\ &\approx \text{rot}_z(\mathbf{F})(P) \cdot \text{Área}(\mathcal{D}) \end{aligned} \qquad \boxed{7}$$

Dicho de otro modo, *la circulación a lo largo de una pequeña curva cerrada simple $\mathcal{C}$ es, en aproximación de primer orden, igual al rotacional multiplicado por el área delimitada.* Por tanto, se puede pensar en $\text{rot}_z(\mathbf{F})(P)$ como en la **circulación por unidad de área delimitada**.

UN APUNTE GRÁFICO Si se piensa en **F** como en el campo velocidad de un fluido, entonces se puede medir el rotacional mediante la colocación de una rueda de palas pequeñas en un punto P del torrente de flujo y observar la rapidez con que ésta gira (figura 9). Como el fluido empuja cada pala para moverse con una velocidad igual a la componente tangencial de **F**, se puede suponer que la rueda propiamente dicha gira con una velocidad v_a igual a la *componente tangencial media* de **F**. Si la pala es una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio r (y por tanto de longitud $2\pi r$), entonces la componente tangencial media de la velocidad es:

$$v_a = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\mathcal{C}_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Por otra parte, la pala limita un área igual a πr^2 y, para valores de r pequeños, se puede aplicar la aproximación (7):

$$v_a \approx \frac{1}{2\pi r}(\pi r^2)\,\text{rot}_z(\mathbf{F})(P) = \left(\frac{1}{2}r\right)\text{rot}_z(\mathbf{F})(P)$$

Así, si un objeto se desplaza sobre una circunferencia de radio r a velocidad v_a, su velocidad angular (en radianes por unidad de tiempo) es $v_a/r \approx \frac{1}{2}\,\text{rot}_z(\mathbf{F})(P)$. Por tanto, *la velocidad angular de la rueda de palas es, aproximadamente, la mitad del valor del rotacional.*

Velocidad angular *Un arco de ℓ metros sobre una circunferencia de r metros de radio tiene una medida en radianes igual a ℓ/r. Por tanto, un objeto que se desplace sobre la circunferencia a velocidad de v metros por segundo recorre v/r radianes por segundo. Dicho de otro modo, la velocidad angular del objeto es v/r.*

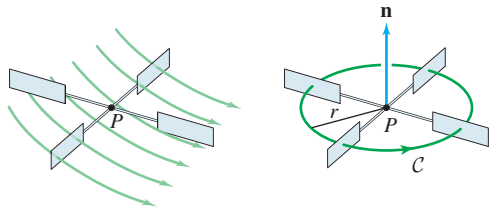
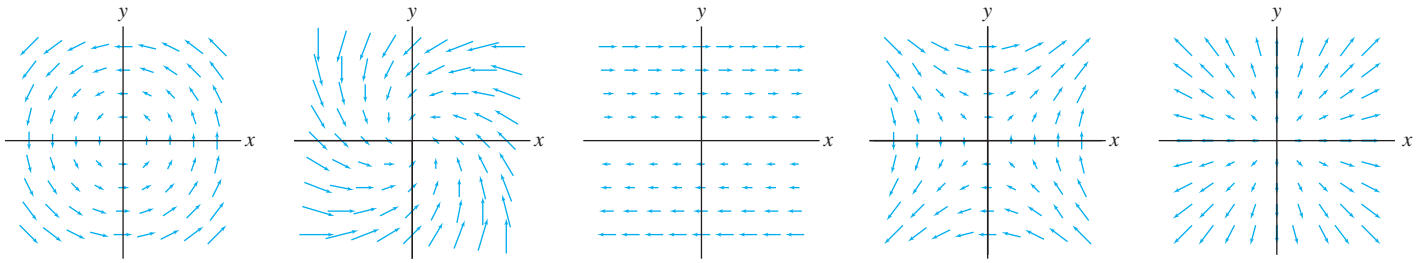


FIGURA 9 El rotacional es aproximadamente igual a la mitad de la velocidad angular de una pequeña rueda con palas situada en P.

La figura 10 muestra campos vectoriales de rotacional constante. El campo (A) describe un fluido girando en el sentido antihorario, alrededor del origen. El campo (B) describe un fluido que se mueve en espiral hacia el origen. Sin embargo, un rotacional diferente de cero no significa que el fluido se encuentre en rotación. Sólo significa que una rueda de palas pequeñas giraría si se coloca en el fluido. El campo (C) es un ejemplo de **flujo de tensiones** (también conocido como un flujo de Couette). Tiene rotacional diferente de cero, pero no gira respecto a ningún punto. Compare con los campos de las figuras (D) y (E), que tienen rotacional cero.



(A) $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$, $\operatorname{rot}_z(\mathbf{F}) = 2$ (B) $\mathbf{F} = \langle -x - y, x - y \rangle$, $\operatorname{rot}_z(\mathbf{F}) = 2$ (C) $\mathbf{F} = \langle y, 0 \rangle$, $\operatorname{rot}_z(\mathbf{F}) = -1$ (D) $\mathbf{F} = \langle y, x \rangle$, $\operatorname{rot}_z(\mathbf{F}) = 0$ (E) $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$, $\operatorname{rot}_z(\mathbf{F}) = 0$

FIGURA 10

Aditividad de la circulación

La circulación a través de una curva cerrada cumple una propiedad importante de aditividad: si se descompone un domino $\mathcal{D}$ en dos (o más) dominios que no se superpongan $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ de manera que no intersequen en parte de sus fronteras, como en la figura 11, entonces:

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial \mathcal{D}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial \mathcal{D}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad 8$$

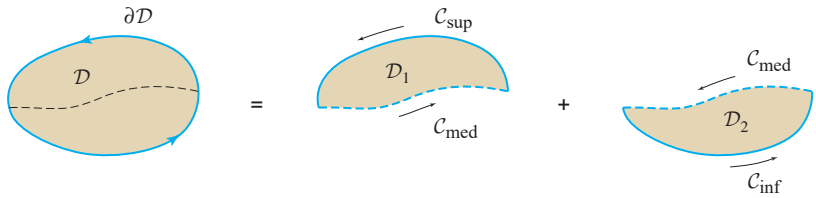


FIGURA 11 El dominio $\mathcal{D}$ es la unión de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$.

Para comprobar esta ecuación, observe en primer lugar que:

$$\oint_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_{\text{sup}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_{\text{inf}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

con $\mathcal{C}_{\text{sup}}$ y $\mathcal{C}_{\text{inf}}$ como en la figura 11. Ahora observe que el segmento en trazos discontinuos $\mathcal{C}_{\text{med}}$ se tiene tanto en $\partial \mathcal{D}_1$ como en $\partial \mathcal{D}_2$ pero con orientaciones opuestas. Si $\mathcal{C}_{\text{med}}$ está orientada de derecha a izquierda, entonces:

$$\oint_{\partial \mathcal{D}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_{\text{sup}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{C}_{\text{med}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\oint_{\partial \mathcal{D}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_{\text{inf}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_{\text{med}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

La ecuación ec. (8) se obtiene al sumar estas dos ecuaciones:

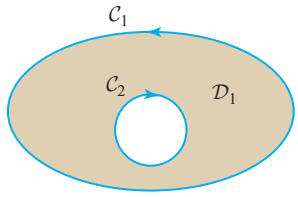
$$\oint_{\partial \mathcal{D}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\partial \mathcal{D}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_{\text{sup}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathcal{C}_{\text{inf}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Una formulación más general del teorema de Green

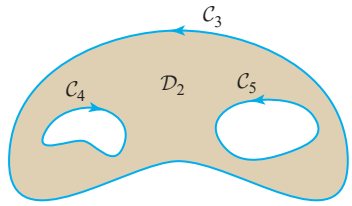
Considere un domino $\mathcal{D}$ cuya frontera esté formada por más de una curva cerrada simple, como en la f gura 12. Como antes, $\partial\mathcal{D}$ denota la frontera de $\mathcal{D}$ con su orientación de frontera. Dicho de otro modo, *la región queda a la izquierda cuando la curva se recorre en la dirección especif cada por la orientación*. Para los dominios de la f gura 12:

$$\partial\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 \qquad \partial\mathcal{D}_2 = \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 - \mathcal{C}_5$$

La curva $\mathcal{C}_5$ aparece con un signo menos porque está orientada en el sentido antihorario, pero su orientación de frontera requiere una orientación en el sentido horario.



(A) Frontera orientada de $\mathcal{D}_1$ es $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$



(B) Frontera orientada de $\mathcal{D}_2$ es $\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 - \mathcal{C}_5$

FIGURA 12

El teorema de Green continua siendo válido en dominios de este tipo, más generales:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \qquad \boxed{9}$$

Se demuestra la igualdad descomponiendo $\mathcal{D}$ en pequeños dominios, tales que cada uno de ellos se encuentre limitado por un curva cerrada simple. Para ilustrarlo, considere la región $\mathcal{D}$ de la f gura 13. Descomponga $\mathcal{D}$ en los dominios $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$. Entonces:

$$\partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{D}_1 + \partial\mathcal{D}_2$$

pues los lados comunes a $\partial\mathcal{D}_1$ y $\partial\mathcal{D}_2$ aparecen con orientaciones opuestas y, en consecuencia, se cancelan. Se puede aplicar la versión previa del teorema de Green tanto al dominio $\mathcal{D}_1$ como al $\mathcal{D}_2$ con el resultado:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial\mathcal{D}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\partial\mathcal{D}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \\
&= \iint_{\mathcal{D}_1} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA + \iint_{\mathcal{D}_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \\
&= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA
\end{aligned}$$

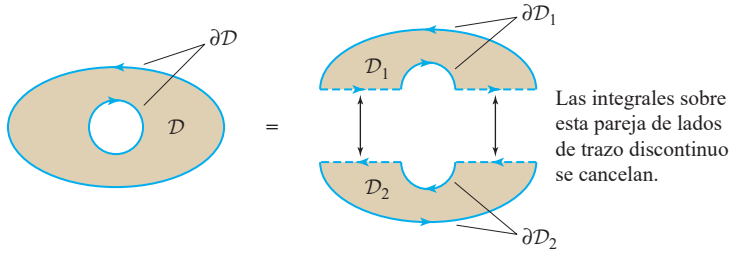


FIGURA 13 La frontera de $\partial\mathcal{D}$ es la suma $\partial\mathcal{D}_1 + \partial\mathcal{D}_2$ porque los lados rectos se cancelan.

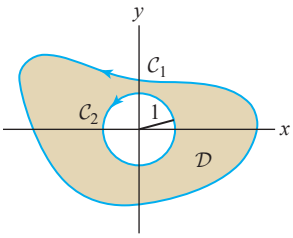


FIGURA 14 El área de $\mathcal{D}$ es 8 y $\mathcal{C}_2$ es una circunferencia de radio 1.

EJEMPLO 4 Calcule $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F} = \langle x - y, x + y^3 \rangle$ y $\mathcal{C}_1$ es la curva de frontera exterior orientada en el sentido antihorario. Suponga que el área del dominio $\mathcal{D}$ de la figura 14 es 8.

Solución No se puede calcular la integral de línea sobre $\mathcal{C}_1$ directamente porque la curva $\mathcal{C}_1$ no se especifica. Sin embargo, $\partial\mathcal{D} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ por lo que el teorema de Green da lugar a:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA \qquad \boxed{10}$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y) = 1 - (-1) = 2$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \iint_{\mathcal{D}} 2\, dA = 2\,\text{Area}(\mathcal{D}) = 2(8) = 16$$

Por tanto, según la ec. (10):

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 16 \qquad \boxed{11}$$

Para calcular la segunda integral, parametrice la circunferencia unitaria $\mathcal{C}_2$ por $\mathbf{c}(t) =$ $= (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}'(t) &= \langle \cos\theta - \operatorname{sen}\theta, \cos\theta + \operatorname{sen}^3\theta \rangle \cdot \langle -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta \rangle = \\ &= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta = \\ &= 1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta \end{aligned}$$

Las integrales de $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta$ sobre $[0, 2\pi]$ son ambas cero, por lo que:

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

La ec. (11) da lugar a $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 16 + 2\pi$. ■

18.1 RESUMEN

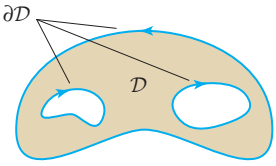


FIGURA 15 La orientación de frontera es aquella tal que la región queda a su izquierda cuando recorre la curva.

- Se dispone de dos notaciones para la integral de línea de un campo vectorial:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathcal{C}} F_1\, dx + F_2\, dy$$

- $\partial\mathcal{D}$ denota la frontera de $\mathcal{D}$ con orientación de frontera (figura 15).
- El teorema de Green:

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} F_1\, dx + F_2\, dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

- Fórmula para el área de la región $\mathcal{D}$ delimitada por $\mathcal{C}$:

$$\text{Área}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x\, dy - y\, dx$$

- La cantidad:

$$\text{rot}_z(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

se interpreta como la *circulación por unidad de área*. Si $\mathcal{D}$ es un dominio pequeño, de frontera $\mathcal{C}$, entonces para cualquier $P \in \mathcal{D}$, se verif ca:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx + F_2\,dy \approx \text{rot}_z(\mathbf{F})(P) \cdot \text{Área}(\mathcal{D})$$

18.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Qué campo vectorial $\mathbf{F}$ se está integrando en la integral de línea $\oint x^2\,dy - e^y\,dx$?

2. Dibuje un dominio con la forma de una elipse e indique con una f echa la orientación de frontera para la curva de frontera. Haga lo mismo para una corona circular (la región comprendida entre dos círculos concéntricos).

3. La circulación de un campo vectorial conservativo a lo largo de una curva cerrada es cero. ¿Es consistente esta af rmación con el teorema de Green? Justif que su respuesta.

4. Indique cuál de los siguientes campos vectoriales cumple la siguiente propiedad: para cualquier curva simple cerrada $\mathcal{C}$, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es igual al área delimitada por $\mathcal{C}$.

(a) $\mathbf{F} = \langle -y, 0 \rangle$

(b) $\mathbf{F} = \langle x, y \rangle$

(c) $\mathbf{F} = \langle \text{sen}(x^2), x + e^{y^2} \rangle$

Problemas

1. Compruebe el teorema de Green para la integral de línea $\oint_{\mathcal{C}} xy\,dx + y\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria, orientada en sentido antihorario.

2. Sea $I = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F} = \langle y + \text{sen}\,x^2, x^2 + e^{y^2} \rangle$ y $\mathcal{C}$ es la circunferencia de radio 4 centrada en el origen.

(a) ¿Qué resulta más sencillo, evaluar I directamente o utilizar el teorema de Green?

(b) Evalúe I por el método más sencillo.

En los problemas 3-10, use el teorema de Green para evaluar la integral de línea. Oriente la curva en sentido antihorario si no se da ninguna otra indicación.

3. $\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x^2\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es la frontera del cuadrado unitario $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

4. $\oint_{\mathcal{C}} e^{2x+y}\,dx + e^{-y}\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

5. $\oint_{\mathcal{C}} x^2\,y\,dx$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen.

6. $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F} = \langle x + y, x^2 - y \rangle$ y $\mathcal{C}$ es la frontera de la región delimitada por $y = x^2$ y por $y = \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 1$.

7. $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F} = \langle x^2, x^2 \rangle$ y $\mathcal{C}$ está formada por los arcos $y = x^2$ e $y = x$ para $0 \le x \le 1$.

8. $\oint_{\mathcal{C}} (\ln x + y)\,dx - x^2\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es el rectángulo de vértices $(1,1)$, $(3,1)$, $(1,4)$ y $(3,4)$.

9. La integral de línea de $\mathbf{F} = \langle e^{x+y}, e^{x-y} \rangle$ a lo largo de la curva (con orientación en sentido horario) formada por los segmentos rectilíneos que unen los puntos $(0,0)$, $(2,2)$, $(4,2)$, $(2,0)$ y de nuevo a $(0,0)$ (tenga en cuenta la orientación).

10. $\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + (x^2 + x)\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es la trayectoria de la f gura 16.

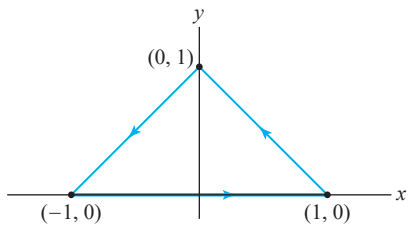


FIGURA 16

11. Sea $\mathbf{F} = \langle 2xe^y, x + x^2e^y \rangle$ y sea $\mathcal{C}$ la cuarta parte de la circunferencia que va desde A a B en la f gura 17. Evalúe $I = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ de la siguiente manera:

(a) Halle una función $V(x,y)$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \nabla V$, donde $\mathbf{G} = \langle 0, x \rangle$.

(b) Pruebe que las integrales de línea de $\mathbf{G}$ a lo largo de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son cero.

(c) Evalúe I. *Indicación:* use el teorema de Green para probar que:

$$I = V(B) - V(A) + 4\pi$$

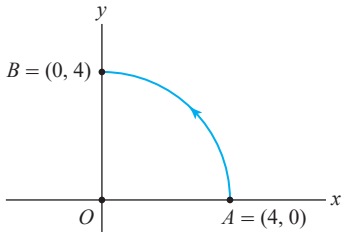


FIGURA 17

12. Calcule la integral de línea de $\mathbf{F} = \langle x^3, 4x \rangle$ a lo largo de la trayectoria que va de A a B de la figura 18. Use el teorema de Green para relacionar esta integral de línea con la integral de línea a lo largo de la trayectoria vertical que va de B a A.

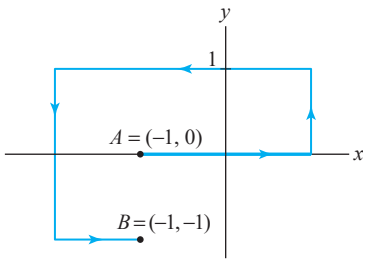


FIGURA 18

13. Evalúe $I = \int_C (\operatorname{sen} x + y)\,dx + (3x + y)\,dy$ para la trayectoria no cerrada $ABCD$ de la figura 19. Use el método del problema 12.

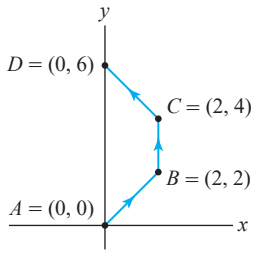


FIGURA 19

14. Pruebe que si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, entonces:

$$\oint_{\mathcal{C}} -y\,dx = \oint_{\mathcal{C}} x\,dy$$

y que ambas integrales son igual al área delimitada por $\mathcal{C}$.

En los problemas 15-18, use la ec. (6) para calcular el área de la región dada.

15. La circunferencia de radio 3 centrada en el origen.

16. El triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1).

17. La región comprendida entre el eje x y la cicloide parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ para $0 \le t \le 2\pi$ (figura 20).

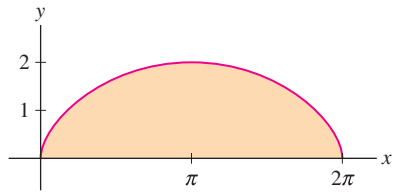


FIGURA 20 Cicloide.

18. La región comprendida entre la gráfica de $y = x^2$ y el eje x, para $0 \le x \le 2$.

19. Sea $x^3 + y^3 = 3xy$ el **folium de Descartes** (figura 21).

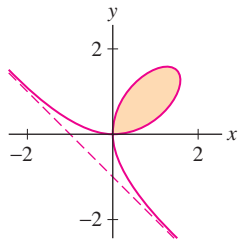


FIGURA 21 Folium de Descartes.

(a) Pruebe que el folium admite una parametrización en términos de $t = y/x$ dada por:

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3} \qquad (-\infty < t < \infty) \quad (t \neq -1)$$

(b) Pruebe que:

$$x\,dy - y\,dx = \frac{9t^2}{(1 + t^3)^2}\,dt$$

Indicación: por la regla del cociente:

$$x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right) = x\,dy - y\,dx$$

(c) Halle el área del bucle del folium.

20. Halle una parametrización de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = xy$ (vea la figura 22) utilizando $t = y/x$ como parámetro (vea el problema 19). A continuación, use la ec. (6) para hallar el área de un bucle de la lemniscata.

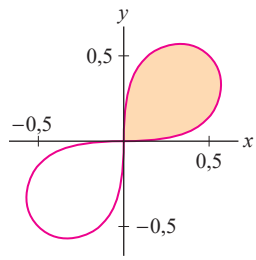


FIGURA 22 Lemniscata.

21. El centroide mediante mediciones en la frontera El centroide (vea la sección 16.5) de un dominio $\mathcal{D}$ limitado por una cuerda simple cerrada $\mathcal{C}$ es el punto de coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}) = (M_y/M, M_x/M)$, donde M es el área de $\mathcal{D}$ y los momentos se def nen como:

$$M_x = \iint_{\mathcal{D}} y\,dA, \qquad M_y = \iint_{\mathcal{D}} x\,dA$$

Pruebe que $M_x = \oint_{\mathcal{C}} xy\,dy$. Halle una expresión similar para M_y.

22. Use el resultado del problema 21 para calcular los momentos de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$ como integrales de línea. Compruebe que el centroide es $(0, 4R/(3\pi))$.

23. Sea $\mathcal{C}_R$ la circunferencia de radio R centrada en el origen. Use la formulación general del teorema de Green para determinar $\oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F}$ es un campo vectorial tal que $\oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 9$ y $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = x^2 + y^2$ para (x, y) en la corona circular $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

24. Considere la f gura 23 y suponga que $\oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 12$. Use el teorema de Green para determinar $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, suponiendo que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x} = -3$ en $\mathcal{D}$.

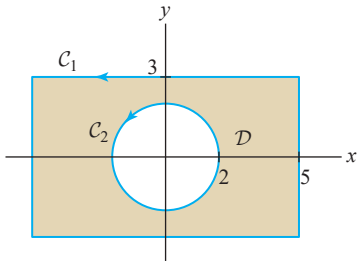


FIGURA 23

25. Considere la f gura 24 y suponga que:

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 3\pi \qquad \oint_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi$$

Use el teorema de Green para determinar la circulación de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{C}_1$, suponiendo que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x} = 9$ sobre la región sombreada.

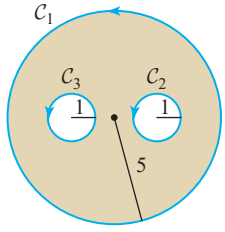


FIGURA 24

26. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial vórtice:

$$\mathbf{F} = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$$

En la sección 16.3 se comprobó que $\int_{\mathcal{C}_R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi$, donde $\mathcal{C}_R$ es la circunferencia de radio R centrada en el origen. Demuestre que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi$ para cualquier curva simple cerrada $\mathcal{C}$ en cuyo interior se encuentre el origen (f gura 25). *Indicación:* aplique la formulación general del teorema de Green al dominio comprendido entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_R$, donde R es suf cientemente pequeño para que $\mathcal{C}_R$ esté contenida en $\mathcal{C}$.

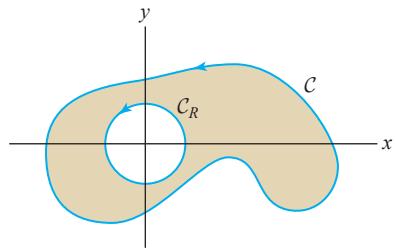


FIGURA 25

Los problemas 27-30 hacen referencia al apunte conceptual que trata sobre el rotacional, def nido como:

$$\text{rot}_z(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

27. Para los campos vectoriales (A)-(D) de la f gura 26, determine si el rot$_z$ en el origen es positivo, negativo o cero.

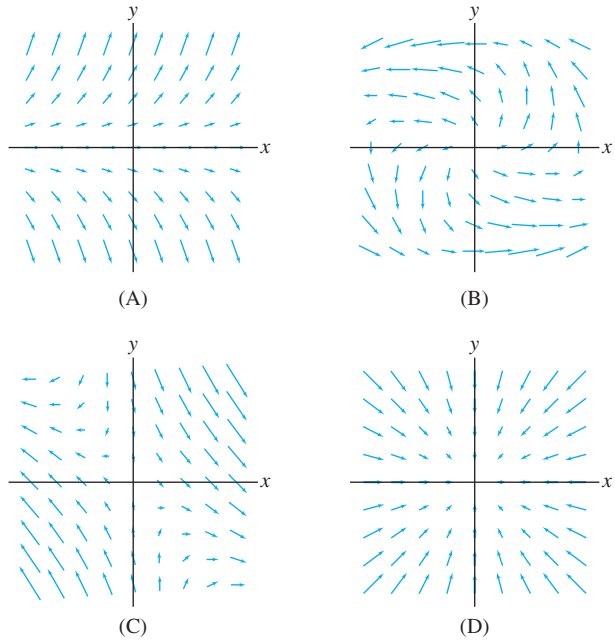


FIGURA 26

28. Estime la circulación de un campo vectorial $\mathbf{F}$ alrededor de una circunferencia de radio $R = 0{,}1$, suponiendo que $\text{rot}_z(\mathbf{F})$ alcanza el valor 4 en el centro de la circunferencia.

29. Estime $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F} = \langle x + 0{,}1y^2, y - 0{,}1x^2 \rangle$ y $\mathcal{C}$ limita una pequeña región de área 0,25 que contiene al punto $P = (1, 1)$.

30. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial velocidad. Estime la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de una circunferencia de radio $R = 0{,}05$ y centro P, suponiendo que $\text{rot}_z(\mathbf{F})(P) = -3$. ¿En qué dirección giraría una pequeña pala situada en P? ¿Cuál sería su rapidez (en radianes por segundo) si $\mathbf{F}$ se expresa en metros por segundo?

31. Sea $\mathcal{C}_R$ la circunferencia de radio R centrada en el origen. Use el teorema de Green para hallar el valor de R que maximiza $\oint_{\mathcal{C}_R} y^3\,dx + x\,dy$.

32. Área de un polígono El teorema de Green conduce a una fórmula para el área de un polígono.

(a) Sea $\mathcal{C}$ el segmento rectilíneo que une (x_1, y_1) a (x_2, y_2). Pruebe que:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

(b) Demuestre que el área del polígono de vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es igual [considerando $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$] a:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)$$

33. Use el resultado del problema 32 para calcular el área de los polígonos de la figura 27. Compruebe su resultado para el área de un triángulo en (A) mediante geometría analítica.

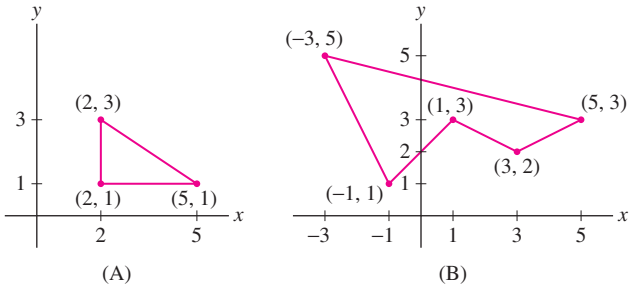


FIGURA 27

Problemas 34-39: en la sección 17.2, se definió el flujo de $\mathbf{F}$ *a través de una curva* $\mathcal{C}$ *(figura 28) como la integral de la componente normal de* $\mathbf{F}$ *a través de* $\mathcal{C}$ *y se probó que, si* $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ *es una parametrización de* $\mathcal{C}$ *para* $a \le t \le b$*, entonces el flujo es igual a:*

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{n}(t)\,dt$$

donde $\mathbf{n}(t) = \langle y'(t), -x'(t) \rangle$.

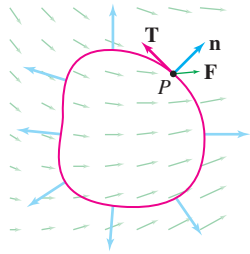


FIGURA 28 El flujo de $\mathbf{F}$ es la integral de la componente normal $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ a través de la curva.

34. Pruebe que el flujo de $\mathbf{F} = \langle P, Q \rangle$ a través de $\mathcal{C}$ es igual a

$$\oint_{\mathcal{C}} P\,dy - Q\,dx.$$

35. Defina $\text{div}(\mathbf{F}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$. Use el teorema de Green para demostrar que para cualquier curva cerrada simple $\mathcal{C}$, se verifica:

$$\text{Flujo a través de } \mathcal{C} = \iint_{\mathcal{D}} \text{div}(\mathbf{F})\,dA \qquad \boxed{12}$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por $\mathcal{C}$. Se trata de una versión en dos dimensiones del **teorema de la divergencia** que se verá en la sección 18.3.

36. Use la ec. (12) para calcular el flujo de $\mathbf{F} = \langle 2x + y^3, 3y - x^4 \rangle$ a través de la circunferencia unitaria.

37. Use la ec. (12) para calcular el flujo de $\mathbf{F} = \langle \cos y, \operatorname{sen} y \rangle$ a través del cuadrado $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

38. Si $\mathbf{v}$ es el campo velocidad de un fluido, el flujo de $\mathbf{v}$ a través de $\mathcal{C}$ es igual a la tasa de flujo (cantidad de flujo que pasa a través de $\mathcal{C}$ en m^2/s). Halle la tasa de flujo a través de la circunferencia de centro 2 y centrada en el origen si $\text{div}(\mathbf{v}) = x^2$.

39. Una estampida de búfalos (figura 29) se puede describir mediante un campo vectorial velocidad $\mathbf{F} = \langle xy - y^3, x^2 + y \rangle$ km/h en la región $\mathcal{D}$ definida por $2 \le x \le 3$, $2 \le y \le 3$ en unidades de kilómetros (figura 30). Suponiendo una densidad de $\rho = 500$ búfalos por kilómetro cuadrado, use la ec. (12) para determinar el número neto de búfalos que salen o entran de $\mathcal{D}$ por minuto (igual a ρ por el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de $\mathcal{D}$).

FIGURA 29 Estampida de búfalos.

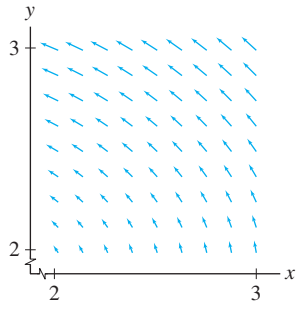


FIGURA 30 El campo vectorial $\mathbf{F} = \langle xy - y^3, x^2 + y \rangle$.

Problemas avanzados

En los problemas 40-43, se def ne el **operador de Laplace** Δ *como:*

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \qquad \boxed{13}$$

Para cualquier campo vectorial $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2\rangle$*, def na el campo vectorial conjugado como* $\mathbf{F}^* = \langle -F_2, F_1\rangle$.

40. Pruebe que si $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, entonces $\text{rot}_z(\mathbf{F}^*) = \Delta\varphi$.

41. Sea $\mathbf{n}$ el vector normal unitario apuntando hacia el exterior de una curva cerrada simple $\mathcal{C}$. La **derivada normal** de una función φ, que se denota, $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}$, es la derivada direccional $D_{\mathbf{n}}(\varphi) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$. Demuestre que:

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\, ds = \iint_{\mathcal{D}} \Delta\varphi\, dA$$

donde $\mathcal{D}$ es el dominio limitado por una curva cerrada simple $\mathcal{C}$. *Indicación:* sea $\mathbf{F} = \nabla\varphi$. Demuestre que $\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{T}$ donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario y aplique el teorema de Green.

42. Sea $P = (a, b)$ y sea $\mathcal{C}_r$ la circunferencia de radio r y centro en P. El valor medio de una función continua φ sobre $\mathcal{C}_r$ se def ne como la integral:

$$I_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(a + r\cos\theta, b + r\,\text{sen}\,\theta)\, d\theta$$

(a) Pruebe que:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}(a + r\cos\theta, b + r\,\text{sen}\,\theta) = \\ = \frac{\partial\varphi}{\partial r}(a + r\cos\theta, b + r\,\text{sen}\,\theta)$$

(b) Derive bajo el signo integral y demuestre que:

$$\frac{d}{dr}I_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathcal{C}_r} \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\, ds$$

(c) Aplique el problema 41 para deducir que:

$$\frac{d}{dr}I_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r}\iint_{\mathcal{D}(r)} \Delta\varphi\, dA$$

donde $\mathcal{D}(r)$ es el interior de $\mathcal{C}_r$.

43. Demuestre que $m(r) \le I_\varphi(r) \le M(r)$, donde $m(r)$ y $M(r)$ son los valores mínimo y máximo de φ sobre $\mathcal{C}_r$. A continuación, aplique la continuidad de φ para demostrar que $\lim_{r\to 0} I_\varphi(r) = \varphi(P)$.

En los problemas 44 y 45, sea $\mathcal{D}$ *la región delimitada por una curva cerrada simple* $\mathcal{C}$*. Se dice que una función* $\varphi(x, y)$ *sobre* $\mathcal{D}$ *(cuyas derivadas parciales de segundo orden existen y son continuas) es* **armónica** *si* $\Delta\varphi = 0$*, donde* $\Delta\varphi$ *es el operador de def nido en la ec. (13).*

44. Use los resultados de los problemas 42 y 43 para demostrar la **propiedad del valor medio** de las funciones armónicas: si φ es armónica, entonces $I_\varphi(r) = \varphi(P)$ para todo r.

45. Pruebe que $f(x, y) = x^2 - y^2$ es armónica. Compruebe la propiedad del valor medio para $f(x, y)$ directamente [desarrolle $f(a+r\cos\theta, b+r\,\text{sen}\,\theta)$ como una función de θ y calcule $I_\varphi(r)$]. Pruebe que $x^2 + y^2$ no es armónica, y que no cumple la propiedad del valor medio.

18.2 Teorema de Stokes

El teorema teorema de Stokes es una extensión del teorema de Green a tres dimensiones, en el que la circulación se relaciona con una integral de superf cie en $\mathbb{R}^3$ (en lugar de con una integral doble en el plano). Para formularlo, se va a introducir alguna notación y terminología necesarias.

La f gura 1 muestra tres superf cies con diferentes tipos de fronteras. La frontera de una superf cie se denota como $\partial\mathcal{S}$. Observe que la frontera de (A) es una única curva cerrada simple y que la frontera de (B) está formada por tres curvas cerradas. La superf cie en (C) se denomina **superf cie cerrada** porque su frontera es vacía. En tal caso, se escribe $\partial\mathcal{S} = \emptyset$.

(A) La frontera está formada por una única curva cerrada simple

(B) La frontera está formada por tres curvas cerradas

(C) Superficie cerrada (la frontera es vacía)

FIGURA 1 Superf cies y sus fronteras.

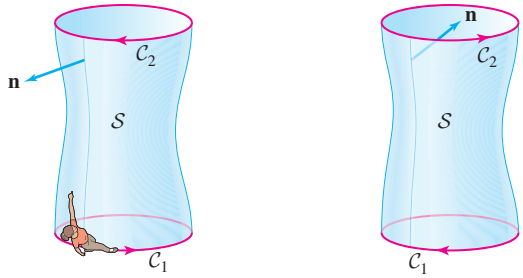


FIGURA 2 La orientación de la frontera $\partial\mathcal{S}$ para cada una de las dos orientaciones posibles de $\mathcal{S}$.

Recuerde de la sección 17.5 que una orientación es una elección de un vector normal en cada punto de la superf cie $\mathcal{S}$, que varía de forma continua. Cuando $\mathcal{S}$ está orientada, se puede especif car una orientación de $\partial\mathcal{S}$, denominada la **orientación de frontera**. Imagine que usted es un vector normal unitario que camina a lo largo de la curva de la frontera. La orientación de frontera es la dirección para la que la superf cie queda a su izquierda cuando usted va caminando. Por ejemplo, la frontera de la superf cie de la f gura 2 está formada por dos curvas, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. En (A), el vector normal apunta hacia el exterior. La mujer (que representa al vector normal) camina a lo largo de $\mathcal{C}_1$ y deja a la superf cie a su izquierda, por lo que camina en el sentido positivo. La curva $\mathcal{C}_2$ está orientada en el sentido opuesto, porque ella tendría que caminar a lo largo de $\mathcal{C}_2$ en ese sentido para mantener la superf cie a su izquierda. Las orientaciones de frontera en (B) están invertidas porque se ha elegido el vector normal opuesto para orientar la superf cie.

Sólo queda def nir el rotacional. El **rotacional** del campo vectorial $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ es el campo vectorial def nido mediante el determinante simbólico:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

De forma más compacta, el rotacional es el producto vectorial simbólico:

$$\boxed{\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}}$$

donde ∇ es operador "del" (también llamado "nabla"):

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

En términos de componentes, rot($\mathbf{F}$) es el campo vectorial:

$$\boxed{\text{rot}(\mathbf{F}) = \left\langle \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right\rangle}$$

Es inmediato comprobar que el rotacional cumple las reglas de **linealidad**:

$$\text{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \text{rot}(\mathbf{F}) + \text{rot}(\mathbf{G})$$

$$\text{rot}(c\mathbf{F}) = c\ \text{rot}(\mathbf{F}) \qquad (c \text{ constante cualquiera})$$

EJEMPLO 1 Cálculo del rotacional Calcule el rotacional de $\mathbf{F} = \langle xy, e^x, y + z \rangle$.

Solución Se calculará el rotacional como el determinante simbólico:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & e^x & y+z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(y+z) - \frac{\partial}{\partial z}e^x\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(y+z) - \frac{\partial}{\partial z}xy\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}e^x - \frac{\partial}{\partial y}xy\right)\mathbf{k} =$$

$$= \mathbf{i} + (e^x - x)\mathbf{k}$$

EJEMPLO 2 El rotacional de los campos vectoriales conservativos es cero Compruebe que:

$$\text{Si } \mathbf{F} = \nabla V, \text{ entonces } \text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}. \quad \text{Es decir, } \quad \text{rot}(\nabla V) = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Solución El rotacional de un campo vectorial es cero si:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

Pero estas ecuaciones son equivalentes a la condición de las derivadas parciales cruzadas que cumple cualquier campo vectorial conservativo $\mathbf{F} = \nabla V$.

En el siguiente teorema, se supone que $\mathcal{S}$ es una superf cie orientada de parametrización $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$, donde $\mathcal{D}$ es un dominio en el plano limitado por una curva suave, cerrada y simple, y que Φ es inyectiva y regular, salvo quizás en la frontera de $\mathcal{D}$. De forma más general, $\mathcal{S}$ podría ser unión de un número f nito de superf cies de este tipo. Las superf cies que se consideran en aplicaciones, como esferas, cubos y gráf cas de funciones, cumplen estas condiciones.

El rotacional mide en cuánto $\mathbf{F}$ *deja de ser conservativo. Si* $\mathbf{F}$ *es conservativo, entonces* $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ *y el teorema de Stokes simplemente confirma lo que ya se sabía: la circulación de un campo vectorial conservativo a lo largo de una trayectoria cerrada es cero.*

TEOREMA 1 Teorema de Stokes Para superf cies $\mathcal{S}$ como las descritas anteriormente:

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \tag{2}$$

La integral a la izquierda está def nida respecto a la orientación de frontera de ∂S. Si $\mathcal{S}$ es cerrada (es decir, $\partial \mathcal{S}$ es el conjunto vacío), entonces la integral de superf cie a la derecha es cero.

Demostración Cada lado de la ec. (2) es igual a una suma sobre las componentes de $\mathbf{F}$:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(F_1\mathbf{i}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(F_2\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(F_3\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}$$

La demostración consiste en probar que los términos en F_1, en F_2 y en F_3 son iguales.

Como una demostración completa es bastante técnica, se va a demostrar bajo la hipótesis de simplif cación que $\mathcal{S}$ es la gráf ca de una función $z = f(x, y)$ que se encuentra sobre un dominio $\mathcal{D}$ del plano xy. Además, se realizarán los cálculos sólo para los términos en

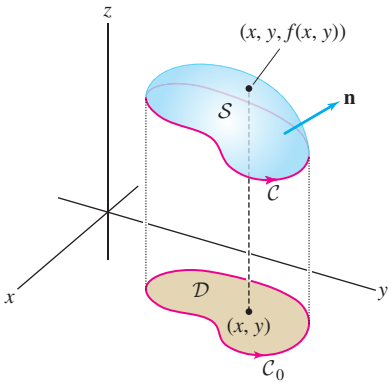


FIGURA 3

F_1. Los cálculos para las componentes de F_2 son similares y se deja como problema los cálculos pata los términos en F_3 (problema 31). Por tanto, se demostrará que:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(F_1(x,y,z)\mathbf{i}) \cdot d\mathbf{S} \qquad \boxed{3}$$

Oriente $\mathcal{S}$ con un vector normal que apunte hacia arriba, como en la f gura 3 y sea $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$ la curva de frontera. Sea $\mathcal{C}_0$ la frontera de $\mathcal{D}$ en el plano xy y sea $\mathbf{c}_0(t) = (x(t), y(t))$ (para $a \le t \le b$) una orientación antihoraria $\mathcal{C}_0$ como en la f gura 3. La curva frontera $\mathcal{C}$ se proyecta en $\mathcal{C}_0$, por lo que la parametrización de $\mathcal{C}$ es:

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$$

y por tanto:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y,z)\,dx = \int_a^b F_1(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))\frac{dx}{dt}\,dt$$

La integral a la derecha es justamente la integral que se obtiene al integrar $F_1(x, y, f(x, y))\,dx$ sobre la curva $\mathcal{C}_0$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Dicho de otro modo:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y,z)\,dx = \int_{\mathcal{C}_0} F_1(x,y,f(x,y))\,dx$$

Por el teorema de Green, aplicado a la integral a la derecha:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1(x,y,z)\,dx = -\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y,f(x,y))\,dA$$

Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y,f(x,y)) = F_{1y}(x,y,f(x,y)) + F_{1z}(x,y,f(x,y))f_y(x,y)$$

con lo que, f nalmente, se obtiene:

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1\,dx = -\iint_{\mathcal{D}} \left(F_{1y}(x,y,f(x,y)) + F_{1z}(x,y,f(x,y))f_y(x,y)\right) dA \qquad \boxed{4}$$

Para concluir la demostración, se calcula la integral de superf cie de rot($\mathbf{F}_1\mathbf{i}$) usando la parametrización $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ de $\mathcal{S}$:

$$\mathbf{n} = \langle -f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\rangle \qquad \text{(normal apuntando hacia arriba)}$$

$$\text{rot}(F_1\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n} = \langle 0, F_{1z}, -F_{1y}\rangle \cdot \langle -f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\rangle =$$

$$= -F_{1z}(x,y,f(x,y))f_y(x,y) - F_{1y}(x,y,f(x,y))$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(F_1\mathbf{i}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{D}} \left(F_{1z}(x,y,z)f_y(x,y) + F_{1y}(x,y,f(x,y))\right) dA \qquad \boxed{5}$$

Las expresiones a la derecha de las ec. (4) y ec. (5) son iguales. Esto demuestra la ec. (3). ■

RECORDATORIO *Cálculo de una integral de superficie:*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(u,v) \cdot \mathbf{n}(u,v)\,du\,dv$$

Si $\mathcal{S}$ es una gráfica $z = f(x, y)$, parametrizada por $G(x, y) = (x, y, f(x, y))$, entonces:

$$\mathbf{n}(x,y) = \langle -f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\rangle$$

■ **EJEMPLO 3** **Comprobación del teorema de Stokes** Compruebe el teorema de Stokes para:

$$\mathbf{F} = \langle -y, 2x, x + z\rangle$$

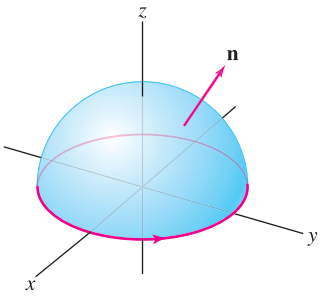


FIGURA 4 Semiesfera superior con frontera orientada.

y la semiesfera superior, con vectores normales apuntando hacia el exterior (f gura 4):

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

Solución Se va a probar que tanto la integral de línea como la integral de superf cie en el teorema de Stokes son iguales a 3π.

Etapa 1. **Calcule la integral de línea alrededor de la curva de frontera**

La frontera de $\mathcal{S}$ es la circunferencia unitaria, orientada en sentido antihorario con parametrización $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. Así:

$$\mathbf{c}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 0 \rangle$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \langle -\operatorname{sen} t, 2\cos t, \cos t \rangle$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \langle -\operatorname{sen} t, 2\cos t, \cos t \rangle \cdot \langle -\operatorname{sen} t, \cos t, 0 \rangle =$$

$$= \operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t = 1 + \cos^2 t$$

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t)\, dt = 2\pi + \pi = \boxed{3\pi} \qquad \boxed{6}$$

Etapa 2. **Calcule el rotacional**

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & 2x & x + z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x + z) - \frac{\partial}{\partial z} 2x\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + z) - \frac{\partial}{\partial z}(-y)\right)\mathbf{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x} 2x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)\mathbf{k} =$$

$$= \langle 0, -1, 3 \rangle$$

Etapa 3. **Calcule la integral de superf cie del rotacional**

Se parametrizará la semiesfera utilizando coordenadas esféricas:

$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$$

Según la ec. (2) de la sección 17.4, el vector normal que apunta hacia el exterior es:

$$\mathbf{n} = \operatorname{sen}\phi \langle \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi \rangle$$

Por tanto:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \operatorname{sen}\phi \langle 0, -1, 3 \rangle \cdot \langle \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi \rangle =$$

$$= -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi + 3\cos\phi \operatorname{sen}\phi$$

La semiesfera superior $\mathcal{S}$ corresponde a $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, por lo que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi + 3\cos\phi \operatorname{sen}\phi)\, d\theta\, d\phi =$$

$$= 0 + 2\pi \int_{\phi=0}^{\pi/2} 3\cos\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi = 2\pi \left(\frac{3}{2} \operatorname{sen}^2\phi\right)\Big|_{\phi=0}^{\pi/2} =$$

$$= \boxed{3\pi}$$

■

RECORDATORIO *En la ec. (6), se usa*

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \pi$$

RECORDATORIO *El teorema de Stokes afirma que:*

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Observe que rot(**F**) incluye las derivadas parciales $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ y $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ pero no la parcial $\frac{\partial F_1}{\partial x}$.

Así, si $F_1 = F_1(x)$ es una función únicamente de x, entonces $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$, y F_1 no contribuye al rotacional. Lo mismo se cumple para el resto de componentes. En resumen, si cada una de las funciones F_1, F_2 y F_3 sólo depende de su correspondiente variable x, y o z, entonces:

$$\text{rot}(\langle F_1(x), F_2(y), F_3(z)\rangle) = 0$$

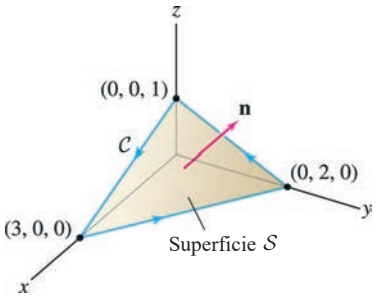


FIGURA 5

EJEMPLO 4 Use el teorema de Stokes para probar que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, donde:

$$\mathbf{F} = \langle \text{sen}(x^2), e^{y^2} + x^2, z^4 + 2x^2\rangle$$

y C es la frontera del triángulo de la f gura 5 con la orientación que allí se indica.

Solución Se va a aplicar el teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

y probar que la integral a la derecha es cero.

Según la observación anterior, la primera componente $\text{sen}(x^2)$ no contribuye al rotacional, porque depende únicamente de x. Análogamente, e^{y^2} y z^4 tampoco contribuyen al rotacional y se obtiene:

$$\text{rot}\left(\langle \text{sen}\, x^2, e^{y^2} + x^2, z^4 + 2x^2\rangle\right) = \overbrace{\text{rot}\left(\langle \text{sen}\, x^2, e^{y^2}, z^4\rangle\right)}^{\text{Automáticamente cero}} + \text{rot}\left(\langle 0, x^2, 2x^2\rangle\right) =$$

$$= \left\langle 0, -\frac{\partial}{\partial x} 2x^2, \frac{\partial}{\partial x} x^2 \right\rangle = \langle 0, -4x, 2x\rangle$$

Ahora observe que (tal y como se ha diseñado el problema) se puede probar que la integral es cero sin necesidad de calcularla. En referencia a la f gura 5, se tiene que C es la frontera de la superf cie triangular S contenida en el plano:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$$

Por tanto, $\mathbf{u} = \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\rangle$ es un vector normal a este plano. Pero $\mathbf{u}$ y rot(**F**) son ortogonales:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{u} = \langle 0, -4x, 2x\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\rangle = -2x + 2x = 0$$

Dicho de otro modo, la componente normal de rot(**F**) a lo largo de S es cero. Como la integral de superf cie de un campo vectorial es igual a la integral de superf cie de la componente normal, se deduce que $\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. ■

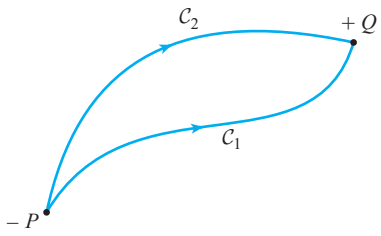


FIGURA 6 Dos trayectorias con la misma frontera $Q - P$.

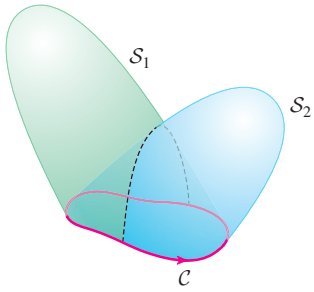


FIGURA 7 Las superf cies $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen la misma frontera orientada.

UN APUNTE CONCEPTUAL Recuerde que si $\mathbf{F}$ es conservativo, es decir si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces para dos trayectorias cualesquiera $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de P a Q (f gura 6), se tiene:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V(Q) - V(P)$$

Dicho de otro modo, la integral de línea no depende de la trayectoria. En particular, $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es cero si $\mathcal{C}$ es cerrada ($P = Q$).

Resultados análogos son también ciertos para integrales de superf cie, cuando $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$. El campo vectorial $\mathbf{A}$ se denomina un **potencial vectorial** para $\mathbf{F}$. Según el teorema de Stokes, dadas dos superf cies cualesquiera $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ con la misma frontera orientada $\mathcal{C}$ (f gura 7):

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

Dicho de otro modo, *la integral de superf cie de un campo vectorial con potencial vectorial* $\mathbf{A}$ *es independiente de la superf cie*, de la misma manera que un campo vectorial con función potencial V es independiente de la trayectoria.

Si la superf cie es cerrada, entonces la curva de frontera es el conjunto vacío y la integral de superf cie es cero:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{si} \quad \mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A}) \text{ y } \mathcal{S} \text{ es cerrada}$$

Los potenciales vectoriales no son únicos: si $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$, *entonces* $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ *para cualquier campo vectorial* $\mathbf{B}$ *tal que* $\text{rot}(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$.

TEOREMA 2 Independencia de la superficie para el campo vectorial rotacional
Si $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$, entonces el f ujo de $\mathbf{F}$ a través de una superf cie $\mathcal{S}$ sólo depende de la frontera orientada $\partial\mathcal{S}$ y no de la superf cie propiamente dicha:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \qquad \boxed{7}$$

En particular, si $\mathcal{S}$ es *cerrada* (es decir, $\partial\mathcal{S}$ es el conjunto vacío), entonces $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

RECORDATORIO Se entiende como el ***flujo*** *de un campo vectorial a través de una superficie, la integral de superficie del campo vectorial.*

EJEMPLO 5 Sea $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$, donde $\mathbf{A} = \langle y + z, \text{sen}(xy), e^{xyz} \rangle$. Halle el f ujo de $\mathbf{F}$ a través de las superf cies $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ de la f gura 8 cuya frontera común $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria en el plano xz.

Solución Con $\mathcal{C}$ orientada en la dirección de la f echa, $\mathcal{S}_1$ se encuentra a la izquierda y, por la ec. (7):

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

En primer lugar, se va a calcular la integral de línea a la derecha. La parametrización $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 0, \text{sen}\, t)$ describe $\mathcal{C}$ en la dirección y sentido de la f echa porque empieza en $\mathbf{c}(0) = (1, 0, 0)$ y se desplaza en la dirección de $\mathbf{c}(\frac{\pi}{2}) = (0, 0, 1)$. Se tiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}(t)) = \langle 0 + \text{sen}\, t, \text{sen}(0), e^0 \rangle = \langle \text{sen}\, t, 0, 1 \rangle$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \langle \text{sen}\, t, 0, 1 \rangle \cdot \langle -\text{sen}\, t, 0, \cos t \rangle = -\text{sen}^2 t + \cos t$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\text{sen}^2 t + \cos t)\, dt = -\pi$$

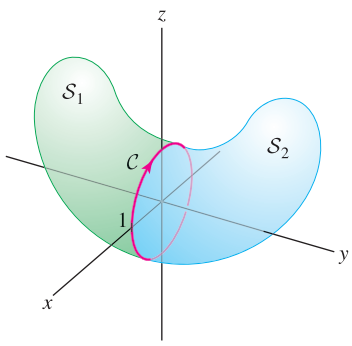


FIGURA 8

La conclusión es que $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\pi$. Por otra parte, $\mathcal{S}_2$ queda a la derecha si recorre $\mathcal{C}$. Por tanto, la orientación de frontera de $\mathcal{S}_2$ es $-\mathcal{C}$ y:

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{-\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = -\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \pi$$

UN APUNTE CONCEPTUAL Interpretación del rotacional En la sección 18.1, se mostró que la cantidad $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$ que aparece en el teorema de Green es la "circulación por unidad de área delimitada". Una interpretación similar es válida en $\mathbb{R}^3$.

Considere un plano que pasa por un punto P de vector normal unitario $\mathbf{e_n}$ y sea $\mathcal{D}$ un pequeño dominio que contiene a P con curva de frontera $\mathcal{C}$ (figura 9). Por el teorema de Stokes:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \approx \iint_{\mathcal{D}} (\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e_n})\, dS \qquad \boxed{8}$$

El campo vectorial rot(**F**) es continuo (sus componentes son las derivadas de las componentes de **F**), por lo que su valor no cambia demasiado sobre $\mathcal{D}$, siempre que $\mathcal{D}$ sea suficientemente pequeño. Así, en primera aproximación, se puede sustituir rot(**F**) por el valor constante rot(**F**)(P), dando lugar a la aproximación:

$$\iint_{\mathcal{D}} (\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e_n})\, dS \approx \iint_{\mathcal{D}} (\text{rot}(\mathbf{F})(P) \cdot \mathbf{e_n})\, dS \approx$$
$$\approx (\text{rot}(\mathbf{F})(P) \cdot \mathbf{e_n})\, \text{Area}(\mathcal{D}) \qquad \boxed{9}$$

Además, $\text{rot}(\mathbf{F})(P) \cdot \mathbf{e_n} = \|\text{rot}(\mathbf{F})(P)\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre rot(**F**) y $\mathbf{e_n}$. Juntando ec. (8) y ec. (9) se obtiene:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \approx \|\text{rot}(\mathbf{F})(P)\|(\cos\theta)\, \text{Área}(\mathcal{D}) \qquad \boxed{10}$$

Se trata de un resultado destacado. Establece que rot(**F**) codifica la circulación por unidad de área delimitada en cualquier plano que pase por P y de una manera sencilla: el producto escalar rot(**F**)(P) $\cdot$ $\mathbf{e_n}$. En particular, la tasa de circulación varía (en una aproximación de primer orden) como el coseno del ángulo θ entre rot(**F**)(P) y $\mathbf{e_n}$.

También se tiene que (como en la sección 18.1 para campos vectoriales en el plano) si **F** es el campo velocidad de un fluido, entonces una rueda de palas pequeñas con vector normal $\mathbf{e_n}$ girará con una velocidad angular de, aproximadamente, $\frac{1}{2}\,\text{rot}(\mathbf{F})(P) \cdot \mathbf{e_n}$ (vea la figura 10).

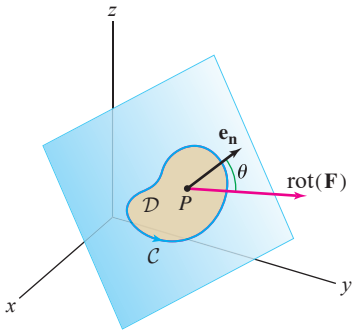


FIGURA 9 La curva $\mathcal{C}$ alrededor de P se encuentra en el plano que pasa por P de vector normal $\mathbf{e_n}$.

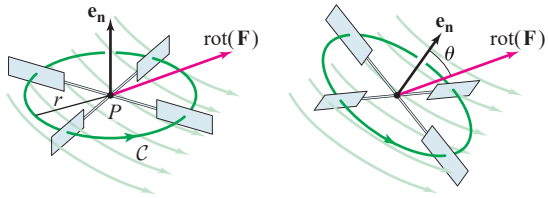


FIGURA 10 Se puede orientar la rueda de palas de diferentes maneras, tantas como las especificadas por el vector $\mathbf{e_n}$.

EJEMPLO 6 Potencial vectorial para un solenoide La corriente eléctrica que fluye a través de un solenoide (una espiral de alambre muy estrecha; vea la figura 11) crea un campo magnético **B**. Si se supone que el solenoide es infinitamente largo, de radio R y que el eje z es su eje central, entonces:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r > R \\ B\mathbf{k} & \text{si } r < R \end{cases}$$

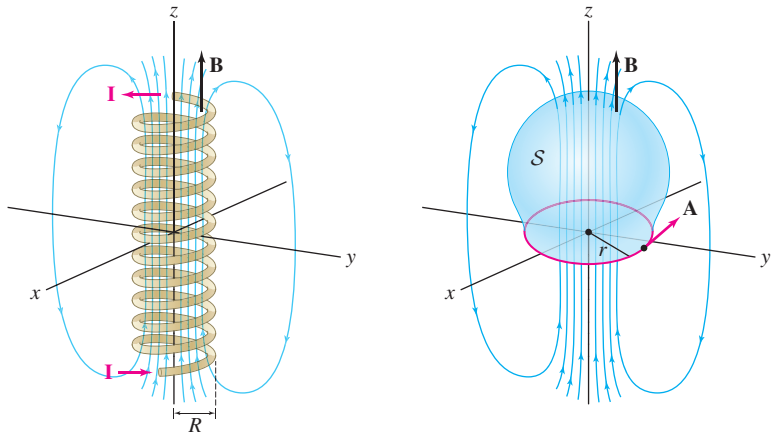


FIGURA 11 El campo magnético de un solenoide largo es casi uniforme en el interior y débil en el exterior. En la práctica, se considera el solenoide como "de longitud inf nita" si es muy largo en comparación con su radio.

donde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ y B es una constante que depende de la intensidad de la corriente y de la separación entre las vueltas del alambre.

(a) Pruebe que un potencial vectorial para $\mathbf{B}$ es:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}R^2 B\left\langle -\dfrac{y}{r^2}, \dfrac{x}{r^2}, 0\right\rangle & \text{si } r > R \\ \dfrac{1}{2}B\langle -y, x, 0\rangle & \text{si } r < R \end{cases}$$

(b) Calcule el f ujo de $\mathbf{B}$ a través de la superf cie $\mathcal{S}$ (con normal apuntando hacia arriba) en la f gura 11 cuya frontera es una circunferencia de radio r donde $r > R$.

Solución

El potencial vectorial $\mathbf{A}$ *es continuo pero no diferenciable sobre el cilindro* $r = R$*, es decir, sobre el solenoide propiamente dicho (figura 12). El campo magnético* $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ *presenta una discontinuidad de salto en* $r = R$*. Se va a dar por sentado que el teorema de Stokes continúa siendo válido en este contexto.*

(a) Para cualesquiera dos funciones f y g:

$$\text{rot}(\langle f, g, 0\rangle) = \langle -g_z, f_z, g_x - f_y\rangle$$

Si se aplica este resultado a $\mathbf{A}$ para $r < R$, se obtiene:

$$\text{rot}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}B\left\langle 0, 0, \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right\rangle = \langle 0, 0, B\rangle = B\mathbf{k} = \mathbf{B}$$

Se deja como problema [problema 29] probar que $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ para $r > R$.

(b) La parametrización antihoraria de la circunferencia frontera de $\mathcal{S}$ es $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\text{sen}\, t, 0)$, con lo que:

$$\mathbf{c}'(t) = \langle -r\,\text{sen}\, t, r\cos t, 0\rangle$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}(t)) = \frac{1}{2}R^2 B r^{-1}\langle -\text{sen}\, t, \cos t, 0\rangle$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t) = \frac{1}{2}R^2 B\left((-\text{sen}\, t)^2 + \cos^2 t\right) = \frac{1}{2}R^2 B$$

Por el teorema de Stokes, el f ujo de $\mathbf{B}$ a través de $\mathcal{S}$ es igual a:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt = \frac{1}{2}R^2 B\int_0^{2\pi} dt = \pi R^2 B$$

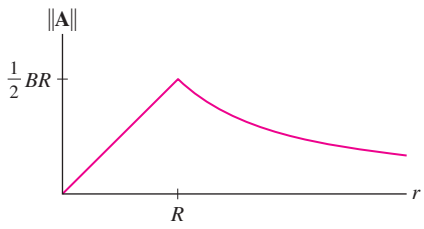


FIGURA 12 La magnitud $\|\mathbf{A}\|$ del potencial vector es una función de la distancia r al eje z.

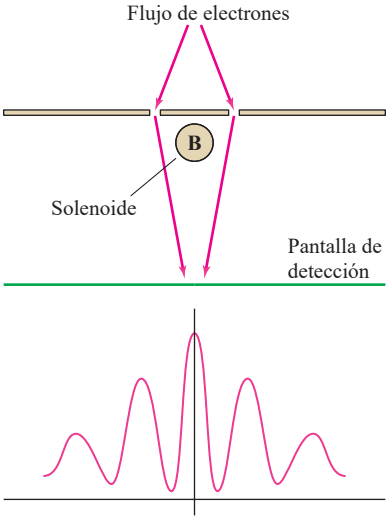


FIGURA 13 Un f ujo de electrones que pasan a través de una doble rendija produce un patrón de interferencia en la pantalla de detección. El patrón cambia ligeramente cuando f uye una corriente eléctrica a través del solenoide.

UN APUNTE CONCEPTUAL Existe una diferencia interesante entre los potenciales vectoriales y escalares. Si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces el potencial escalar V es constante en aquellas regiones en que el campo $\mathbf{F}$ es cero (pues una función con gradiente cero es constante). Esto no es cierto para potenciales vectoriales. Como se ha visto en el ejemplo 6, el campo magnético $\mathbf{B}$ producido por un solenoide es cero fuera del solenoide, pero el potencial vector $\mathbf{A}$ no es constante fuera del solenoide. En realidad, $\mathbf{A}$ es proporcional a $\left\langle -\frac{y}{r^2}, \frac{x}{r^2}, 0 \right\rangle$. Esto está relacionado con un fenómeno interesante de la física llamado *el efecto Aharonov-Bohm (efecto AB)*, propuesto por primera vez en el campo teórico en la década de 1940.

Según la teoría electromagnética, un campo magnético $\mathbf{B}$ ejerce una fuerza sobre un electrón en movimiento, provocando una desviación en la trayectoria del electrón. No cabe esperar ninguna desviación cuando un electrón se mueva más allá de un solenoide, pues $\mathbf{B}$ es cero fuera del solenoide (en la práctica, el campo no es realmente cero, pero es muy pequeño; se deja de banda esta dif cultad). Sin embargo, según la mecánica cuántica, los electrones tienen tanto propiedades ondulatorias como de partículas. En un experimento de doble rendija, un f ujo de electrones que pasan a través de dos pequeñas aberturas crea un patrón de interferencia ondulatoria en la pantalla de detección (f gura 13). El efecto AB predice que si se coloca un pequeño solenoide entre las rendijas, como en la f gura (el solenoide es tan pequeño que los electrones nunca pasan a través de él), entonces el patrón de interferencia se desplazará ligeramente. Es como si los electrones fueran "conscientes"del campo magnético dentro del solenoide, a pesar de que nunca se encuentran directamente con éste.

El efecto AB fue objeto de intensos debates, hasta que fue conf rmado def nitivamente en 1985, en experimentos llevados a cabo por un equipo de físicos japoneses dirigido por Akira Tonomura. El efecto AB parece contradecir la "teoría electromagnética clásica", según la cual la trayectoria de un electrón está determinada únicamente por $\mathbf{B}$. No hay tal contradicción en la mecánica cuántica, ya que el comportamiento de los electrones no se rige por $\mathbf{B}$, sino por una "función de onda", derivada del potencial vectorial, no constante, $\mathbf{A}$.

18.2 RESUMEN

- La *frontera* de una superf cie $\mathcal{S}$ se denota como $\partial\mathcal{S}$. Se dice que $\mathcal{S}$ es *cerrada* si $\partial\mathcal{S}$ es el conjunto vacío.
- Suponga que $\mathcal{S}$ está orientada (se especif ca un vector normal unitario que varía de forma continua en $\mathcal{S}$). La *orientación de frontera* de $\partial\mathcal{S}$ se def ne de la siguiente manera: si camina a lo largo de la frontera en la dirección positiva con la cabeza apuntando en la dirección normal, entonces la superf cie está a su izquierda.
- $$\text{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Simbólicamente, $\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$ donde ∇ es el operador del:

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

- El teorema de Stokes relaciona la circulación alrededor de la frontera con la integral de superf cie del rotacional:

$$\oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

- Si $\mathbf{F} = \nabla V$, entonces $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$.
- Independencia de la superf cie: si $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$, entonces el f ujo de $\mathbf{F}$ a través de la superf cie $\mathcal{S}$ sólo depende de la frontera orientada, $\partial \mathcal{S}$ y no de la superf cie propiamente dicha:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

En particular, si $\mathcal{S}$ es *cerrada* (es decir, $\partial \mathcal{S}$ es el conjunto vacío) y $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$, entonces $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

- El rotacional se interpreta como un vector que codif ca la circulación por unidad de área: si P es cualquier punto y $\mathbf{e_n}$ es un vector normal unitario, entonces:

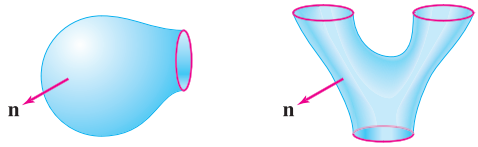
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \approx (\text{rot}(\mathbf{F})(P) \cdot \mathbf{e_n}) \, \text{Área}(\mathcal{D})$$

donde $\mathcal{C}$ es una pequeña curva cerrada simple alrededor de P en el plano que pasa por P de vector normal $\mathbf{e_n}$ y $\mathcal{D}$ es la región adjunta.

18.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Indique con una f echa la orientación de frontera de las curvas frontera de las superf cies en la f gura 14, orientadas por vectores normales apuntando hacia el exterior.



(A) (B)

FIGURA 14

2. Sea $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$. ¿Cuál de los siguientes están relacionados por el teorema de Stokes?

(a) La circulación de $\mathbf{A}$ y el f ujo de $\mathbf{F}$.

(b) La circulación de $\mathbf{F}$ y el f ujo de $\mathbf{A}$.

3. ¿Cuál es la def nición de potencial vectorial?

4. ¿Cuál de las siguientes af rmaciones es correcta?

(a) El f ujo de rot($\mathbf{A}$) a través de cualquier superf cie orientada es cero.

(b) El f ujo de rot($\mathbf{A}$) a través de cualquier superf cie orientada y cerrada es cero.

5. ¿Qué condición sobre $\mathbf{F}$ garantiza que el f ujo a través de $\mathcal{S}_1$ sea igual al f ujo a través de $\mathcal{S}_2$ para dos superf cies orientadas cualesquiera $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ con la misma orientación de frontera?

Problemas

En los problemas 1-4, calcule rot($\mathbf{F}$).

1. $\mathbf{F} = \langle z - y^2, x + z^3 y + x^2 \rangle$

2. $\mathbf{F} = \left\langle \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x} \right\rangle$

3. $\mathbf{F} = \langle e^y, \operatorname{sen} x, \cos x \rangle$

4. $\mathbf{F} = \left\langle \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 0 \right\rangle$

En los problemas 5-8, compruebe el teorema de Stokes para el campo vectorial y superf cie dados, orientada con un vector normal apuntando al exterior.

5. $\mathbf{F} = \langle 2xy, xy + z \rangle$, la superf cie $z = 1 - x^2 - y^2$ para $x^2 + y^2 \leq 1$.

6. $\mathbf{F} = \langle yz, 0, x \rangle$, la porción del plano $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$ donde $xy, z \geq 0$.

7. $\mathbf{F} = \langle e^{y-z}, 0, 0 \rangle$, el cuadrado de vértices $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(0, 0, 1)$.

8. $\mathbf{F} = \left\langle y, x, x^2 + y^2 \right\rangle$, la semiesfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.

En los problemas 9 y 10, calcule rot($\mathbf{F}$) *y a continuación use el teorema de Stokes para calcular el f ujo de* rot($\mathbf{F}$) *a través de la superf cie dada, como una integral de línea.*

9. $\mathbf{F} = \left\langle e^{z^2} - y, e^{z^3} + x, \cos(xz) \right\rangle$, la semiesfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ con normal apuntando hacia el exterior.

10. $\mathbf{F} = \left\langle x + y, z^2 - 4, x\sqrt{y^2 + 1} \right\rangle$, superf cie de la caja con forma de cuña de la f gura 15 (con la base incluida y la tapa excluida) con normal apuntando hacia el exterior.

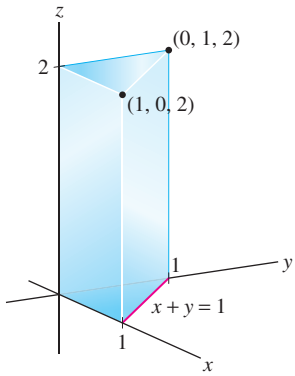


FIGURA 15

11. Sea $\mathcal{S}$ la superf cie del cilindro (no incluya la base ni la tapa) de radio para $1 \le z \le 6$, orientada con normal apuntando hacia el exterior (f gura 16).

(a) Indique con una f echa la orientación de $\partial\mathcal{S}$ (las circunferencias superior e inferior).

(b) Compruebe el teorema de Stokes para $\mathcal{S}$ y $\mathbf{F} = \langle yz^2, 0, 0\rangle$.

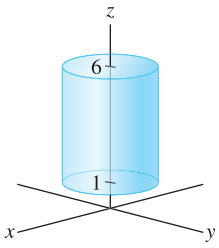


FIGURA 16

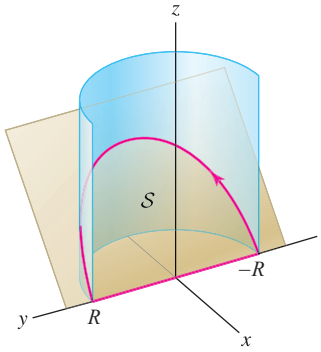


FIGURA 17

12. Sea $\mathcal{S}$ la porción del plano $z = x$ contenido en la mitad del cilindro de radio R que se muestra en la f gura 17. Use el teorema de Stokes para calcular la circulación de $\mathbf{F} = \langle z, xy + 2z\rangle$ alrededor de la frontera de $\mathcal{S}$ (una semielipse) en el sentido antihorario cuando se mira desde arriba. *Indicación:* pruebe que rot($\mathbf{F}$) es ortogonal al vector normal al plano.

13. Sea I el f ujo de $\mathbf{F} = \langle e^y, 2xe^{x^2}, z^2\rangle$ a través de la semiesfera superior $\mathcal{S}$ de la esfera unitaria.

(a) Sea $\mathbf{G} = \langle e^y, 2xe^{x^2}, 0\rangle$. Halle un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que rot($\mathbf{A}$) = $\mathbf{G}$.

(b) Use el teorema de Stokes para probar que el f ujo de $\mathbf{G}$ a través de $\mathcal{S}$ es cero. *Indicación:* Calcule la circulación de $\mathbf{A}$ alrededor de $\partial\mathcal{S}$.

(c) Calcule I. *Indicación:* Use (b) para mostrar que I es igual al f ujo de $\langle 0, 0, z^2\rangle$ a través de $\mathcal{S}$.

14. Sea $\mathbf{F} = \langle 0, -z, 1\rangle$. Sea $\mathcal{S}$ el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, donde $z \ge \frac{1}{2}$. Evalúe $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ directamente como una integral de superf cie. A continuación, verif que que $\mathbf{F}$ = rot($\mathbf{A}$), donde $\mathbf{A} = (0, x, xz)$ y evalúe de nuevo la integral de superf cie utilizando el teorema de Stokes.

15. Sea $\mathbf{A}$ potencial vectorial y $\mathbf{B}$ el campo magnético del solenoide inf nito de radio R del ejemplo 6. Use el teorema de Stokes para calcular:
(a) El f ujo de $\mathbf{B}$ a través de una circunferencia en el plano xy de radio $r < R$

(b) La circulación de $\mathbf{A}$ alrededor de la frontera $\mathcal{C}$ de una superf cie que se encuentre fuera del solenoide.

16. El campo magnético $\mathbf{B}$ generado por un pequeño circuito de corriente (que se considera situado en el origen) se denomina un **dipolo magnético** (f gura 18). Sea $\rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Para ρ suf cientemente grande, $\mathbf{B}$ = rot($\mathbf{A}$), donde:

$$\mathbf{A} = \left\langle -\frac{y}{\rho^3}, \frac{x}{\rho^3}, 0 \right\rangle$$

(a) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia horizontal de radio R y centro $(0, 0, c)$, donde c es grande. Pruebe que $\mathbf{A}$ es tangente a $\mathcal{C}$.

(b) Use el teorema de Stokes para calcular el f ujo de $\mathbf{B}$ a través de $\mathcal{C}$.

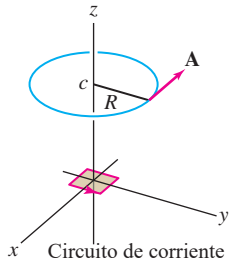


FIGURA 18

17. Un campo magnético $\mathbf{B}$ presenta fuerza constante b en la dirección z [es decir, $\mathbf{B} = \langle 0, 0, b\rangle$].

(a) Compruebe que $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ es un potencial vectorial para $\mathbf{B}$, donde $\mathbf{r} = \langle x, y, 0\rangle$.

(b) Calcule el f ujo de $\mathbf{B}$ a través del rectángulo de vértices A, B, C y D de la f gura 19.

18. Sea $\mathbf{F} = \langle -x^2y, x, 0\rangle$. En la f gura 19, sea $\mathcal{C}$ la trayectoria cerrada $ABCD$. Use el teorema de Stokes para evaluar $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ de dos maneras.

En primer lugar, considere $\mathcal{C}$ como la frontera del rectángulo de vértices A, B, C y D. A continuación, considere $\mathcal{C}$ como la frontera de la caja con forma de cuña, sin tapa.

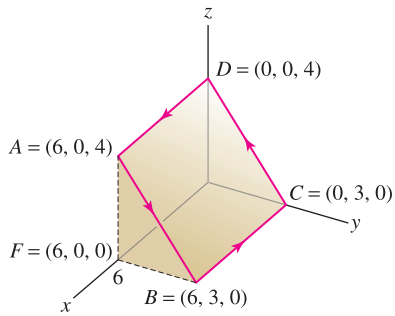


FIGURA 19

19. Sea $\mathbf{F} = \langle y^2, 2z + x, 2y^2\rangle$. Use el teorema de Stokes para hallar un plano de ecuación $ax + by + cz = 0$ (donde a, b, c no son simultáneamente cero), tal que $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para cualquier curva cerrada $\mathcal{C}$ que se encuentre en el plano. *Indicación:* considere a, b, c tales que rot($\mathbf{F}$) se encuentre en el plano.

20. Sea $\mathbf{F} = \langle -z^2, 2zx, 4y - x^2\rangle$ y sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple en el plano $x + y + z = 4$ que limita una región de área 16 (f gura 20). Calcule

$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde C está orientada en el sentido antihorario (cuando se mira por encima del plano).

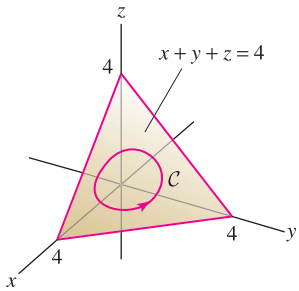


FIGURA 20

21. Sea $\mathbf{F} = \langle y^2, x^2, z^2 \rangle$. Pruebe que:

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

para cualesquiera dos curvas que se encuentren en un cilindro, cuyo eje central sea el eje z (f gura 21).

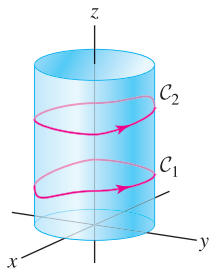


FIGURA 21

22. El rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en el origen es $\mathbf{v}_0 = \langle 3, 1, 4 \rangle$. Estime la circulación alrededor del pequeño paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{A} = \langle 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle 0, 0, \frac{1}{3} \rangle$.

23. Sobre un campo vectorial $\mathbf{F}$, usted sabe que:

(i) $\mathbf{F}$ tiene potencial vector $\mathbf{A}$ (pero $\mathbf{A}$ no se conoce).

(ii) La circulación de $\mathbf{A}$ alrededor de la circunferencia unitaria (con orientación antihoraria) es 25.

Determine el f ujo de $\mathbf{F}$ a través de la superf cie S de la f gura 22, orientada con vector normal apuntando hacia el exterior.

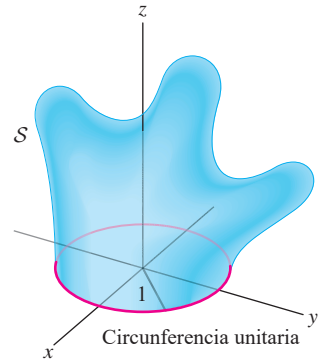


FIGURA 22 Superf cie S cuya frontera es la circunferencia unitaria.

24. Suponga que $\mathbf{F}$ tiene potencial vectorial y que $\mathbf{F}(xy, 0) = \mathbf{k}$. Halle el f ujo de $\mathbf{F}$ a través de la superf cie S de la f gura 22, orientada con vector normal apuntando hacia arriba.

25. Demuestre que $\text{rot}(f\mathbf{a}) = \nabla f \times \mathbf{a}$, donde f es una función diferenciable y $\mathbf{a}$ es un vector constante.

26. Pruebe que $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ si $\mathbf{F}$ es **radial**, esto es, si $\mathbf{F} = f(\rho)\langle xy, z \rangle$ para alguna función $f(\rho)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Indicación:* es su- f ciente probar que una componente de $\text{rot}(\mathbf{F})$ es cero pues, por simetría, también será cierto para las otras dos componentes.

27. Demuestre la siguiente regla del producto:

$$\text{rot}(f\,\mathbf{F}) = f\,\text{rot}(\mathbf{F}) + \nabla f \times \mathbf{F}$$

28. Suponga que f y g tienen derivadas parciales de orden 2 continuas. Demuestre que:

$$\oint_{\partial S} f\nabla(g) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \nabla(f) \times \nabla(g) \cdot d\mathbf{s}$$

29. Compruebe que $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ para $r > R$ en el contexto del ejemplo 6.

30. Explique cuidadosamente por qué el teorema de Green es un caso particular del teorema de Stokes.

Problemas avanzados

31. En este problema, se utilizará la notación de la demostración del teorema 1 y se demostrará que:

$$\oint_C F_3(x,y,z)\mathbf{k} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot}(F_3(x,y,z)\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S} \qquad \boxed{11}$$

En particular, S es la gráf ca de $z = f(x,y)$ sobre un dominio D y C es la frontera de S con parametrización $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$.

(a) Use la regla de la cadena para probar que:

$$F_3(x,y,z)\mathbf{k} \cdot d\mathbf{s} = F_3(x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \left(f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)\right) dt$$

y comprobar que:

$$\oint_C F_3(x,y,z)\mathbf{k} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_0} \left\langle F_3(x,y,z)f_x(x,y), F_3(x,y,z)f_y(x,y) \right\rangle \cdot d\mathbf{s}$$

donde C_0 tiene parametrización $(x(t), y(t))$.

(b) Aplique el teorema de Green a la integral de línea sobre C_0 y pruebe que el resultado es igual a la expresión a la derecha de la ec. (11).

32. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial diferenciable con continuidad en $\mathbb{R}^3$, Q un punto y S un plano que contiene a Q con vector normal unitario $\mathbf{e}$. Sea C_r una circunferencia de radio r centrada en Q en S, y sea S_r el disco limitado por C_r. Suponga que S_r está orientada con vector normal unitario $\mathbf{e}$.

(a) Sean $m(r)$ y $M(r)$ los valores mínimo y máximo de $\text{rot}(\mathbf{F}(P))\cdot\mathbf{e}$ para $P \in \mathcal{S}_r$. Demuestre que:

$$m(r) \le \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\mathcal{S}_r} \text{rot}(\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} \le M(r)$$

(b) Demuestre que:

$$\text{rot}(\mathbf{F}(Q))\cdot\mathbf{e} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathcal{C}_r}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

Esto demuestra que $\text{rot}(\mathbf{F}(Q))\cdot\mathbf{e}$ es la circulación por unidad de área en el plano $\mathcal{S}$.

18.3 Teorema de la divergencia

Hemos estudiado diferentes "teoremas fundamentales". Cada uno de ellos es una relación del tipo:

$$\begin{matrix}\text{Integral de una derivada}\\ \text{sobre un dominio orientado}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Integral sobre la } \textit{frontera}\\ \textit{orientada} \text{ del dominio}\end{matrix}$$

He aquí los ejemplos que se han visto hasta el momento:

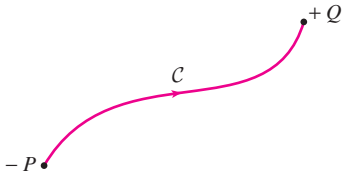


FIGURA 1 La frontera orientada de $\mathcal{C}$ es $\partial\mathcal{C} = Q - P$.

- En cálculo de una variable, el teorema fundamental del cálculo (FTC) relaciona la integral de $f'(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ con la "integral" de $f(x)$ sobre la frontera de $[a, b]$, formada por los puntos a y b:

$$\underbrace{\int_a^b f'(x)\,dx}_{\text{Integral de la derivada sobre } [a,b]} = \underbrace{f(b) - f(a)}_{\text{"Integral" sobre la frontera de } [a,b]}$$

  La frontera de $[a, b]$ está orientada al asignar un signo más a b y un signo menos a a.

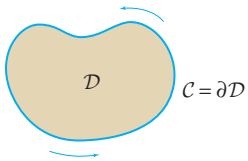


FIGURA 2 Dominio $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^2$ con curva frontera $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$.

- El teorema fundamental para integrales de línea generaliza al TFC: en lugar de un intervalo $[a, b]$ (una trayectoria de a a b a lo largo del eje x), se considera cualquier trayectoria de P a Q en $\mathbb{R}^3$ (f gura 1) y en lugar de $f'(x)$ se usa el gradiente:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{C}}\nabla V\cdot d\mathbf{s}}_{\text{Integral de la derivada sobre una curva}} = \underbrace{V(Q) - V(P)}_{\begin{matrix}\text{"Integral" sobre la}\\ \text{curva frontera } \partial\mathcal{C} = Q - P\end{matrix}}$$

- El teorema de Green es una versión en dos dimensiones del TFC, que relaciona la integral de una derivada sobre un domino $\mathcal{D}$ en el plano, con una integral sobre su la curva frontera $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$ (f gura 2):

$$\underbrace{\iint_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right)dA}_{\text{Integral de derivada sobre dominio}} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{Integral sobre curva frontera}}$$

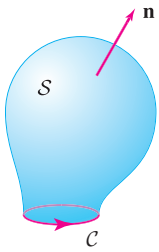


FIGURA 3 La frontera orientada de $\mathcal{S}$ es $\mathcal{C} = \partial\mathcal{S}$.

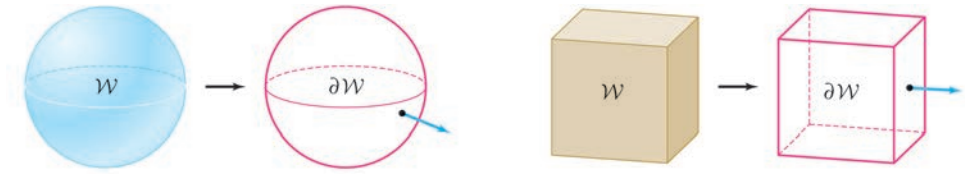
- El teorema de Stokes amplía el teorema Green: en lugar de un dominio en el plano (una superf cie plana), se permite cualquier superf cie en $\mathbb{R}^3$ (f gura 3). La derivada apropiada es el rotacional:

$$\underbrace{\iint_{\mathcal{S}}\text{rot}(\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}}_{\text{Integral de derivada sobre superf cie}} = \underbrace{\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}_{\text{Integral sobre curva frontera}}$$

Nuestro último teorema, el teorema de la divergencia, sigue este mismo patrón:

$$\underbrace{\iiint_{\mathcal{W}}\text{div}(\mathbf{F})\,d\mathcal{W}}_{\text{Integral de derivada sobre región 3-D}} = \underbrace{\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}}_{\text{Integral sobre superf cie frontera}}$$

Aquí, $\mathcal{S}$ es una superf cie *cerrada* que limita una región en el espacio tridimensional (3-D) $\mathcal{W}$. Dicho de otro modo, $\mathcal{S}$ es la frontera de $\mathcal{W}$: $\mathcal{S} = \partial\mathcal{W}$. Recuerde que una superf cie cerrada es una superf cie que "contiene aire". La f gura 4 muestra dos ejemplos de las regiones y superf cies frontera que se van a considerar.



Bola en tres dimensiones | La frontera es una esfera, orientada hacia el exterior | Cubo en tres dimensiones | La frontera es la superficie del cubo, orientada hacia el exterior

FIGURA 4

La derivada que aparece en el teorema de la divergencia es la **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$, def nida como:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad \boxed{1}$$

Tratamientos más avanzados de cálculo vectorial utilizan la teoría de las "formas diferenciales" para formular una versión general del teorema de Stokes, que es válido en todas las dimensiones y que incluye cada uno de nuestros principales teoremas (Green, Stokes, divergencia) como un caso especial.

Se suele expresar la divergencia como un producto escalar simbólico:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle F_1, F_2, F_3 \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Observe que, contrariamente a lo que ocurría con el gradiente y con el rotacional, la divergencia es una función escalar. Como el gradiente y el rotacional, la divergencia también cumple las reglas de **linealidad**:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$$

$$\operatorname{div}(c\mathbf{F}) = c\ \operatorname{div}(\mathbf{F}) \qquad (c \text{ constante cualesquiera})$$

EJEMPLO 1 Evalúe la divergencia de $\mathbf{F} = \left\langle e^{xy}, xy, z^4 \right\rangle$ en $P = (1, 0, 2)$.

Solución

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x} e^{xy} + \frac{\partial}{\partial y} xy + \frac{\partial}{\partial z} z^4 = ye^{xy} + x + 4z^3$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(P) = \operatorname{div}(\mathbf{F})(1, 0, 2) = 0 \cdot e^0 + 1 + 4 \cdot 2^3 = 33$$

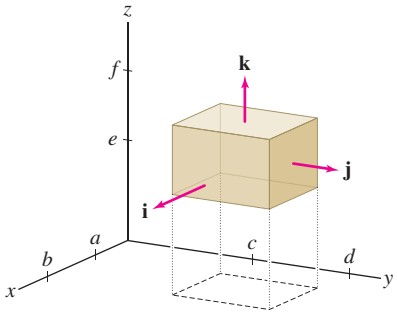


FIGURA 5 Una caja $\mathcal{W} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

TEOREMA 1 Teorema de la divergencia Sea $\mathcal{S}$ una superf cie cerrada que limita una región $\mathcal{W}$ en $\mathbf{R}^3$. Suponga que $\mathcal{S}$ es suave a trozos y orientada por vectores normales que apuntan al exterior de $\mathcal{W}$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyo dominio contiene a $\mathcal{W}$. Entonces:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV \qquad \boxed{2}$$

Se va a demostrar el teorema de la divergencia en el caso particular en que $\mathcal{W}$ es una caja $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ como en la f gura 5. La demostración se puede modif car para considerar regiones más generales como el interior de esferas o cilindros.

RECORDATORIO *El teorema de la divergencia afirma que:*

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dV$$

Se va a expresar cada lado de la ec. (2) como una suma sobre las componentes:

$$\iint_{\partial\mathcal{W}} (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial\mathcal{W}} F_1\mathbf{i}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\partial\mathcal{W}} F_2\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\partial\mathcal{W}} F_3\mathbf{k}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\,dV = \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(F_1\mathbf{i})\,dV + \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(F_2\mathbf{j})\,dV + \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(F_3\mathbf{k})\,dV$$

Como en las demostraciones del teorema de Green y del de Stokes, se va a probar que los términos correspondientes son iguales. Es suf ciente examinar los detalles para la componente **i** (las otras dos componentes se analizan de forma similar). Así, suponga que $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}$.

La integral de superf cie sobre la frontera $\mathcal{S}$ de la caja es la suma de las integrales sobre las seis caras. Sin embargo, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i}$ es ortogonal a los vectores normales a la tapa y a la base y también a las dos caras laterales pues $\mathbf{F}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = 0$. Por tanto, las integrales de superf cie sobre estas caras son cero. Las contribuciones no nulas provienen de las caras frontal y trasera, que se denotarán $\mathcal{S}_f$ y $\mathcal{S}_t$ (f gura 6):

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}_f} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}_t} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

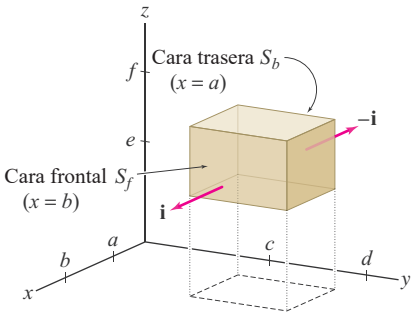


FIGURA 6

Para evaluar estas integrales, parametrice $\mathcal{S}_f$ y $\mathcal{S}_t$ por:

$$\Phi_f(y,z) = (b,y,z) \qquad c \le y \le d,\ e \le z \le f$$

$$\Phi_b(y,z) = (a,y,z) \qquad c \le y \le d,\ e \le z \le f$$

Los vectores normales para estas parametrizaciones son:

$$\frac{\partial\Phi_f}{\partial y}\times\frac{\partial\Phi_f}{\partial z} = \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$$

$$\frac{\partial\Phi_b}{\partial y}\times\frac{\partial\Phi_b}{\partial z} = \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$$

Sin embargo, el vector normal que apunta hacia el exterior para $\mathcal{S}_t$ es $-\mathbf{i}$, con lo que se necesita un signo menos en la integral de superf cie sobre $\mathcal{S}_t$ al utilizar la parametrización Φ_b:

$$\iint_{\mathcal{S}_f} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{S}_t} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_e^f\int_c^d F_1(b,y,z)\,dy\,dz - \int_e^f\int_c^d F_1(a,y,z)\,dy\,dz =$$

$$= \int_e^f\int_c^d \big(F_1(b,y,z) - F_1(a,y,z)\big)\,dy\,dz$$

Por el TFC en una variable:

$$F_1(b,y,z) - F_1(a,y,z) = \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,dx$$

Como $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(F_1\mathbf{i}) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x}$, se obtiene el resultado anunciado:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_e^f\int_c^d\int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dV$$

■

Los nombres de los teoremas matemáticos suelen esconder un desarrollo histórico más complejo. Lo que llamamos teorema de Green fue enunciado por Augustin Cauchy en 1846 pero nunca fue declarado por el propio George Green (él publicó un resultado que implica el teorema de Green en 1828). El teorema de Stokes apareció por primera vez como un problema en un examen escrito por George Stokes en la Universidad de Cambridge, pero William Thomson (Lord Kelvin) había enunciado anteriormente el teorema en una carta dirigida a Stokes. Gauss publicó casos particulares del teorema de la divergencia en 1813 y en 1833 y 1839, mientras que el teorema general se enunció y demostró por el matemático ruso Michael Ostrogradsky en 1826. Por esta razón, el teorema de la divergencia también se conoce como el "teorema de Gauss" o "el teorema de Gauss-Ostrogradsky".

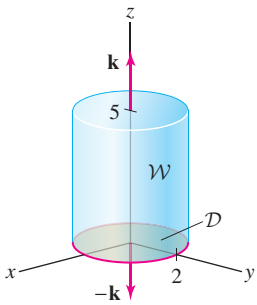


FIGURA 7 Cilindro de radio 2 y altura 5.

EJEMPLO 2 Comprobación del teorema de la divergencia Compruebe el teorema 1 para $\mathbf{F} = \langle y, yz, z^2 \rangle$ y el cilindro de la f gura 7.

Solución Se debe comprobar que el f ujo $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathcal{S}$ es la frontera del cilindro, es igual a la integral de div($\mathcal{W}$) sobre el cilindro. En primer lugar, calcule a través de $\mathcal{S}$; es la suma de tres integrales de superf cie: sobre el lado, sobre la tapa y sobre la base.

Etapa 1. **Integre sobre el lado del cilindro**

Utilice la parametrización estándar del cilindro:

$$\Phi(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z) \qquad 0 \le \theta < 2\pi \quad 0 \le z \le 5$$

El vector normal es:

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_z = \langle -2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0\rangle \times \langle 0, 0, 1\rangle = \langle 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0\rangle$$

y $\mathbf{F}(\Phi(\theta, z)) = \langle y, yz, z^2\rangle = \langle 2\operatorname{sen}\theta, 2z\operatorname{sen}\theta, z^2\rangle$. Por tanto:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \langle 2\operatorname{sen}\theta, 2z\operatorname{sen}\theta, z^2\rangle \cdot \langle 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 0\rangle \, d\theta \, dz =$$

$$= 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4z\operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \, dz =$$

$$\iint_{\text{side}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^5 \int_0^{2\pi} (4\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4z\operatorname{sen}^2\theta) \, d\theta \, dz =$$

$$= 0 + 4\pi \int_0^5 z \, dz = 4\pi\left(\frac{25}{2}\right) = 50\pi \qquad \boxed{3}$$

RECORDATORIO *En la ec. (3), se utiliza que:*

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \pi$$

Etapa 2. **Integre sobre la tapa y la base del cilindro**

La tapa del cilindro se encuentra a altura $z = 5$, por lo que se puede parametrizar la tapa como $\Phi(x, y) = (x, y, 5)$ para (x, y) en el disco $\mathcal{D}$ de radio 2:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$$

Entonces:

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = \langle 1, 0, 0\rangle \times \langle 0, 1, 0\rangle = \langle 0, 0, 1\rangle$$

y como $\mathbf{F}(\Phi(x, y)) = \mathbf{F}(x, y, 5) = \langle y, 5y, 5^2\rangle$, se tiene que:

$$\mathbf{F}(\Phi(x, y)) \cdot \mathbf{n} = \langle y, 5y, 5^2\rangle \cdot \langle 0, 0, 1\rangle = 25$$

$$\iint_{\text{tapa}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} 25 \, dA = 25\,\text{Área}(\mathcal{D}) = 25(4\pi) = 100\pi$$

A lo largo del disco base del cilindro, se tiene $z = 0$ y $\mathbf{F}(x, y, 0) = \langle y, 0, 0\rangle$. Así $\mathbf{F}$ es ortogonal al vector $-\mathbf{k}$ normal al disco de base y la integral a lo largo de la base es cero.

Etapa 3. **Halle el f ujo total**

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \text{lados} + \text{tapa} + \text{base} = 50\pi + 100\pi + 0 = \boxed{150\pi}$$

Etapa 4. **Compare con la integral de la divergencia**

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \operatorname{div}(\langle y, yz, z^2\rangle) = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}z^2 = 0 + z + 2z = 3z$$

El cilindro $\mathcal{W}$ está formado por todos los puntos (x, y, z) para los que $0 \le z \le 5$ y (x, y) en el disco $\mathcal{D}$. Se tiene finalmente que la integral de la divergencia es igual al flujo total:

$$\iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iint_{\mathcal{D}} \int_{z=0}^{5} 3z\, dV = \iint_{\mathcal{D}} \frac{75}{2}\, dA =$$

$$= \left(\frac{75}{2}\right)(\text{Área}(\mathcal{D})) = \left(\frac{75}{2}\right)(4\pi) = \boxed{150\pi}$$

En muchas aplicaciones, se utiliza el teorema de la divergencia para calcular el flujo. En el siguiente ejemplo, un cálculo de flujo (que implicaría la integración sobre las seis caras de una caja) se reduce a una integral triple más simple.

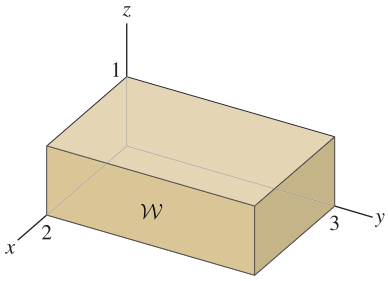


FIGURA 8

EJEMPLO 3 Utilización del teorema de la divergencia Aplique el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_{\mathcal{S}} \langle x^2, z^4, e^z \rangle \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathcal{S}$ es la frontera de la caja $\mathcal{W}$ de la figura 8.

Solución En primer lugar, calcule la divergencia:

$$\operatorname{div}(\langle x^2, z^4, e^z \rangle) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} z^4 + \frac{\partial}{\partial z} e^z = 2x + e^z$$

A continuación, aplique el teorema de la divergencia y utilice el teorema de Fubini:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle x^2, z^4, e^z \rangle \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{W}} (2x + e^z)\, dV = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^1 (2x + e^z)\, dz\, dy\, dx =$$

$$= 3 \int_0^2 2x\, dx + 6 \int_0^1 e^z\, dz = 12 + 6(e - 1) = 6e + 6$$

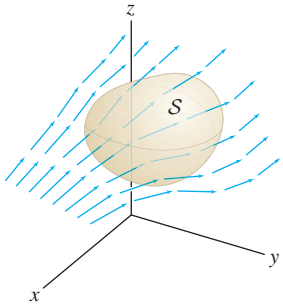


FIGURA 9

EJEMPLO 4 Un campo vectorial con divergencia igual a cero Calcule el flujo de

$$\mathbf{F} = \left\langle z^2 + xy^2, \cos(x + z), e^{-y} - zy^2 \right\rangle$$

a través de la frontera de la superficie $\mathcal{S}$ de la figura 9.

Solución Aunque $\mathbf{F}$ es bastante complicado, su divergencia es cero:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(z^2 + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(x + z) + \frac{\partial}{\partial z}(e^{-y} - zy^2) = y^2 - y^2 = 0$$

El teorema de la divergencia muestra que el flujo es cero. Si $\mathcal{W}$ es la región delimitada por $\mathcal{S}$, entonces:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint_{\mathcal{W}} 0\, dV = 0$$

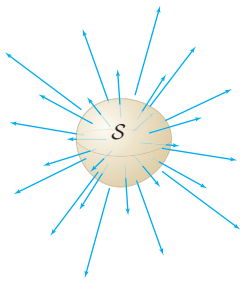


FIGURA 10 Para un campo velocidad, el flujo a través de una superficie es la tasa de flujo (en volumen por tiempo) de fluido a través de la superficie.

UN APUNTE GRÁFICO Interpretación de la divergencia Suponga, de nuevo, que $\mathbf{F}$ es el campo velocidad de un fluido (figura 10). Entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una superficie $\mathcal{S}$ es la tasa de circulación (volumen de fluido que pasa a través de $\mathcal{S}$ por unidad de tiempo). Si $\mathcal{S}$ limita a la región $\mathcal{W}$ entonces, por el teorema de la divergencia,

$$\text{Tasa de circulación a través de } \mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV \qquad \boxed{4}$$

Ahora suponga que $\mathcal{S}$ es una pequeña superficie que contiene un punto P. Como $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ es continuo (es una suma de las derivadas de las componentes de $\mathbf{F}$), su valor no cambia demasiado sobre $\mathcal{W}$ siempre que $\mathcal{S}$ sea suficientemente pequeña, en primera apro-

¿Concuerdan las unidades en la ec. (5)? La tasa de caudal tiene unidades de volumen por unidad de tiempo. Por otra parte, la divergencia es una suma de derivadas de la velocidad respecto a la distancia. Por tanto, las unidades de la divergencia son de "distancia por unidad de tiempo por distancia", o de unidad de tiempo^{-1} y la parte derecha de la ec. (5) también tiene unidades de volumen por unidad de tiempo.

ximación se puede sustituir div(**F**) por el valor constante div(**F**)(P). Esto da lugar a la aproximación:

$$\text{Tasa de caudal a través de } \mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{W}} \text{div}(\mathbf{F})\, dV \approx \text{div}(\mathbf{F})(P) \cdot \text{Vol}(\mathcal{W}) \qquad \boxed{5}$$

Dicho de otro modo, la *tasa de circulación a través de una pequeña superf cie que contiene a P es aproximadamente igual a la divergencia en P por el volumen limitado* y, en consecuencia, div(**F**)(P) admite una interpretación como "tasa de caudal (o f ujo) por unidad de volumen":

- Si div(**F**)(P) > 0, hay un f ujo neto de salida de f uido a través de cualquier superf cie cerrada pequeña que contenga a P o, dicho de otro modo, una "creación" neta de f uido cerca de P.
- Si div(**F**)(P) < 0, hay un f ujo neto de entrada de f uido a través de cualquier superf cie cerrada pequeña que contenga a P o, dicho de otro modo, una "destrucción" neta de f uido cerca de P.

Debido a esto, la div(**F**) se denomina en algunas ocasiones *densidad de fuente* del campo.

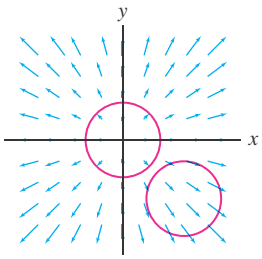
- Si div(**F**)(P) = 0, entonces, en una aproximación de primer orden, el f ujo neto a través de cualquier superf cie cerrada pequeña que contenga a P es igual a cero.

Un campo vectorial tal que div(**F**) = 0 en todo punto se denomina *incompresible*.

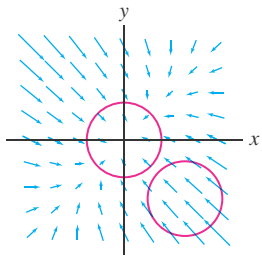
Para visualizar estos casos, considere la situación en dos dimensiones, donde se def ne:

$$\text{div}(\langle F_1, F_2\rangle) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

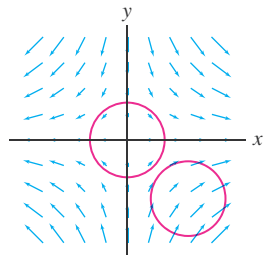
En la f gura 11, el campo (A) tiene divergencia positiva. Hay un f ujo neto de entrada de f uido a través de cualquier circunferencia, por unidad de tiempo. Análogamente, el campo (B) tiene divergencia negativa. Por el contrario, el campo (C) es *incompresible*. El f uido que entra en cualquier circunferencia se compensa con el f uido que sale.



(A) El campo $\mathbf{F} = \langle x, y\rangle$ de div(**F**) = 2. Hay un f ujo neto de salida de f ujo a través de cualquier circunferencia.



(B) El campo $\mathbf{F} = \langle y - 2x, x - 2y\rangle$ de div(**F**) = −4. Hay un f ujo neto de entrada de f ujo a través de cualquier circunferencia.



(C) El campo $\mathbf{F} = \langle x, -y\rangle$ de div(**F**) = 0. El f ujo a través de cualquier circunferencia es cero.

FIGURA 11

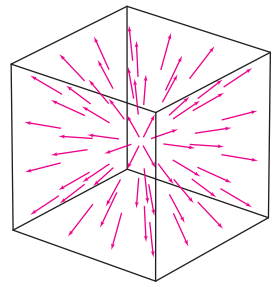


FIGURA 12 Campo vectorial radial unitario $\mathbf{e}_r$.

RECORDATORIO

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Para $r \neq 0$,

$$\mathbf{e}_r = \frac{\langle x, y, z\rangle}{r} = \frac{\langle x, y, z\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Aplicaciones a la electrostática

El teorema de la divergencia es una potente herramienta para calcular el f ujo de campos electrostáticos. Esto es debido a las propiedades especiales del campo vectorial cuadrático inverso (f gura 12). En esta sección, se denota el campo vectorial cuadrático inverso como $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$:

$$\mathbf{F}_{\text{c-i}} = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Recuerde que $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$ está definido para $r \neq 0$. En el siguiente ejemplo se comprueba la propiedad fundamental según la cual $\text{div}(\mathbf{F}_{\text{c-i}}) = 0$.

EJEMPLO 5 El campo vectorial cuadrático inverso Compruebe que la divergencia de $\mathbf{F}_{\text{c-i}} = \dfrac{\mathbf{e}_r}{r^2}$ es cero:

$$\text{div}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) = 0$$

Solución Exprese el campo como

$$\mathbf{F}_{\text{c-i}} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle = \frac{1}{r^2}\left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\rangle = \langle xr^{-3}, yr^{-3}, zr^{-3} \rangle$$

Se tiene:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} xr^{-3} = r^{-3} - 3xr^{-4}\frac{\partial r}{\partial x} = r^{-3} - (3xr^{-4})\frac{x}{r} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

Las derivadas $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial F_3}{\partial z}$ son similares, por lo que:

$$\text{div}(\mathbf{F}_{\text{c-i}}) = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

El siguiente teorema muestra que el flujo de $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$ a través de una superficie cerrada $\mathcal{S}$ depende únicamente de si $\mathcal{S}$ contiene al origen.

TEOREMA 2 Flujo del campo vectorial cuadrático inverso El flujo de $\mathbf{F}_{\text{c-i}} = \dfrac{\mathbf{e}_r}{r^2}$ a través de superficies cerradas se puede expresar de la siguiente manera:

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathcal{S} \text{ contiene al origen} \\ 0 & \text{si } \mathcal{S} \text{ no contiene al origen} \end{cases}$$

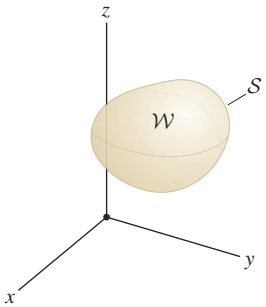


FIGURA 13 $\mathcal{S}$ está contenida en el dominio de $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$ (lejos del origen).

Demostración En primer lugar, suponga que $\mathcal{S}$ no contiene al origen (figura 13). Entonces la región $\mathcal{W}$ delimitada por $\mathcal{S}$ está contenida en el dominio de $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$ y se puede aplicar el teorema de la divergencia. Según el ejemplo 5, $\text{div}(\mathbf{F}_{\text{c-i}}) = 0$ y por tanto:

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{W}} \text{div}(\mathbf{F}_{\text{c-i}})\, dV = \iiint_{\mathcal{W}} 0\, dV = 0$$

A continuación, sea $\mathcal{S}_R$ la esfera de radio R y centro en el origen (figura 14). No se puede aplicar el teorema de la divergencia porque $\mathcal{S}_R$ contiene un punto (el origen) en que $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$ no está definido. Sin embargo, se puede calcular el flujo de $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$ a través de $\mathcal{S}_R$ usando coordenadas esféricas. Recuerde, de la sección 17.4 [ec. (5)] que el vector normal que apunta hacia el exterior en coordenadas esféricas es:

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta = (R^2 \operatorname{sen}\phi)\mathbf{e}_r$$

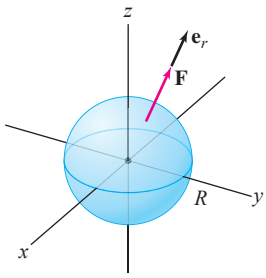


FIGURA 14

El campo cuadrático inverso sobre $\mathcal{S}_R$ es simplemente $\mathbf{F}_{\text{c-i}} = R^{-2}\mathbf{e}_r$, y en consecuencia:

$$\mathbf{F}_{\text{c-i}} \cdot \mathbf{n} = (R^{-2}\mathbf{e}_r) \cdot (R^2 \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{e}_r) = \operatorname{sen}\phi(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r) = \operatorname{sen}\phi$$

$$\iint_{\mathcal{S}_R} \mathbf{F}_{\text{c-i}} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}_{\text{c-i}} \cdot \mathbf{n}\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta =$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi = 4\pi$$

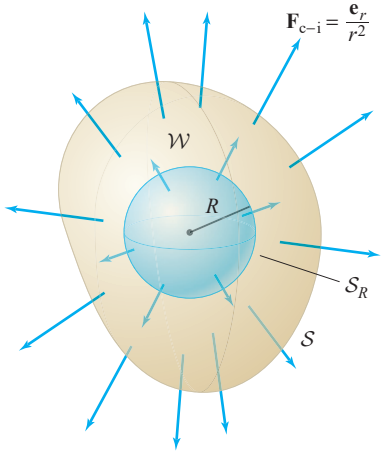


FIGURA 15 $\mathcal{W}$ es la región entre $\mathcal{S}$ y la esfera $\mathcal{S}_R$.

Para generalizar este resultado a *cualquier* superf cie $\mathcal{S}$ que contenga al origen, considere una esfera $\mathcal{S}_R$ cuyo radio $R > 0$ sea tan pequeño que $\mathcal{S}_R$ esté contenida dentro de $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{W}$ la región comprendida *entre* $\mathcal{S}_R$ y $\mathcal{S}$ (f gura 15). La frontera orientada de $\mathcal{W}$ es la diferencia siguiente:

$$\partial\mathcal{W} = \mathcal{S} - \mathcal{S}_R$$

Esto signif ca que $\mathcal{S}$ está orientada mediante vectores normales que apuntan hacia el exterior y que $\mathcal{S}_R$ lo está mediante normales que apuntan al interior. Por el teorema de la divergencia:

$$\iint_{\partial\mathcal{W}} \mathbf{F}_{c\text{-}i} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}_{c\text{-}i} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathcal{S}_R} \mathbf{F}_{c\text{-}i} \cdot d\mathbf{S} =$$
$$= \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F}_{c\text{-}i}) \, dV = \quad \text{(Teorema de la divergencia)}$$
$$= \iiint_{\mathcal{W}} 0 \, dV = 0 \quad \text{(Pues } \operatorname{div}(\mathbf{F}_{c\text{-}i}) = 0\text{)}$$

Esto demuestra que los f ujos a través de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{S}_R$ son iguales y, en consecuencia, ambos iguales a 4π.

Observe que únicamente se ha aplicado el teorema de la divergencia a una región $\mathcal{W}$ que se encuentra *entre dos superf cies, una contenida en la otra*. Se trata de una formulación más general del teorema que la que se ha enunciado formalmente en el teorema 1 anterior. El comentario al margen detalla la justif cación. ■

Para comprobar que el teorema de la divergencia continúa siendo válido para regiones entre dos superficies, como la región $\mathcal{W}$ en la figura 15, corte la región $\mathcal{W}$ por la mitad. Cada mitad es una región delimitada por una superficie, por lo que se puede aplicar el teorema de la divergencia tal y como se ha enunciado. Sumando los resultados para cada una de las dos mitades, se obtiene el teorema de la divergencia para $\mathcal{W}$. Se utiliza aquí el hecho de que los flujos a través de la cara común a las dos mitades se cancelan.

Este resultado se puede aplicar directamente al campo eléctrico $\mathbf{E}$ de una carga puntual, que es un múltiplo del campo vectorial cuadrático inverso. Para una carga de q culombios en el origen:

$$\mathbf{E} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

donde $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ C^2/N m^2 es la constante de permitividad. Por tanto:

$$\text{Flujo de } \mathbf{E} \text{ a través de } \mathcal{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ está dentro de } \mathcal{S} \\ 0 & \text{si } q \text{ esté fuera de } \mathcal{S} \end{cases}$$

Ahora, en lugar de situar únicamente una carga en el origen, se puede distribuir un número f nito de N cargas puntuales q_i en diferentes puntos del espacio. El campo eléctrico resultante $\mathbf{E}$ es la suma de los campos $\mathbf{E}_i$ debidos a las cargas individuales y

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \cdots + \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}_N \cdot d\mathbf{S}$$

Cada integral a la derecha es, o bien 0, o bien q_i/ϵ_0, según si $\mathcal{S}$ contiene a q_i, por lo que se puede deducir que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\text{carga total delimitada por } \mathcal{S}}{\epsilon_0} \qquad \boxed{6}$$

Esta relación fundamental se denomina la **ley de Gauss**. Un paso al límite muestra que la ec. (6) continúa siendo válida para un campo eléctrico debido a una distribución *continua* de carga.

El siguiente teorema, en que se describe el campo eléctrico debido a una esfera uniformemente cargada, es una aplicación clásica de la ley de Gauss.

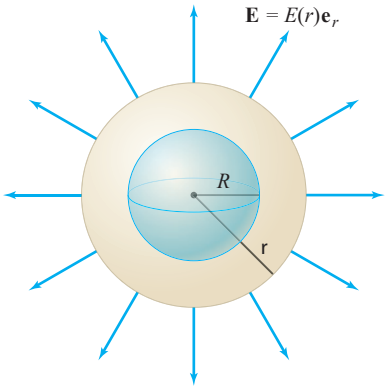


FIGURA 16 El campo eléctrico debido a una esfera uniformemente cargada.

Se ha demostrado el teorema 3 en el caso análogo de un campo gravitacional (también un campo radial y cuadrático inverso) mediante un cálculo laborioso en el problema 48 de la sección 17.4. Aquí, se ha deducido de la ley de Gauss junto con un argumento simple de simetría.

TEOREMA 3 Esfera cargada uniformemente El campo eléctrico debido a una esfera hueca uniformemente cargada $\mathcal{S}_R$ de radio R, centro en el origen y carga total Q, es:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r & \text{si } r > R \\ \mathbf{0} & \text{si } r < R \end{cases} \qquad (7)$$

donde $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2$.

Demostración Por simetría (figura 16), el campo eléctrico $\mathbf{E}$ debe seguir la dirección radial $\mathbf{e}_r$ con magnitud que sólo dependa de la distancia r al origen. Por tanto, $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ para alguna función $E(r)$. El flujo de $\mathbf{E}$ a través de la esfera $\mathcal{S}_r$ de radio r es:

$$\iint_{\mathcal{S}_r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = E(r) \underbrace{\iint_{\mathcal{S}_r} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}}_{\text{Área de la superficie de la esfera}} = 4\pi r^2 E(r)$$

Por la ley de Gauss, este flujo es igual a C/ϵ_0, donde C es la carga delimitada por $\mathcal{S}_r$. Si $r < R$, entonces $C = 0$ y $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Si $r > R$, entonces $C = Q$ y $4\pi r^2 E(r) = Q/\epsilon_0$, o $E(r) = Q/(\epsilon_0 4\pi r^2)$. Esto demuestra la ec. (7). ■

UN APUNTE CONCEPTUAL He aquí un resumen de las operaciones elementales sobre funciones y campos vectoriales:

$$\underset{\text{función}}{f} \xrightarrow{\nabla} \underset{\text{campo vectorial}}{\mathbf{F}} \xrightarrow{\text{rot}} \underset{\text{campo vectorial}}{\mathbf{G}} \xrightarrow{\text{div}} \underset{\text{función}}{g}$$

Un hecho destacado es que el resultado de dos operaciones consecutivas en el diagrama es cero:

$$\text{rot}(\nabla(f)) = \mathbf{0}, \qquad \text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) = 0$$

Se ha comprobado la primera identidad en el ejemplo 1 de la sección 18.2. La segunda identidad se ha dejado como problema (problema 6).

Una pregunta interesante es si todos los campos de vectores que cumplen $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ son necesariamente conservativos, es decir si $\mathbf{F} = \nabla V$ para alguna función V. La respuesta es que sí, pero sólo si el dominio $\mathcal{D}$ es simplemente conexo (toda trayectoria puede contraerse a un punto en $\mathcal{D}$). En la sección 17.3 se vio que el vector vórtice cumple que $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ y que, sin embargo, no puede ser conservativo debido a que su circulación alrededor de la circunferencia unitaria es diferente de cero (la circulación de un campo vectorial conservativo es siempre cero). Sin embargo, el dominio del campo vectorial vórtice es $\mathbb{R}^2$ con el origen eliminado y este dominio no es simplemente conexo.

La situación para potenciales vectoriales es similar. ¿Se puede expresar cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ que cumpla $\text{div}(\mathbf{G}) = \mathbf{0}$ de la forma $\mathbf{G} = \text{rot}(\mathbf{A})$ para algún potencial vectorial $\mathbf{A}$? De nuevo, la respuesta es que sí, siempre que el dominio sea una región $\mathcal{W}$ en $\mathbb{R}^3$ "sin agujeros", como una bola, un cubo o todo $\mathbb{R}^3$. El campo vectorial cuadrático inverso $\mathbf{F}_{\text{c-i}} = \mathbf{e}_r/r^2$ desempeña el papel del campo vórtice en este contexto: aunque $\text{div}(\mathbf{F}_{\text{c-i}}) = 0$, $\mathbf{F}_{\text{c-i}}$ no puede tener un potencial vectorial porque su flujo a través de la esfera unitaria es diferente de cero, como se mostró en el teorema 2 (el flujo a través de una superficie cerrada de un campo vectorial con potencial vectorial es siempre cero, según el teorema 2 de la sección 18.2). En este caso, el dominio de $\mathbf{e}_r/r^2$ es $\mathbb{R}^3$ sin el origen, que "tiene un agujero".

Estas propiedades de los campos vectoriales vórtice y cuadrático inverso son importantes porque relacionan las integrales de línea y las integrales de superficie con propiedades "topológicas" del dominio, como si el dominio es simplemente conexo o si tiene agujeros. Se trata de un primer indicio de las importantes y fascinantes conexiones entre el análisis vectorial y el área de las matemáticas denominada topología.

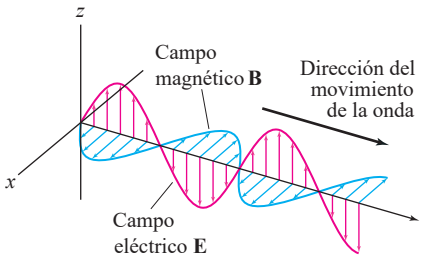


FIGURA 17 Los campos vectoriales **E** y **B** de una onda electromagnética a lo largo de un eje de movimiento.

"No se trata únicamente de elegancia matemática... sino de belleza. Es tan simple pese a describir algo tan complejo".

Francis Collins (1950-), destacado genetista y antiguo director del Proyecto Genoma Humano, al hablar de las ecuaciones de Maxwell.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

James Clerk Maxwell (1831-1879)

El análisis vectorial fue desarrollado en el siglo XIX, en gran parte, para expresar las leyes del magnetismo y la electricidad. El electromagnetismo fue estudiado intensamente en el período 1750-1890, culminando con las famosas ecuaciones de Maxwell, que proporcionan una comprensión unif cada en términos de dos campos de vectores: el campo eléctrico **E** y el campo magnético **B**. En una región de espacio vacío (donde no hay partículas cargadas), las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E}) &= 0 & \operatorname{div}(\mathbf{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{rot}(\mathbf{B}) &= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

donde μ_0 y ϵ_0 son constantes determinadas experimentalmente. En unidades del SI:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ henrios/m}$$

$$\epsilon_0 \approx 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ faradios/m}$$

Estas ecuaciones llevaron a Maxwell a realizar dos predicciones de fundamental importancia: (1) que las ondas electromagnéticas existen (esto fue conf rmado por H. Hertz en 1887) y (2) que la luz es una onda electromagnética.

¿De qué manera sugieren las ecuaciones de Maxwell que las ondas electromagnéticas existen? ¿Y por qué Maxwell concluyó que la luz es una onda electromagnética? Era conocido por los matemáticos en el siglo XVIII que las ondas que viajan a una velocidad c se pueden describir mediante funciones $\varphi(x, y, z, t)$ que cumplen la *ecuación de onda*:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad 8$$

donde Δ es el operador de Laplace (o "laplaciano"):

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Se va a demostrar que las componentes de **E** cumplen esta ecuación de onda. Considere el rotacional a ambos lados de la tercera ecuación de Maxwell:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{E})) = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}(\mathbf{B})$$

A continuación, aplique la cuarta ecuación de Maxwell para obtener:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{E})) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad 9$$

Por último, def na el laplaciano de un campo vectorial:

$$\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$$

aplicando el laplaciano Δ a cada componente, $\Delta\mathbf{F} = \langle \Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3 \rangle$. Entonces, se verif ca la siguiente identidad (vea el problema 36):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = \nabla(\operatorname{div}(\mathbf{F})) - \Delta\mathbf{F}$$

Aplicando esta identidad a **E**, se obtiene $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{E})) = -\Delta\mathbf{E}$, pues $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0$, según la primera ecuación de Maxwell. Por tanto, la ec. (9) conduce a:

$$\Delta\mathbf{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Dicho de otro modo, cada componente del campo eléctrico cumple la ecuación de onda (8), con $c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$. Por tanto, el campo **E** (y análogamente el campo **B**) se puede propagar por el espacio como una onda, dando lugar a la radiación electromagnética (f gura 17).

Maxwell calculó la velocidad c de una onda electromagnética:

$$c = (\mu_0\epsilon_0)^{-1/2} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

y observó que el valor era sospechosamente similar al de la velocidad de la luz (medida por primera vez por Olaf Römer en 1676). Esto tenía que ser más que una coincidencia, tal y como Maxwell escribió en 1862: "Difícilmente se puede evitar la conclusión de que la luz consiste en ondulaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos." Ni que decir tiene, que las tecnologías inalámbricas que impulsan nuestra sociedad moderna se basan en la radiación electromagnética invisible pero cuya existencia Maxwell predijo por primera vez por motivos matemáticos.

18.3 RESUMEN

- Divergencia de $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- El teorema de la divergencia: si $\mathcal{W}$ es una región en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera $\partial\mathcal{W}$ es una superficie, orientada mediante vectores normales que apuntan hacia el exterior de $\mathcal{W}$, entonces:

$$\iint_{\partial\mathcal{W}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$$

- Corolario: si $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$, entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la frontera $\partial\mathcal{W}$ de cualquier $\mathcal{W}$ contenida en el dominio de $\mathbf{F}$ es nulo.
- La divergencia $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ se interpreta como el "flujo por unidad de volumen", lo que quiere decir que el flujo a través de una superficie cerrada que contenga a un punto P es aproximadamente igual a $\operatorname{div}(\mathbf{F})(P)$ veces el volumen delimitado.
- Operaciones básicas sobre funciones y campos vectoriales:

$$\underset{\text{función}}{f} \xrightarrow{\nabla} \underset{\text{campo vectorial}}{\mathbf{F}} \xrightarrow{\text{rot}} \underset{\text{campo vectorial}}{\mathbf{G}} \xrightarrow{\text{div}} \underset{\text{función}}{g}$$

- El resultado de dos operaciones consecutivas es cero:

$$\operatorname{rot}(\nabla(f)) = \mathbf{0} \qquad \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = 0$$

- El campo cuadrático inverso $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r/r^2$, definido para $r \neq 0$, cumple $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$. El flujo de $\mathbf{F}$ a través de una superficie cerrada $\mathcal{S}$ es 4π si $\mathcal{S}$ contiene al origen y es cero en caso contrario.

18.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿A qué es igual el flujo de $\mathbf{F} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ a través de una superficie cerrada?

2. Justifique la siguiente afirmación: el flujo de $\mathbf{F} = \langle x^3, y^3, z^3 \rangle$ a través del cualquier superficie cerrada es positivo.

3. ¿Cuáles del las siguientes expresiones tienen sentido (donde $\mathbf{F}$ es un campo vectorial y f es una función)? Entre aquellas que tienen sentido, ¿cuáles son automáticamente cero?

(a) $\operatorname{div}(\nabla f)$ **(b)** $\operatorname{rot}(\nabla f)$ **(c)** $\nabla \operatorname{rot}(f)$

(d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F}))$ **(e)** $\operatorname{rot}(\operatorname{div}(\mathbf{F}))$ **(f)** $\nabla(\operatorname{div}(\mathbf{F}))$

4. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto (donde $\mathbf{F}$ es un campo vectorial diferenciable con continuidad y definido en todo punto)?

(a) El flujo de $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ a través de toda superficie es cero.

(b) Si $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, entonces el flujo de $\mathbf{F}$ a través de toda superficie es cero.

(c) El flujo de $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ a través de toda superficie cerrada es cero.

5. ¿De qué manera implica el teorema de la divergencia que el flujo de $\mathbf{F} = \langle x^2, y - e^z, y - 2zx \rangle$ a través de una superficie cerrada es igual al volumen delimitado?

Problemas

En los problemas 1-4, calcule la divergencia del campo vectorial.

1. $\mathbf{F} = \langle xy, yz, y^2 - x^3 \rangle$

2. $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F} = \langle x - 2zx^2, z - xy, z^2x^2 \rangle$

4. $\operatorname{sen}(x + z)\mathbf{i} - ye^{xz}\mathbf{k}$

5. Halle una constante c para la que el campo vectorial velocidad:

$$\mathbf{v} = (cx - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (3x + 4cz)\mathbf{k}$$

de un fluido es incompresible [es decir, $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$].

6. Compruebe que para cualquier campo vectorial $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$,

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = 0$$

En los problemas 7-10, compruebe el teorema de la divergencia para el campo vectorial y región dados.

7. $\mathbf{F} = \langle z, x, y \rangle$, la caja $[0, 4] \times [0, 2] \times [0, 3]$

8. $\mathbf{F} = \langle y, x, z \rangle$, la región $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

9. $\mathbf{F} = \langle 2x, 3z, 3y \rangle$, la región $x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 2$

10. $\mathbf{F} = \langle x, 0, 0 \rangle$, la región $x^2 + y^2 \le z \le 4$

En los problemas 11-18, aplique el teorema de la divergencia para evaluar el flujo $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

11. $\mathbf{F} = \left\langle 0, 0, z^3/3 \right\rangle$, $\mathcal{S}$ es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12. $\mathbf{F} = \langle y, z, x \rangle$, $\mathcal{S}$ es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

13. $\mathbf{F} = \langle x^3, 0, z^3 \rangle$, $\mathcal{S}$ es el octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en el primer octante $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

14. $\mathbf{F} = \langle e^{x+y}, e^{x+z}, e^{x+y} \rangle$, $\mathcal{S}$ es la frontera del cubo unitario $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$.

15. $\mathbf{F} = \langle x, y^2, z + y \rangle$, $\mathcal{S}$ es la frontera de la región contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre los planos $z = x$ y $z = 8$.

16. $\mathbf{F} = \langle x^2 - z^2, e^{z^2} - \cos x, y^3 \rangle$, $\mathcal{S}$ es la frontera de la región limitada por $x + 2y + 4z = 12$ y los planos coordenados en el primer octante.

17. $\mathbf{F} = \langle x + y, z, z - x \rangle$, $\mathcal{S}$ es la frontera de la región entre el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y el plano xy.

18. $\mathbf{F} = \langle e^{z^2}, 2y + \operatorname{sen}(x^2 z), 4z + \sqrt{x^2 + 9y^2} \rangle$, $\mathcal{S}$ es la región $x^2 + y^2 \le z \le 8 - x^2 - y^2$.

19. Calcule el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ a través de la superficie $\mathcal{S}$ de la figura 18. *Indicación:* aplique el teorema de la divergencia a la superficie cerrada formada por $\mathcal{S}$ y el disco unitario.

20. Sea $\mathcal{S}_1$ la superficie cerrada formada por $\mathcal{S}$ en la figura 18 junto con el disco unitario. Halle el volumen limitado por $\mathcal{S}_1$, suponiendo que:

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \langle x, 2y, 3z \rangle \cdot d\mathbf{S} = 72$$

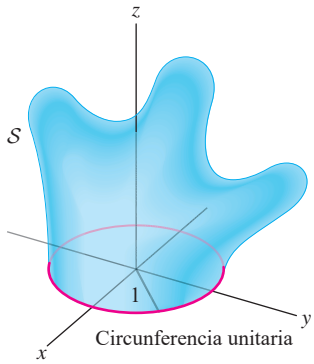


FIGURA 18 Superficie $\mathcal{S}$ cuya frontera es la circunferencia unitaria.

21. Sea $\mathcal{S}$ el semicilindro $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$, $0 \le z \le 1$. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial horizontal (la componente z es cero) tal que $\mathbf{F}(0, y, z) = zy^2\mathbf{i}$. Sea $\mathcal{W}$ la región sólida delimitada por $\mathcal{S}$ y suponga que:

$$\iiint_{\mathcal{W}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = 4$$

Halle el flujo de $\mathbf{F}$ a través del lado curvado de $\mathcal{S}$.

22. Volumen como una integral de superficie Sea $\mathbf{F} = \langle x, y, z \rangle$. Demuestre que si $\mathcal{W}$ es una región de $\mathbb{R}^3$ con frontera suave $\mathcal{S}$, entonces:

$$\text{Volume}(\mathcal{W}) = \frac{1}{3} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \qquad \boxed{10}$$

23. Use la ec. (10) para calcular el volumen de la bola unitaria como una integral de superficie sobre la esfera unitaria.

24. Compruebe que cuando se aplica la ec. (10) a la caja $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ se obtiene el volumen $V = abc$.

25. Sea $\mathcal{W}$ la región de la figura 19 limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $z = x + 1$ y el plano xy. Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F} = \left\langle z, x, y + z^2 \right\rangle$ a través de la frontera de $\mathcal{W}$.

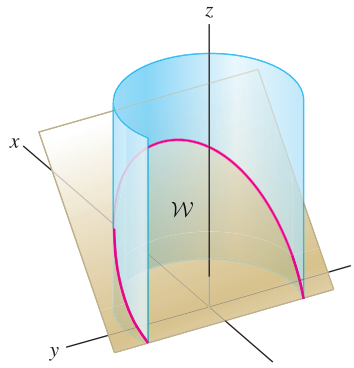


FIGURA 19

26. Sea $I = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde:

$$\mathbf{F} = \left\langle \frac{2yz}{r^2}, -\frac{xz}{r^2}, -\frac{xy}{r^2} \right\rangle$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) y $\mathcal{S}$ es la frontera de una región $\mathcal{W}$.

(a) Compruebe que $\mathbf{F}$ no tiene divergencia.

(b) Pruebe que $I = 0$ si $\mathcal{S}$ es una esfera centrada en el origen. Sin embargo, explique por qué el teorema de la divergencia no se puede utilizar para demostrar este resultado.

27. El campo velocidad de un fluido $\mathbf{v}$ (en metros por segundo) tiene divergencia $\operatorname{div}(\mathbf{v})(P) = 3$ en el punto $P = (2, 2, 2)$. Estime la tasa de circulación hacia el exterior de una esfera de radio 0,5 y centrada en P.

28. Una manguera se sitúa en una caja transparente de 10 cm^3 que se suspende en una piscina. El agua circula a través de la superficie de la caja, a razón de 12 cm^3/s. Estime $\operatorname{div}(\mathbf{v})(P)$, donde $\mathbf{v}$ es el campo velocidad del agua en la piscina y P es el centro de la caja. ¿Cuáles son las unidades de $\operatorname{div}(\mathbf{v})(P)$?

29. El campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico orientado en la dirección $\mathbf{k}$ es $\mathbf{E} = \nabla(z/r^3)$, donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (figura 20). Sea $\mathbf{e}_r = r^{-1} \langle x, y, z \rangle$.

(a) Pruebe que $\mathbf{E} = r^{-3}\mathbf{k} - 3zr^{-4}\mathbf{e}_r$.

(b) Calcule el flujo de $\mathbf{E}$ a través de una esfera centrada en el origen.

(c) Calcule $\operatorname{div}(\mathbf{E})$.

(d) ¿Se puede utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo de **E** a través de una esfera centrada en el origen?

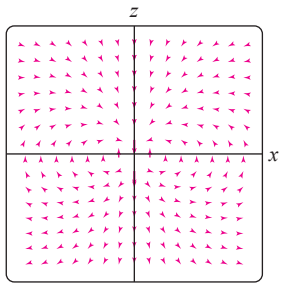


FIGURA 20 El campo vectorial dipolo restringido al plano xz.

30. Sea **E** el campo eléctrico debido a una vara larga de radio R, cargada uniformemente y con densidad de carga δ por unidad de longitud (figura 21). Por simetría, se puede suponer que **E** es perpendicular en todo punto a la vara y que su magnitud $E(d)$ sólo depende de la distancia d a la vara (en realidad, esto sólo sería cierto si la vara fuera infinita, pero es casi cierto si la barra es lo suficientemente larga). Pruebe que $E(d) = \delta/2\pi\epsilon_0 d$ para $d > R$. *Indicación:* aplique la ley de Gauss a un cilindro de radio R y longitud unitaria, tal que su eje se encuentre a lo largo de la vara.

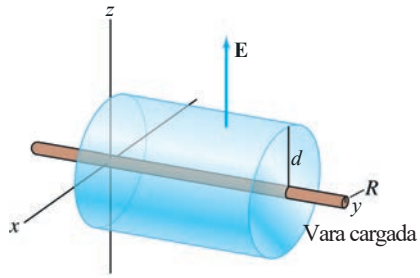


FIGURA 21

31. Sea $\mathcal{W}$ la región comprendida entre la esfera de radio 4 y el cubo de lado 1, ambos centrados en el origen. ¿A qué es igual el flujo a lo largo de la frontera $\mathcal{S} = \partial\mathcal{W}$ de un campo vectorial **F** cuya divergencia sea constante e igual a $\text{div}(\mathbf{F}) = -4$?

32. Sea $\mathcal{W}$ la región entre la esfera de radio 3 y la esfera de radio 2, ambas centradas en el origen. Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$ a través de la frontera $\mathcal{S} = \partial\mathcal{W}$.

33. Halle y demuestre una regla del producto que exprese $\text{div}(f\,\mathbf{F})$ en términos de $\text{div}(\mathbf{F})$ y ∇f.

34. Demuestre la identidad:

$$\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \text{rot}(\mathbf{G})$$

A continuación demuestre que el producto vectorial de dos campos vectoriales irrotacionales es incompresible [**F** se denomina **irrotacional** si $\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$ e **incompresible** si $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$].

35. Demuestre que $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

En los problemas 36-38, Δ denota el operador de Laplace, definido como:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

36. Demuestre la identidad:

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{F})) = \nabla(\text{div}(\mathbf{F})) - \Delta\mathbf{F}$$

donde $\Delta\mathbf{F}$ denota $\langle \Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3 \rangle$.

37. Una función φ que cumple $\Delta\varphi = 0$ de denomina **armónica**.

(a) Pruebe que $\Delta\varphi = \text{div}(\nabla\varphi)$ para cualquier función φ.

(b) Pruebe que φ es armónica si y sólo si $\text{div}(\nabla\varphi) = 0$.

(c) Pruebe que si **F** es el gradiente de una función armónica, entonces $\text{rot}(F) = 0$ y $\text{div}(F) = 0$.

(d) Pruebe que $\mathbf{F} = \left\langle xz, -yz, \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \right\rangle$ es el gradiente de una función armónica. ¿A qué es igual el flujo de **F** a través de una superficie cerrada?

38. Sea $\mathbf{F} = r^n\mathbf{e}_r$, donde n es un número cualesquiera, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ y $\mathbf{e}_r = r^{-1}\langle x, y, z \rangle$ es el vector radial unitario.

(a) Calcule $\text{div}(\mathbf{F})$.

(b) Calcule el flujo de **F** a través de la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen. ¿Para qué valores de n resulta el flujo independiente de R?

(c) Demuestre que $\nabla(r^n) = n\,r^{n-1}\mathbf{e}_r$.

(d) Use (c) para probar que **F** es conservativo para $n \neq -1$. A continuación, pruebe que $\mathbf{F} = r^{-1}\mathbf{e}_r$ también es conservativo calculando el gradiente de $\ln r$.

(e) ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathcal{C}$ es una curva cerrada que no pasa por el origen?

(f) Halle los valores de n para los que la función $\varphi = r^n$ es armónica.

Problemas avanzados

39. Sea $\mathcal{S}$ la superficie frontera de una región $\mathcal{W}$ en $\mathbb{R}^3$ y sea $D_{\mathbf{e_n}}\varphi$ la derivada direccional de φ, donde $\mathbf{e_n}$ es el vector normal unitario que apunta hacia el exterior. Sea Δ el operador de Laplace definido anteriormente.

(a) Use el teorema de la divergencia para demostrar que:

$$\iint_{\mathcal{S}} D_{\mathbf{e_n}}\varphi \, dS = \iiint_{\mathcal{W}} \Delta\varphi \, dV$$

(b) Pruebe que si φ es una función armónica (definida en el problema 37), entonces:

$$\iint_{\mathcal{S}} D_{\mathbf{e_n}}\varphi \, dS = 0$$

40. Suponga que φ es armónica. Pruebe que $\text{div}(\varphi\nabla\varphi) = \|\nabla\varphi\|^2$ y concluya que:

$$\iint_{\mathcal{S}} \varphi D_{\mathbf{e_n}}\varphi \, dS = \iiint_{\mathcal{W}} \|\nabla\varphi\|^2 \, dV$$

41. Sea $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$ un campo vectorial definido sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$. Use las siguientes etapas para probar que $\mathbf{F}$ tiene un potencial vectorial.

(a) Sea $\mathbf{A} = \langle f, 0, g\rangle$. Pruebe que:

$$\text{rot}(\mathbf{A}) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle$$

(b) Fije un valor cualquiera y_0 y pruebe que si se define:

$$f(x,y,z) = -\int_{y_0}^{y} R(x,t,z)\,dt + \alpha(x,z)$$
$$g(x,y,z) = \int_{y_0}^{y} P(x,t,z)\,dt + \beta(x,z)$$

donde α y β dos dos funciones cualquiera de x y de z, entonces $\partial g/\partial y = P$ y $-\partial f/\partial y = R$.

(c) Queda por probar que α y β se pueden elegir de tal manera que $Q = \partial f/\partial z - \partial g/\partial x$. Compruebe que la siguiente elección funciona (para cualquier elección de z_0):

$$\alpha(x,z) = \int_{z_0}^{z} Q(x,y_0,t)\,dt \qquad \beta(x,z) = 0$$

Indicación: necesitará utilizar la relación $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$.

42. Pruebe que:

$$\mathbf{F} = \langle 2y - 1, 3z^2, 2xy\rangle$$

tiene un potencial vectorial y halle uno.

43. Pruebe que:

$$\mathbf{F} = \langle 2ye^z - xy, y, yz - z\rangle$$

tiene un potencial vectorial y halle uno.

44. En el libro se ha visto que, aunque el campo vectorial radial cuadrático inverso $\mathbf{F} = \dfrac{\mathbf{e}_r}{r^2}$ cumple $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$, $\mathbf{F}$ no puede tener potencial vectorial sobre su dominio $\{(x,y,z) \neq (0,0,0)\}$ porque el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una esfera que contenga al origen es diferente de cero.

(a) Pruebe que el método del problema 41 da lugar a un potencial vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$ sobre el dominio restringido $\mathcal{D}$ formado por $\mathbb{R}^3$ sin el eje y.

(b) Pruebe que $\mathbf{F}$ también tiene potencial vectorial sobre los dominios que se obtienen al quitar o bien el eje x o bien el eje z a $\mathbb{R}^3$.

(c) ¿Hay contradicción entre la existencia de este potencial vectorial sobre dominios restringidos y el hecho que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una esfera que contenga al origen sea diferente de cero?

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

1. Sea $\mathbf{F}(x,y) = \langle x + y^2, x^2 - y\rangle$ y sea $\mathcal{C}$ la circunferencia unitaria, con orientación antihoraria. Evalúe $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ directamente como una integral de línea y utilizando el teorema de Green.

2. Sea $\partial\mathcal{R}$ la frontera del rectángulo de la figura 1 y sean $\partial\mathcal{R}_1$ y $\partial\mathcal{R}_2$ las fronteras de los dos triángulos, ambas con orientación antihoraria.

(a) Determine $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{R}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ si $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 4$ y $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{R}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -2$.

(b) ¿Cuál es el valor de $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F}\,d\mathbf{s}$ si $\partial\mathcal{R}$ estuviera orientada en sentido horario?

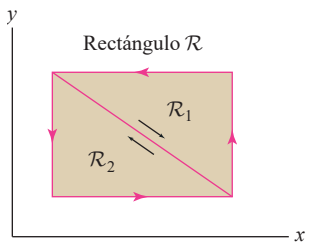


FIGURA 1

En los problemas 3-6, use el teorema de Green para evaluar la integral de línea alrededor de la curva cerrada dada.

3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} xy^3\,dx + x^3y\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es el rectángulo $-1 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 3$, con orientación antihoraria.

4. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (3x + 5y - \cos y)\,dx + x\,\text{sen}\,y\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es cualquier curva delimitando una región de área 4, con orientación antihoraria.

5. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} y^2\,dx - x^2\,dy$, donde $\mathcal{C}$ está formada por los arcos $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$, con orientación horaria.

6. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} ye^x\,dx + xe^y\,dy$, donde $\mathcal{C}$ es el triángulo de vértices $(-1,0)$, $(0,4)$, y $(0,1)$, con orientación antihoraria.

7. Sea $\mathbf{c}(t) = (t^2(1-t), t(t-1)^2)$.

(a) GU Represente la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ para $0 \le t \le 1$.

(b) Calcule el área A de la región delimitada por $\mathbf{c}(t)$ para $0 \le t \le 1$ usando la fórmula $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (x\,dy - y\,dx)$.

8. En (a)-(d), determine si la ecuación es una identidad (válida para todo $\mathbf{F}$ o V). En caso contrario, proporcione un ejemplo en que la ecuación no se cumpla:

(a) $\text{rot}(\nabla V) = 0$ **(b)** $\text{div}(\nabla V) = 0$

(c) $\text{div}(\text{rot}(\mathbf{F})) = 0$ **(d)** $\nabla(\text{div}(\mathbf{F})) = 0$

En los problemas 9-12, calcule el rotacional y la divergencia del campo vectorial.

9. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ **10.** $\mathbf{F} = \langle e^{x+y}, e^{y+z}, xyz\rangle$

11. $\mathbf{F} = \nabla(e^{-x^2-y^2-z^2})$

12. $\mathbf{e}_r = r^{-1}\langle x,y,z\rangle$ $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$

13. Recuerde que si F_1, F_2 y F_3 son funciones derivables de una variable, entonces:

$$\text{rot}\left(\langle F_1(x), F_2(y), F_3(z)\rangle\right) = \mathbf{0}$$

Use este resultado para calcular el rotacional de:

$$\mathbf{F} = \langle x^2 + y^2, \ln y + z^2, z^3 \operatorname{sen}(z^2)e^{z^3}\rangle$$

14. Dé un ejemplo de un campo vectorial diferente de cero $\mathbf{F}$ tal que $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ y $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$.

15. Compruebe las identidades de los problemas 6 y 34 de la sección 18.3 para los campos vectoriales $\mathbf{F} = \langle xz, ye^x, yz\rangle$ y $\mathbf{G} = \langle z^2, xy^3, x^2y\rangle$.

16. Suponga que $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son superf cies con la misma curva frontera orientada $\mathcal{C}$. ¿Cuál de las siguientes condiciones garantiza que el f ujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}_1$ es igual al f ujo de $\mathbf{F}$ a través de $\mathcal{S}_2$?

(i) $\mathbf{F} = \nabla V$ para alguna función V.

(ii) $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{G})$ para algún campo vectorial $\mathbf{G}$.

17. Demuestre que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial gradiente, entonces el f ujo de rot($\mathbf{F}$) a través de una superf cie suave $\mathcal{S}$ (sea o no cerrada) es igual a cero.

18. Compruebe el teorema de Stokes para $\mathbf{F} = \langle y, z - x, 0\rangle$ y la superf cie $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, orientada mediante vectores normales que apuntan hacia el exterior.

19. Sea $\mathbf{F} = \langle z^2, x + z, y^2\rangle$ y sea $\mathcal{S}$ la mitad superior del elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$$

orientado mediante vectores normales que apuntan hacia el exterior. Use el teorema de Stokes para calcular $\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

20. Use el teorema de Stokes para evaluar $\oint_{\mathcal{C}} \langle y, z, x\rangle \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathcal{C}$ es la curva de la f gura 2.

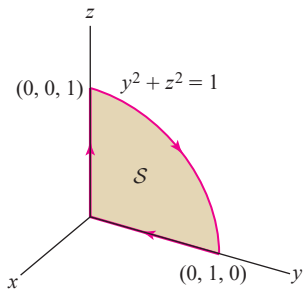


FIGURA 2

21. Sea $\mathcal{S}$ el lado del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 2$ (no incluye la base ni la tapa del cilindro). Use el teorema de Stokes para calcular el f ujo de $\mathbf{F} = \langle 0, y, -z\rangle$ a través de $\mathcal{S}$ (con normal que apunta al exterior) hallando un vector potencial $\mathbf{A}$ tal que $\text{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{F}$.

22. Compruebe el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = \langle 0, 0, z\rangle$ y la región $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

En los problemas 23-26, use el teorema de la divergencia para calcular $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ *para el campo vectorial y superf cie dados.*

23. $\mathbf{F} = \langle xy, yz, x^2z + z^2\rangle$, $\mathcal{S}$ es la frontera de la caja $[0, 1]\times[2, 4]\times[1, 5]$.

24. $\mathbf{F} = \langle xy, yz, x^2z + z^2\rangle$, $\mathcal{S}$ es la frontera de la esfera unidad.

25. $\mathbf{F} = \langle xyz + xy, \frac{1}{2}y^2(1 - z) + e^x, e^{x^2+y^2}\rangle$, $\mathcal{S}$ es la frontera del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 0$ y $z = y - 4$.

26. $\mathbf{F} = \langle \operatorname{sen}(yz), \sqrt{x^2 + z^4}, x\cos(x - y)\rangle$, $\mathcal{S}$ es cualquier superf cie suave cerrada que sea frontera de una región en $\mathbb{R}^3$.

27. Halle el volumen de una región $\mathcal{W}$ si

$$\iint_{\partial\mathcal{W}} \left\langle x + xy + z, x + 3y - \frac{1}{2}y^2, 4z\right\rangle \cdot d\mathbf{S} = 16.$$

28. Pruebe que la circulación de $\mathbf{F} = \langle x^2, y^2, z(x^2 + y^2)\rangle$ alrededor de cualquier curva $\mathcal{C}$ sobre la superf cie del cono $z^2 = x^2 + y^2$ es igual a cero (f gura 3).

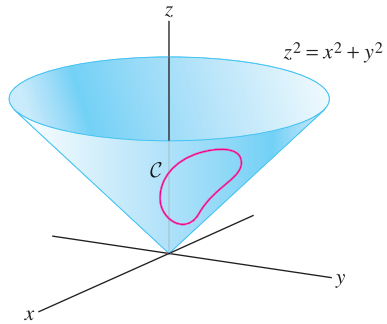


FIGURA 3

En los problemas 29-32, sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial cuyo rotacional y divergencia en el origen son:*

$$\text{rot}(\mathbf{F})(0, 0, 0) = \langle 2, -1, 4\rangle \qquad \text{div}(\mathbf{F})(0, 0, 0) = -2$$

29. Estime $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia de radio 0,03 en el plano xy y centro en el origen.

30. Estime $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathcal{C}$ es la frontera del cuadrado de lado 0,03 en el plano yz, centrado en el origen. ¿Depende la estimación de la orientación del cuadrado dentro del plano yz? ¿Podría depender la circulación real de cómo se orientara?

31. Suponga que $\mathbf{v}$ es el campo velocidad de un f uido y suponga que se sitúa una pequeña rueda con palas en el origen. Halle la ecuación del plano en que se debería situar la rueda de palas para que gire lo más rápido posible.

32. Estime el f ujo de $\mathbf{F}$ a través de la caja de lado 0,5 de la f gura 4. ¿Depende el resultado de la orientación de la caja respecto a los ejes de coordenadas?

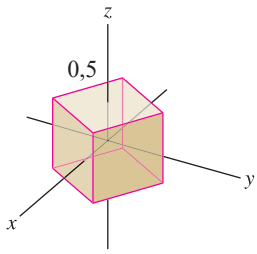


FIGURA 4

33. El campo vectorial velocidad (en metros por segundo) es:

$$\mathbf{F} = \langle x^2 + y^2, 0, z^2 \rangle$$

Sea $\mathcal{W}$ la región entre el hemisferio

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x, y, z \geq 0\}$$

y el disco $\mathcal{D} = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en el plano xy. Recuerde que la tasa de circulación de un f uido a través de una superf cie es igual al f ujo de **F** a través de la superf cie.

(a) Pruebe que la tasa de circulación a través de $\mathcal{D}$ es cero.

(b) Use el teorema de la divergencia para probar que la tasa de circulación de a través de $\mathcal{S}$, orientada con normales apuntando al exterior, es igual a $\iiint_{\mathcal{W}} \text{div}(\mathbf{F})\, dV$. A continuación, calcule esta integral triple.

34. El campo velocidad de un f uido (en metros por segundo) es:

$$\mathbf{F} = (3y - 4)\mathbf{i} + e^{-y(z+1)}\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

(a) Estime la tasa de circulación (en metros cúbicos por segundo) a través de una pequeña superf cie $\mathcal{S}$ alrededor del origen, si $\mathcal{S}$ delimita una región de volumen 0,01 m^3.

(b) Estime la circulación de **F** sobre una circunferencia en el plano xy de radio $r = 0{,}1$ m y centro en el origen (con orientación antihoraria cuando se mira desde arriba).

(c) Estime la circulación de **F** sobre una circunferencia en el plano yz de radio $r = 0{,}1$ m y centro en el origen (con orientación antihoraria cuando se mira desde el eje de las x positivas).

35. Sea $V(x, y) = x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. El campo vectorial $\mathbf{F} = \nabla V$ (f gura 5) proporciona un modelo en el plano del campo vectorial de un f uido incompresible, irrotacional que circula sobrepasando un obstáculo cilíndrico (en este caso, el obstáculo es la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$).

(a) Compruebe que **F** es irrotacional [por def nición, **F** es irrotacional si $\text{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$].

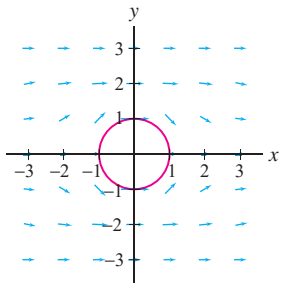


FIGURA 5 El campo vectorial ∇V para $V(x, y) = x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

(b) Compruebe que **F** es tangente a la circunferencia unitaria en cualquier punto de la propia circunferencia unitaria, salvo en $(1, 0)$ y en $(-1, 0)$ (donde $\mathbf{F} = \mathbf{0}$).

(c) ¿A qué es igual la circulación de **F** alrededor de la circunferencia unitaria?

(d) Calcule la integral de línea de **F** a lo largo de las mitades superior e inferior de la circunferencia unitaria, por separado.

36. La f gura 6 muestra el campo vectorial $\mathbf{F} = \nabla V$, donde

$$V(x, y) = \ln\left(x^2 + (y - 1)^2\right) + \ln\left(x^2 + (y + 1)^2\right)$$

que es el campo vectorial velocidad para la circulación de un f uido con fuentes de igual fuerza en $(0, \pm 1)$ (observe que V no está def nido en estos dos puntos). Pruebe que **F** es tanto irrotacional como incompresible, es decir, $\text{rot}_z(\mathbf{F}) = 0$ y $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$ [al calcular $\text{div}(\mathbf{F})$, considere **F** como un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ de componente z igual a cero]. ¿Es necesario calcular $\text{rot}_z(\mathbf{F})$ para deducir que es cero?

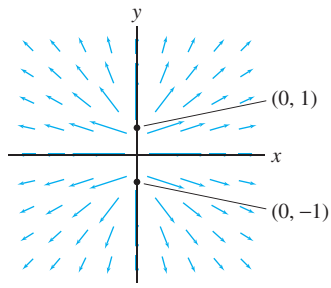


FIGURA 6 El campo vectorial ∇V para $V(x, y) = \ln(x^2 + (y - 1)^2) + \ln(x^2 + (y + 1)^2)$.

37. En la sección 18.1, se probó que si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple, con orientación antihoraria, entonces la integral de línea es:

$$\text{Área delimitada por } \mathcal{C} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} x\, dy - y\, dx \qquad \boxed{1}$$

Suponga que $\mathcal{C}$ es una trayectoria de P a Q que no es cerrada pero que cumple la propiedad de que toda recta por el origen interseca con $\mathcal{C}$ como mucho en un punto, como en la f gura 7. Sea $\mathcal{R}$ la región delimitada por $\mathcal{C}$ y los dos segmentos que unen P y Q al origen. Pruebe que la integral de línea de la ec. (1) es igual al área de $\mathcal{R}$. *Indicación:* pruebe que la integral de línea de $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$ a lo largo de los dos segmentos radiales es cero y aplique el teorema de Green.

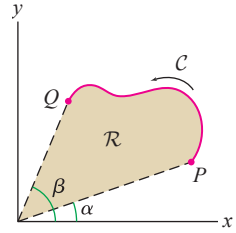


FIGURA 7

38. Suponga que la curva $\mathcal{C}$ de la f gura 7 tiene ecuación polar $r = f(\theta)$.

(a) Pruebe que $\mathbf{c}(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\,\text{sen}\,\theta)$ es una parametrización antihoraria de $\mathcal{C}$.

(b) En la sección 12.4, se demostró que el área de la región $\mathcal{R}$ viene dada por la fórmula:

$$\text{Área de } \mathcal{R} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\, d\theta$$

Use el resultado del problema 37 para proporcionar una nueva demostración de esta fórmula. *Indicación:* Evalúe la integral de línea en la ec. (1) usando $\mathbf{c}(\theta)$.

39. Demuestre la siguiente generalización de la ec. (1). Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple en el plano (f gura 8):

$$\mathcal{S}: \quad ax + by + cz + d = 0$$

Entonces el área de la región R delimitada por $\mathcal{C}$ es igual a:

$$\frac{1}{2\|\mathbf{n}\|}\oint_{\mathcal{C}} (bz - cy)\, dx + (cx - az)\, dy + (ay - bx)\, dz$$

donde $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ es el vector normal a $\mathcal{S}$ y $\mathcal{C}$ está orientada como la frontera de $\mathcal{R}$ (respecto al vector normal $\mathbf{n}$). *Indicación:* aplique el teorema de Stokes a $\mathbf{F} = \langle bz - cy, cx - az, ay - bx\rangle$.

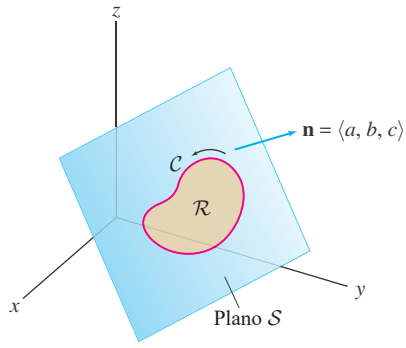


FIGURA 8

40. Use el resultado del problema 39 para calcular el área del triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ como una integral de línea. Compruebe su resultado aplicando geometría analítica.

41. Pruebe que $\Phi(\theta, \phi) = (a\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, b\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, c\cos\phi)$ es una parametrización del elipsoide:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

A continuación, calcule el volumen del elipsoide como la integral de superf cie de $\mathbf{F} = \frac{1}{3}\langle x, y, z\rangle$ (esta integral de superf cie es igual al volumen, por el teorema de la divergencia).

A EL LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Uno de los retos en aprendizaje del cálculo inf nitesimal es acostumbrarse cada vez más a su lenguaje preciso y a su terminología, especialmente a los enunciados de los teoremas. En esta sección se analizan algunos detalles de la lógica que son útiles, y en realidad necesarios, para entender y aplicar los teoremas correctamente.

Muchos teoremas en matemáticas hacen uso de **implicaciones**. Si A y B son enunciados, entonces la implicación $A \Longrightarrow B$ es la af rmación que A implica B:

$$A \Longrightarrow B: \qquad \textit{Si } A \textit{ es verdadero, entonces } B \textit{ es verdadero.}$$

El enunciado A se denomina la **hipótesis** (o premisa) y el enunciado B es la **conclusión** de la implicación. He aquí un ejemplo: *Si m y n son enteros pares, entonces $m + n$ es un entero par*. Este enunciado se puede dividir en una hipótesis y una conclusión:

$$\underbrace{m \text{ y } n \text{ son enteros pares}}_{A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{m + n \text{ es un entero par}}_{B}$$

En el lenguaje coloquial, las implicaciones se suelen utilizar de forma menos precisa. Un ejemplo es: *Si trabajas duro, entonces tendrás éxito*. Además, algunos enunciados que no son inicialmente de la forma $A \Longrightarrow B$ se pueden reformular como implicaciones. Por ejemplo, el enunciado "Los gatos son mamíferos" se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\text{Sea } X \text{ un animal.} \quad \underbrace{X \text{ es un gato}}_{A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{X \text{ es un mamífero}}_{B}$$

Cuando se dice que una implicación $A \Longrightarrow B$ es verdadera, no se está af rmando que A o B sean necesariamente ciertas. De hecho, se está realizando la af rmación condicional de que *si* A fuera cierta, *entonces* B también sería cierta. En el ejemplo anterior, si X no fuera un gato, entonces la implicación no proporciona ninguna información.

La **negación** de un enunciado A es la af rmación de que A es falso y se denota $\neg A$.

Enunciado A	Negación $\neg A$
X vive en California.	X no vive en California.
$\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.	$\triangle ABC$ no es un triángulo rectángulo.

La negación de la negación es el enunciado original: $\neg(\neg A) = A$. Decir que *X no no vive en California* es lo mismo que decir que *X vive en California*.

EJEMPLO 1 Formule la negación de cada enunciado.

(a) La puerta está abierta y el perro está ladrando.

(b) La puerta está abierta o el perro está ladrando (o ambos).

Solución

(a) El primer enunciado es verdadero si las dos condiciones se cumplen (puerta abierta y perro ladrando), y es falsa si al menos una de estas dos condiciones no se cumple. Por tanto, la negación es:

O la puerta no está abierta *O* el perro no está ladrando *(o ambas)*.

(b) El segundo enunciado es verdadero si, al menos, una de las dos condiciones (puerta abierta o perro ladrando) se cumple, y es falso si ninguna de las dos condiciones se cumple. Por tanto, la negación es:

La puerta no está abierta *Y* el perro no está ladrando. ■

Contraposición y recíproco

Dos operaciones importantes son la formación de la contraposición y la formación del recíproco de un enunciado. La **contraposición** de $A \Longrightarrow B$ es el enunciado "Si B es falso, entonces A es falso":

Recuerde que cuando se forma la contraposición, se invierte el orden de A y B. La contraposición de $A \Longrightarrow B$ NO es $\neg A \Longrightarrow \neg B$.

La contraposición de $A \Longrightarrow B$ es $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

He aquí algunos ejemplos:

Enunciado	Contraposición
Si X es un gato, entonces X es un mamífero.	Si X no es un mamífero, entonces X no es un gato.
Si trabajas duro, entonces tendrás éxito.	Si no tienes éxito, entonces no trabajaste duro.
Si m y n son ambos pares, entonces $m + n$ es par.	Si $m + n$ no es par, entonces m y n no son ambos pares.

Una observación clave es la siguiente:

La contraposición y la implicación original son equivalentes.

El hecho que $A \Longrightarrow B$ es equivalente a su contraposición $\neg B \Longrightarrow \neg A$ es una regla general de la lógica que no depende de lo que A y B signifiquen. Este regla pertenece a la disciplina denominada "lógica formal," que trata sobre las relaciones lógicas entre enunciados, sin tener en cuenta el contenido real de estos.

Dicho de otro modo, si una implicación es verdadera, entonces su contraposición es automáticamente verdadera, y viceversa. En esencia, una implicación y su contraposición son dos maneras de decir la misma cosa. Por ejemplo, la contraposición "Si X no es un mamífero, entonces X no es un gato" es una manera indirecta de decir que los gatos son mamíferos.

El **recíproco** de $A \Longrightarrow B$ es la implicación *inversa* $B \Longrightarrow A$:

Implicación: $A \Longrightarrow B$	Recíproco $B \Longrightarrow A$
Si A es verdadero, entonces B es verdadero.	Si B es verdadero, entonces A es verdadero.

El recíproco desempeña un papel diferente al de la contraposición, porque *el recíproco NO es equivalente a la implicación original*. El recíproco puede ser verdadero o falso, incluso si la implicación original es verdadera. He aquí algunos ejemplos:

Enunciado Verdadero	Recíproco	¿Recíproco Verdadero o Falso?
Si X es un gato, entonces X es un mamífero.	Si X es un mamífero, entonces X es un gato.	Falso
Si m es par, entonces m^2 es par.	Si m^2 es par, entonces m es par.	Verdadero

Un contraejemplo es un ejemplo que cumple la hipótesis pero no la conclusión del enunciado. Si existe un solo contraejemplo, entonces el enunciado es falso. Sin embargo, no se puede demostrar que un enunciado sea cierto proporcionando simplemente un ejemplo.

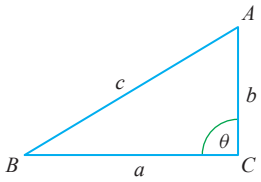


FIGURA 1

EJEMPLO 2 Un ejemplo en que el recíproco es falso Pruebe que el recíproco de "Si m y n son pares, entonces $m + n$ es par" es falso.

Solución El recíproco es "Si $m + n$ es par, entonces m y n son pares". Para probar que el recíproco es falso, se proporciona un contraejemplo. Considere $m = 1$ y $n = 3$ (o cualquier otra pareja de números impares). La suma es par (pues $1 + 3 = 4$), pero ninguno de los dos, ni 1 ni 3, es par. Por tanto, el recíproco es falso. ■

EJEMPLO 3 Un ejemplo en el que el recíproco es verdadero Enuncie la contraposición y recíproco del teorema de Pitágoras. ¿Alguno de ellos es verdadero?

Solución Considere un triángulo de lados a, b y c, y sea θ el ángulo opuesto al lado de longitud c como en la f gura 1. El teorema de Pitágoras af rma que si $\theta = 90°$, entonces $a^2 + b^2 = c^2$. He aquí la contraposición y el recíproco de este enunciado:

Teorema de Pitágoras	$\theta = 90° \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$	Verdadero
Contraposición	$a^2 + b^2 \neq c^2 \Longrightarrow \theta \neq 90°$	Automáticamente verdadero
Recíproco	$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow \theta = 90°$	Verdadero (pero no automático)

La contraposición es automáticamente cierta porque solamente es otra manera de expresar el teorema original. El recíproco no es automáticamente cierto porque posiblemente podría existir un triángulo no rectángulo que cumpliera $a^2 + b^2 = c^2$. Sin embargo, el recíproco del teorema de Pitágoras es en realidad cierto. Se demuestra a partir del teorema del coseno (vea el problema 38). ■

Cuando tanto un enunciado $A \Longrightarrow B$ como su recíproco $B \Longrightarrow A$ son verdaderos, se expresa como $A \Longleftrightarrow B$. En tal caso se dice que A y B son **equivalentes**. Se suele describir esta situación con la frase:

$A \Longleftrightarrow B$ A es verdadero *si y sólo si* B es verdadero.

Por ejemplo:

$a^2 + b^2 = c^2$	si y sólo si	$\theta = 90°$
Está amaneciendo	si y sólo si	el sol está saliendo.

A continuación se mencionan algunas variaciones de la terminología que involucran implicaciones con las que usted puede encontrarse:

Enunciado	**Es otra manera de decir**
A es verdadero si B es verdadero.	$B \Longrightarrow A$
A es verdadero sólo si B es verdadero.	$A \Longrightarrow B$ (A no puede ser verdadero salvo si B es también verdadero.)
Para que A sea verdadero, es necesario que B sea verdadero.	$A \Longrightarrow B$ (A no puede ser verdadero salvo si B es también verdadero.)
Para que A sea verdadero, es suf ciente que B sea verdadero.	$B \Longrightarrow A$
Para que A sea verdadero, es necesario y suf ciente que B sea verdadero.	$B \Longleftrightarrow A$

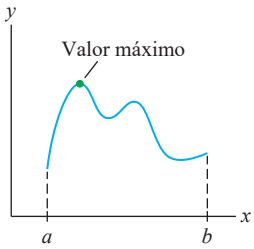


FIGURA 2 Una función continua en un intervalo cerrado $I = [a, b]$ tiene un valor máximo.

Analizando un teorema

Para ver cómo estas reglas de la lógica aparecen en el cálculo inf nitesimal, considere el siguiente resultado de la sección 4.2:

TEOREMA 1 Existencia de un máximo en un intervalo cerrado Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado (acotado) $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza un valor máximo en I (f gura 2).

Para analizar este teorema, vamos a escribir las hipótesis y la conclusión por separado:

Hipótesis A: $f(x)$ es continua e I es cerrado.

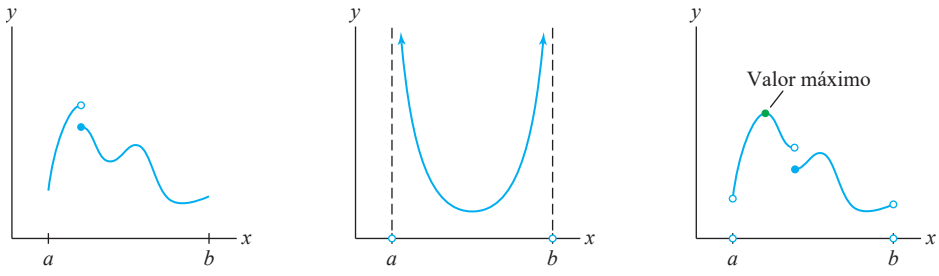
Conclusión B: $f(x)$ alcanza un valor máximo en I.

Una primera cuestión a plantearse es: "¿Son necesarias las hipótesis?" ¿Continúa siendo verdadera la conclusión si se omite uno o ambos supuestos? Para demostrar que ambas hipótesis son necesarias, considere los siguientes contraejemplos:

- **La continuidad de $f(x)$ es una hipótesis necesaria.** La f gura 3(A) muestra la gráf ca de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$ que no es continua. Esta función no presenta un valor máximo en $[a, b]$, lo que muestra que la conclusión puede fallar si la hipótesis de continuidad no se cumple.
- **La hipótesis de que I es cerrado es necesaria.** La f gura 3(B) muestra la gráf ca de una función continua sobre un *intervalo abierto* (a, b). Esta función no presenta un valor máximo, lo que muestra que la conclusión puede fallar si el intervalo no es cerrado.

Así, ambas hipótesis en el teorema 1 son necesarias. Al realizar esta af rmación no se está diciendo que la conclusión *siempre* falle cuando una o ambas hipótesis no se cumplan. Únicamente se af rma que la conclusión *puede* fallar cuando alguna de las hipótesis no se cumplan. A continuación se van a analizar la contraposición y el recíproco:

- **Contraposición $\neg B \Longrightarrow \neg A$ (automáticamente verdadero):** Si $f(x)$ no tiene un valor máximo en I, entonces o bien $f(x)$ no es continua o I no es cerrado (o ambas).
- **Recíproco $B \Longrightarrow A$ (en este caso, falso):** Si $f(x)$ tiene un valor máximo en I, entonces $f(x)$ es continua e I es cerrado. Se demuestra que este enunciado es falso proporcionando un contraejemplo [f gura 3(C)].



(A) El intervalo es cerrado pero la función no es continua. La función no tiene un valor máximo.

(B) La función es continua pero el intervalo es abierto. La función no tiene un valor máximo.

(C) Esta función no es continua y el intervalo no es cerrado, pero la función tiene un valor máximo.

FIGURA 3

La técnica de la demostración por contradicción *es también se conoce por su nombre en latín* reductio ad absurdum *o "reducción al absurdo". Los matemáticos de la Grecia Antigua utilizaron la demostración por contradicción ya en el siglo V AC y Euclides (325-265 AC) la empleó en su tratado clásico de geometría titulado* Los Elementos. *Un ejemplo famoso es la demostración de que* $\sqrt{2}$ *es irracional, en el ejemplo 4. EL filósofo Platón (427-347 AC) escribió: "Es indigno del nombre del hombre quien ignora el hecho de que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado".*

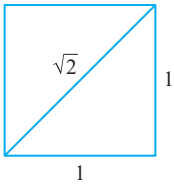


FIGURA 4 La diagonal del cuadrado unitario tiene longitud $\sqrt{2}$.

Como sabe, la contraposición es simplemente una manera de reescribir el teorema, por lo que es automáticamente verdadera. El recíproco no es de forma automática verdadero y, de hecho, en este caso es falso. la función en la f gura 3(C) proporciona un contraejemplo al recíproco: $f(x)$ tiene un valor máximo en $I = (a, b)$, pero $f(x)$ no es continua e I no es cerrado.

Los matemáticos han ideado varios métodos y estrategias generales para demostrar teoremas. El método de la prueba por inducción se trata en el apéndice C. Otro método importante es la **demostración por contradicción**, también denominada **demostración indirecta**. Suponga que su objetivo es demostrar un enunciado A. En una demostración por contradicción, se empieza asumiendo que A es falso y, entonces, se muestra que esto lleva a una contradicción. Por lo tanto, A debe ser verdadero (para evitar la contradicción).

EJEMPLO 4 Demostración por contradicción El número $\sqrt{2}$ es irracional (f gura 4).

Solución Suponga que el teorema es falso, es decir que $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números naturales. Se puede suponer que p/q es una fracción irreducible y que, por tanto, a lo sumo uno de los dos, o p, o q, es par. Observe que si el cuadrado m^2 de un número entero es par, entonces el propio número m debe ser par.

La relación $\sqrt{2} = p/q$ implica que $2 = p^2/q^2$ o $p^2 = 2q^2$. Esto prueba que p debe ser par. Pero si p es par, entonces $p = 2m$ para algún otro número entero m y $p^2 = 4m^2$. Como $p^2 = 2q^2$, se obtiene que $4m^2 = 2q^2$ o $q^2 = 2m^2$. Esto prueba que q también es par. Pero se han elegido p y q de tal manera que, a lo sumo, uno de ellos sea par. Esto demuestra que el supuesto original, $\sqrt{2} = p/q$, debe ser falso. Por tanto, $\sqrt{2}$ es irracional. ■

Uno de los problemas más famosos de las matemáticas es el "Teorema de Fermat." Afirma que la ecuación:

$$x^n + y^n = z^n$$

no tiene soluciones enteras si $n \geq 3$. *En una nota marginal escrita alrededor del 1630, Fermat afirmó que había encontrado una demostración y, durante siglos, se comprobó esta afirmación para diferentes valores del exponente n. Sin embargo, fue en 1994 cuando el matemático Andrew Wiles, de la Universidad Princeton, obtuvo una demostración completa para este resultado.*

UN APUNTE CONCEPTUAL El sello distintivo de las matemáticas es el rigor y la precisión. Un teorema se establece no a través de la observación o la experimentación, sino mediante una demostración que consiste en una cadena de razonamientos sin lagunas.

Este enfoque de las matemáticas procede de los antiguos matemáticos griegos, especialmente Euclides, y sigue siendo el estándar en la investigación contemporánea. En las últimas décadas, el ordenador se ha convertido en una poderosa herramienta para la experimentación y el análisis de datos. Los investigadores pueden utilizar datos experimentales para descubrir posibles resultados matemáticos nuevos, pero el título de "teorema" no se otorga hasta que alguien proporciona una demostración.

Esta insistencia en los teoremas y demostraciones distingue a las matemáticas de las otras ciencias. En las ciencias naturales, los hechos son establecidos a través de la experimentación, y están sujetos a cambios o modif caciones a medida que se adquiere más conocimiento. En matemáticas, las teorías también son desarrolladas y ampliadas, pero los resultados anteriores no quedan invalidados. El teorema de Pitágoras fue descubierto en la antigüedad y es una piedra angular de la geometría plana. En el siglo XIX, los matemáticos comenzaron a estudiar tipos más generales de geometrías (que, en parte, llevó a Einstein a la geometría del espacio-tiempo de cuatro dimensiones en la Teoría de la Relatividad). El teorema de Pitágoras no se cumple en estas geometrías más generales, pero su estatus en la geometría plana queda inalterado.

A RESUMEN

- La implicación $A \Longrightarrow B$ es la af rmación "Si A es verdadero, entonces B es verdadero."
- La *contraposición* de $A \Longrightarrow B$ es la implicación $\neg B \Longrightarrow \neg A$, que dice "Si B es falso, entonces A es falso." Una implicación y su contraposición son equivalentes (una es verdadera si y sólo si la otra es verdadera).
- El *recíproco* de $A \Longrightarrow B$ es $B \Longrightarrow A$. Una implicación y su recíproco no son necesariamente equivalentes. Una puede ser verdadera y la otra falsa.

- A y B son *equivalentes* si $A \Longrightarrow B$ y $B \Longrightarrow A$ son ambas verdaderas.
- En una demostración por contradicción (en la que el objetivo es demostrar un enunciado A), se empieza suponiendo que A es falso y se demuestra que este supuesto conlleva una contradicción.

A PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál es la contraposición de $A \Longrightarrow B$?

(a) $B \Longrightarrow A$ **(b)** $\neg B \Longrightarrow A$

(c) $\neg B \Longrightarrow \neg A$ **(d)** $\neg A \Longrightarrow \neg B$

2. ¿Cuál de las posibilidades del ejercicio 1 es el recíproco de $A \Longrightarrow B$?

3. Suponga que $A \Longrightarrow B$ es verdadero. ¿Qué resulta automáticamente verdadero, el recíproco o la contraposición?

4. Reformule como una implicación: "Un triángulo es un polígono."

Problemas

1. ¿Cuál es la negación del enunciado "Tanto el coche como la camiseta son azules"?

(a) Ni el coche ni la camiseta son azules.

(b) El coche no es azul y/o la camiseta no es azul.

2. ¿Cuál es la contraposición de la implicación "Si el coche tuviera gasolina, entonces funcionaría"?

(a) Si el coche no tiene gasolina, entonces no funciona.

(b) Si el coche no funciona, entonces no tiene gasolina.

En los problemas 3-8, formule the negación.

3. Son las 4 en punto de la tarde.

4. $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.

5. m y n son enteros impares.

6. O bien m es impar o bien n es impar.

7. x es un número real e y es un entero.

8. $f(x)$ es una función lineal.

En los problemas 9-14, formule la contraposición y el recíproco.

9. Si m y n son enteros impares, entonces mn es impar.

10. Si hoy es martes, entonces estamos en Bélgica.

11. Si hoy es martes, entonces no estamos en Bélgica.

12. Si $x > 4$, entonces $x^2 > 16$.

13. Si m^2 es divisible por 3, entonces m es divisible por 3.

14. Si $x^2 = 2$, entonces x es irracional.

En los problemas 15-18, proporcione un contraejemplo que muestre que el recíproco del enunciado es falso.

15. Si m es impar, entonces $2m + 1$ es también impar.

16. Si $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero, entonces es un triángulo isósceles.

17. Si m es divisible por 9 y 4, entonces m es divisible por 12.

18. Si m es impar, entonces $m^3 - m$ es divisible por 3.

En los problemas 19-22, determine si el recíproco del enunciado es falso.

19. Si $x > 4$ e $y > 4$, entonces $x + y > 8$.

20. Si $x > 4$, entonces $x^2 > 16$.

21. Si $|x| > 4$, entonces $x^2 > 16$.

22. Si m y n son pares, entonces mn es par.

En los problemas 23 y 24, formule la contraposición y el recíproco (no es necesario saber lo que signif can estos enunciados).

23. Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces $f(x)g(x)$ es derivable.

24. Si el campo de fuerza es radial y decrece con el cuadrado del inverso de la distancia, entonces todas las órbitas cerradas son elipses.

*En los problemas 25-28, el **inverso** de $A \Longrightarrow B$ es la implicación $\neg A \Longrightarrow \neg B$.*

25. ¿Cuál de las siguientes es el inverso de la implicación "Si ella se tiró al lago, entonces ella acabó mojada"?

(a) Si ella no acabó mojada, entonces ella no se tiró al lago.

(b) Si ella no se tiró al lago, entonces ella no acabó mojada. ¿Es verdadero el inverso?

26. Formule los inversos de las siguientes implicaciones:

(a) Si X es un ratón, entonces X es un roedor.

(b) Si te quedas durmiendo hasta tarde, perderás la clase.

(c) Si una estrella gira alrededor del Sol, entonces es un planeta.

27. Explique por qué el inverso es equivalente al recíproco.

28. Formule el inverso del teorema de Pitágoras. ¿Es verdadero?

29. El teorema 1 de la sección 2.4 dice lo siguiente: "Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas, entonces $f(x) + g(x)$ es continua". Siguiendo las leyes de la lógica ¿se puede deducir que si $f(x)$ y $g(x)$ no son continuas, entonces $f(x) + g(x)$ no es continua?

30. Escriba una demostración por contradicción para este hecho: no existe un número racional positivo que sea el más pequeño de todos. Base su demostración en el hecho que si $r > 0$, entonces $0 < r/2 < r$.

31. Demuestre por contradicción que si $x+y > 2$, entonces o bien $x > 1$ o bien $y > 1$ (o ambos).

En los problemas 32-35, demuestre por contradicción que el número es irracional.

32. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ **33.** $\sqrt{3}$ **34.** $\sqrt[3]{2}$ **35.** $\sqrt[4]{11}$

36. Un triángulo isósceles es un triángulo con dos lados iguales. El siguiente teorema es cierto: si $\triangle$ es un triángulo con dos lados iguales, entonces $\triangle$ es un triángulo isósceles.

(a) ¿Cuál es la hipótesis?

(b) Demuestre, proporcionando un contraejemplo, que la hipótesis es necesaria.

(c) ¿Cuál es la contraposición?

(d) ¿Cuál es el recíproco? ¿Es verdadero?

37. Considere el siguiente teorema: sea $f(x)$ un polinomio cuadrático cuyo término de mayor grado sea positivo. Entonces $f(x)$ tiene un valor mínimo.

(a) ¿Cuáles son las hipótesis?

(b) ¿Cuál es la contraposición?

(c) ¿Cuál es el recíproco? ¿Es verdadero?

Problemas avanzados

38. Sean a, b y c los lados de un triángulo y sea θ el ángulo opuesto al lado c. Use el teorema del coseno (teorema 1 de la sección 1.4) para demostrar el recíproco del teorema de Pitágoras.

39. Lleve a cabo los detalles de la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional (esta demostración es de R. Palais). Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces $n\sqrt{2}$ es un número natural para algún n. Sea n el menor de tales números enteros y sea $m = n\sqrt{2} - n$.

(a) Demuestre que $m < n$.

(b) Demuestre que $m\sqrt{2}$ es un número natural.

Explique por qué (a) y (b) implican que $\sqrt{2}$ es irracional.

40. Generalice el razonamiento del problema 39 para demostrar que $\sqrt{A}$ es irracional si A es un número natural que no es un cuadrado perfecto. *Indicación:* considere n como antes y sea $m = n\sqrt{A} - n[\sqrt{A}]$, donde $[x]$ es el la función parte entera.

41. Generalice aún más y demuestre que para todo número natural r, la raíz r-ésima $\sqrt[r]{A}$ es un número irracional salvo si A es una potencia r-ésima exacta. *Indicación:* sea $x = \sqrt[r]{A}$. Demuestre que si x es racional, entonces se puede considerar un número natural n lo más pequeño posible de manera que nx^j sea un número natural para $j = 1, \ldots, r-1$. A continuación, considere $m = nx - n[x]$ como antes.

42. Dada una lista finita de números primos $p_1, \ldots, p_N$, sea $M = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1$. Pruebe que M no es divisible por ninguno de los números primos $p_1, \ldots, p_N$. Use este resultado y el hecho que cualquier número admite una descomposición en factores primos, para demostrar que hay infinitos números primos. Este razonamiento fue utilizado por Euclides en *Los Elementos*.

B PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

"El ingenioso método de expresar cada número posible utilizando un conjunto de diez símbolos (cada símbolo tiene un valor posicional y un valor absoluto) surgió en la India. La idea parece tan simple hoy en día que su significado y profunda importancia no es apreciada. Su sencillez reside en la forma en que facilita el cálculo y colocó a la aritmética entre los inventos útiles más importantes. La importancia de esta invención es más fácil de apreciar si se considera que fue más allá de los dos hombres más grandes de la antigüedad, Arquímedes y Apolonio."

—Pierre-Simon Laplace, uno de los grandes matemáticos franceses del siglo XVIII.

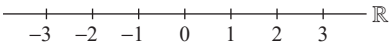


FIGURA 1 La recta real.

En este apéndice se tratan las propiedades básicas de los números reales. En primer lugar, recuerde que un número real es un número que puede ser representado por un decimal finito o infinito (también llamado un desarrollo decimal). El conjunto de todos los números reales se denota por $\mathbb{R}$ y se suele visualizar como la "recta numérica" (figura 1).

Por tanto, un número real a se representa como:

$$a = \pm n,a_1a_2a_3a_4\ldots,$$

donde n es cualquier número natural y cada dígito a_j es un número natural entre 0 y 9. Por ejemplo, $10\pi = 31{,}41592\ldots$. Recuerde que a es racional si su desarrollo es finito o periódico e irracional si su desarrollo es no periódico. Además, el desarrollo decimal es único salvo por la siguiente excepción: todo desarrollo finito es igual a un desarrollo en el que el dígito 9 es periódico. Por ejemplo, $0{,}5 = 0{,}4999\cdots = 0{,}4\overline{9}$.

Se va a dar por sentado que las operaciones de suma y multiplicación están definidas en $\mathbb{R}$, es decir en el conjunto de todos los decimales. En términos generales, la suma y la multiplicación de decimales infinitos se definen en términos de decimales finitos. Para $d \geq 1$, defina el truncamiento de orden d de $a = n,a_1a_2a_3a_4\ldots$ como el decimal finito $a(d) = a,a_1a_2\ldots a_d$ obtenido truncando en la d-ésima posición. Para obtener la suma $a + b$, suponga que tanto a como b son infinitos (posiblemente terminando con nueves repetidos). Esto elimina cualquier posible ambigüedad en el desarrollo. Entonces, el dígito n-ésimo de $a + b$ es igual al dígito n-ésimo de $a(d) + b(d)$ para d suficientemente grande (a partir de un cierto punto y en adelante, el dígito n-ésimo de $a(d) + b(d)$ no cambia y es el valor del dígito n-ésimo de $a + b$). La multiplicación se define de manera similar. Además, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva se cumplen (tabla 1).

TABLA 1 Propiedades algebraicas

Propiedad conmutativa:	$a + b = b + a, \quad ab = ba$
Propiedad asociativa:	$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$
Propiedad distributiva:	$a(b + c) = ab + ac$

Todo número real x admite un opuesto respecto a la suma, $-x$, tal que $x + (-x) = 0$, y todo número real diferente de cero x admite un inverso respecto a la multiplicación, x^{-1}, tal que $x(x^{-1}) = 1$. No se consideran la resta y la división como operaciones algebraicas por separado, ya que se definen en términos de inversos. Por definición, la diferencia $x - y$ es igual a $x + (-y)$, y el cociente x/y es igual a $x(y^{-1})$ para $y \neq 0$.

Además de las operaciones algebraicas, existe una **relación de orden** en $\mathbb{R}$: dados dos números reales cualesquiera a y b, exactamente una de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$a = b \quad \text{o} \quad a < b \quad \text{o} \quad a > b$$

Para distinguir entre las condiciones $a \leq b$ o $a < b$, nos solemos referir a $a < b$ como a una **desigualdad estricta**. Un convenio similar se aplica a $>$ y $\geq$. Las reglas de la tabla 2 permiten manipular desigualdades. La última propiedad del orden dice que una desigualdad cambia de sentido cuando se multiplica por un número negativo c. Por ejemplo:

$$-2 < 5 \quad \text{pero} \quad (-3)(-2) > (-3)5$$

TABLA 2 Propiedades del orden

Si $a < b$ y $b < c$,	entonces $a < c$.
Si $a < b$ y $c < d$,	entonces $a + c < b + d$.
Si $a < b$ y $c > 0$,	entonces $ac < bc$.
Si $a < b$ y $c < 0$,	entonces $ac > bc$.

Las propiedades algebraicas y del orden de los números reales son sin duda familiares. Ahora se va a analizar la no tan conocida **propiedad del supremo (sup)** de los números reales. Esta propiedad es una forma de expresar la llamada **completitud** de los números reales. Hay otras maneras de formular la completitud (como la propiedad de los intervalos llamados anidados, que se trata en cualquier libro de análisis) que son equivalentes a la propiedad del sup y tienen el mismo propósito. La completitud se utiliza en cálculo para la construcción de demostraciones rigurosas de teoremas básicos sobre funciones continuas, tales como el teorema del valor intermedio (TVI), o la existencia de valores extremos en un intervalo cerrado. La idea subyacente es que la recta real "no tiene agujeros". Más adelante se tratará esta idea con más detalle. Antes, se introducen las definiciones necesarias.

Suponga que S es un conjunto no vacío de números reales. Se dice que un número M es una **cota superior** para S si:

$$x \leq M \qquad \text{para todo } x \in S$$

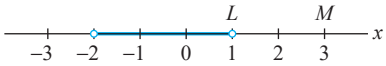


FIGURA 2 $M = 3$ es una cota superior para el conjunto $S = (-2, 1)$. El sup es $L = 1$.

Si S tiene una cota superior, se dice que S está **acotado superiormente**. El **supremo** L es una cota superior para S tal que cualquier otra cota superior M cumple $M \geq L$. Por ejemplo (figura 2):

- $M = 3$ es una cota superior para el intervalo abierto $S = (-2, 1)$.
- $L = 1$ es el sup de $S = (-2, 1)$.

A continuación se enuncia la propiedad del sup en los números reales.

TEOREMA 1 Existencia del supremo Sea S un conjunto no vacío de números reales que esté acotado superiomente. Entonces S tiene supremo.

De manera similar, se dice que un número B es una **cota inferior** de S si $x \geq B$ para todo $x \in S$. Se dice que S está **acotado inferiormente** si S tiene una cota inferior. El **ínf mo** (inf) es una cota inferior M tal que cualquier otra cota inferior B cumple que $B \leq M$. El conjunto de los números reales también tiene la propiedad del inf: si S es un conjunto no vacío de números reales que está acotado inferiormente, entonces S tiene inf. Esto se puede deducir de forma inmediata del teorema 1. Dado un conjunto no vacío de números reales S, sea $-S$ el conjunto de los números de la forma $-x$ para $x \in S$. Entonces $-S$ tiene cota superior si S tiene cota inferior. En consecuencia, $-S$ tiene por sup L, teorema 1, y $-L$ es el inf de S.

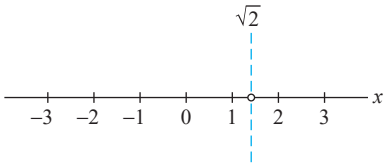


FIGURA 3 Los números racionales presentan un "agujero" en la posición $\sqrt{2}$.

UN APUNTE CONCEPTUAL El teorema 1 puede parecer razonable pero quizás no queda claro por qué es útil. Se ha mencionado anteriormente que la propiedad sup expresa la idea de que $\mathbb{R}$ es "completo", o que "no tiene agujeros". Para ilustrar esta idea compare $\mathbb{R}$ con el conjunto de los números racionales, que se denota por $\mathbb{Q}$. A nivel intuitivo, $\mathbb{Q}$ no es completo pues no se encuentran los números irracionales. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ presenta un "agujero" en la posición en que el número irracional $\sqrt{2}$ debería estar situado (figura 3). Este agujero divide a $\mathbb{Q}$ en dos mitades que no están conectadas una a la otra (la mitad a la izquierda y a la derecha de $\sqrt{2}$). Además, la mitad a la izquierda está acotada superiormente, pero no existe ningún número racional que sea sup y la mitad a la derecha está acotada inferiormente, pero no hay ningún número racional que sea inf. El sup y el inf son ambos iguales al número irracional $\sqrt{2}$, que existe únicamente en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{Q}$. Así, contrariamente a lo que ocurre en $\mathbb{R}$, los números racionales $\mathbb{Q}$ no tienen la propiedad de sup.

EJEMPLO 1 Pruebe que 2 no tiene raíz cuadrada aplicando la propiedad del sup al conjunto:

$$S = \{x : x^2 < 2\}$$

Solución En primer lugar, observe que S está acotado por la cota superior $M = 2$. De hecho, si $x > 2$, entonces x cumple $x^2 > 4$ y por tanto x no pertenecería a S. Por la propiedad del sup, S tiene menor cota superior. Sea esta cota L. Se va a demostrar que $L = \sqrt{2}$ o, equivalentemente, que $L^2 = 2$. Se demostrará probando que $L^2 \geq 2$ y que $L^2 \leq 2$.

Si $L^2 < 2$, sea $b = L + h$, donde $h > 0$. Entonces:

$$b^2 = L^2 + 2Lh + h^2 = L^2 + h(2L + h) \qquad \boxed{1}$$

Se puede hacer que la cantidad $h(2L + h)$ sea tan pequeña como se desee escogiendo $h > 0$ suf cientemente pequeño. En particular, se puede escoger h positivo tal que $h(2L + h) < 2 - L^2$. Con esta elección, $b^2 < L^2 + (2 - L^2) = 2$ por la ec. (1). Así, $b \in S$. Pero $b > L$ pues $h > 0$ y por tanto L no es una cota superior de S, lo que entra en contradicción con la hipótesis sobre L. De aquí se deduce que $L^2 \geq 2$.

Si $L^2 > 2$, sea $b = L - h$, para $h > 0$. Entonces:

$$b^2 = L^2 - 2Lh + h^2 = L^2 - h(2L - h)$$

Ahora escoja h positivo pero suf cientemente pequeño para que $0 < h(2L - h) < L^2 - 2$. Entonces $b^2 > L^2 - (L^2 - 2) = 2$. Pero $b < L$, por lo que b es una menor cota inferior para S. De hecho, si $x \geq b$, entonces $x^2 \geq b^2 > 2$ y x no pertenecería a S. Esto contradice la hipótesis que L es el sup. Se deduce que $L^2 \leq 2$ y como ya se ha probado que $L^2 \geq 2$, se tiene que $L^2 = 2$ como se quería demostrar. ■

A continuación se demuestran tres teoremas importantes, el tercero de los cuales se utilizará en la demostración de la propiedad del sup.

TEOREMA 2 Teorema de Bolzano-Weierstrass Sea S un conjunto acotado e inf nito de números reales. Entonces, existe una sucesión formada por elementos distintos $\{a_n\}$ en S tales que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

Demostración Por simplicidad de la notación, suponga que S está contenido en el intervalo unitario $[0, 1]$ (una demostración similar funciona en el caso general). Si $k_1, k_2, \ldots, k_n$ es una sucesión de n dígitos (es decir, cada k_j es un número entero y $0 \leq k_j \leq 9$), sea:

$$S(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

el conjunto de $x \in S$ cuyo desarrollo decimal empieza como $0{,}k_1k_2 \ldots k_n$. El conjunto S es la unión de los subconjuntos $S(0), S(1), \ldots, S(9)$ y como S es inf nito, al menos uno de estos conjuntos debe ser inf nito. Por tanto, se puede escoger k_1 tal que $S(k_1)$ sea inf nito. De manera similar, como mínimo uno de los conjuntos $S(k_1, 0), S(k_2, 1), \ldots, S(k_1, 9)$ debe ser inf nito, por lo que se puede escoger k_2 tal que $S(k_1, k_2)$ sea inf nito. Continuando este proceso, se obtiene una sucesión inf nita $\{k_n\}$ tal que $S(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ sea inf nito para todo n. Se puede elegir una sucesión de elementos $a_n \in S(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ con la propiedad de que a_n dif era de $a_1, \ldots, a_{n-1}$ para todo n. Sea L el decimal inf nito $0{,}k_1k_2k_3 \ldots$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ pues $|L - a_n| < 10^{-n}$ para todo n. ■

El teorema de Bolzano-Weierstrass se utiliza para demostrar dos resultados importantes sobre sucesiones $\{a_n\}$. Recuerde que una cota superior para $\{a_n\}$ es un número M tal que $a_j \leq M$ para todo j. Si existe una cota superior, se dice que $\{a_n\}$ está acotada superiormente. Las cotas inferiores se def nen de forma análoga y se dice que $\{a_n\}$ está acotado

inferiormente si existe una cota inferior. Una sucesión está acotada si lo está superior e inferiormente. Una **subsucesión** de $\{a_n\}$ es una sucesión de elementos $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$, donde $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$.

Sección 11.1

Considere ahora una sucesión acotada $\{a_n\}$. Si inf nitos a_n son distintos, según el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ existe. En caso contrario, inf nitos a_n deben coincidir y estos términos forman una subsucesión convergente. Esto demuestra el siguiente resultado.

TEOREMA 3 Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

TEOREMA 4 Una sucesión monótona y acotada es convergente

- Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \le M$ para todo n, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n \le M$.
- Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n \ge M$ para todo n, entonces $\{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n \ge M$.

Demostración Suponga que $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por M. Entonces $\{a_n\}$ está automáticamente acotada inferiormente por $m = a_1$ pues $a_1 \le a_2 \le a_3 \cdots$. Por tanto, $\{a_n\}$ está acotada y, por el teorema 3, se puede considerar una subsucesión convergente $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$. Sea:

$$L = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

Observe que $a_n \le L$ para todo n. Si no fuera así, entonces $a_n > L$ para algún n y entonces $a_{n_k} \ge a_n > L$ para todo k tal que $n_k \ge n$. Pero esto entra en contradicción con que $a_{n_k} \to L$. Ahora, por def nición, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon > 0$ tal que:

$$|a_{n_k} - L| < \epsilon \qquad \text{si } n_k > N_\epsilon$$

Considere m tal que $n_m > N_\epsilon$. Si $n \ge n_m$, entonces $a_{n_m} \le a_n \le L$ y, por tanto:

$$|a_n - L| \le |a_{n_m} - L| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \ge n_m$$

Esto demuestra que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Queda por demostrar que $L \le M$. Si $L > M$, sea $\epsilon = (L - M)/2$ y considere N tal que:

$$|a_n - L| < \epsilon \qquad \text{si } k > N$$

Entonces $a_n > L - \epsilon = M + \epsilon$. Esto contradice el supuesto que M es una cota superior para $\{a_n\}$. Por tanto, $L \le M$ como se quería demostrar. ■

Demostración del teorema 1 A continuación se usará el teorema 4 para demostrar la propiedad del sup (teorema 1). Nuevamente, si x es un número real, sea $x(d)$ el truncamiento de x de longitud d. Por ejemplo:

$$\text{Si } x = 1{,}41569, \text{ entonces } x(3) = 1{,}415$$

Se dice que x es un *decimal de longitud d* si $x = x(d)$. Dos decimales distintos de longitud d dif eren a lo sumo en 10^{-d}. Así, dados dos números reales $A < B$, a lo sumo hay un número f nito de decimales de longitud d entre A y B.

Ahora, sea S un conjunto no vacío de números reales con cota superior M. Se va a demostrar que S tiene supremo. Sea $S(d)$ en conjunto de los truncamientos de longitud d:

$$S(d) = \{x(d) : x \in S\}$$

Af rmamos que $S(d)$ tiene un elemento máximo. Para comprobarlo, considere cualquier $a \in S$. Si $x \in S$ y $x(d) > a(d)$, entonces:

$$a(d) \le x(d) \le M$$

Así, y según la observación realizada en el párrafo previo, hay a lo sumo un número f nito de valores $x(d)$ en $S(d)$ mayores que $a(d)$. El mayor de éstos es el elemento máximo en $S(d)$.

Para $d = 1, 2, \ldots$, considere un elemento x_d tal que $x_d(d)$ sea el elemento máximo en $S(d)$. Por construcción, $\{x_d(d)\}$ es una sucesión creciente (pues el mayor truncamiento de orden d no puede hacerse más pequeño cuando d aumenta). Además, $x_d(d) \leq M$ para todo d. Ahora, aplique el teorema 4 para deducir que $\{x_d(d)\}$ converge a un límite L. Af rmamos que L es el sup de S. Observe primero que L es una cota superior para S. En realidad, si $x \in S$, entonces $x(d) \leq L$ para todo d y, por tanto, $x \leq L$. Para probar que L es el sup, suponga que M es una cota cota superior tal que $M < L$. Entonces $x_d \leq M$ para todo d y, por tanto, $x_d(d) \leq M$ para todo d. Pero entonces:

$$L = \lim_{d \to \infty} x_d(d) \leq M$$

Esto es una contradicción pues $M < L$. En consecuencia, L es el sup de S. ■

Como se mencionó anteriormente, la propiedad del sup se utiliza en cálculo para demostrar ciertos teoremas básicos sobre funciones continuas. Como ejemplo, se va a demostrar el TVI. Otro ejemplo es el teorema de existencia de extremos en un intervalo cerrado (vea el apéndice D).

TEOREMA 5 Teorema del Valor Intermedio Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier valor M comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

Demostración Suponga, en primer lugar que $M = 0$. Sustituyendo $f(x)$ por $-f(x)$ si fuera necesario, se puede asumir que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Ahora sea:

$$S = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$$

Entonces $a \in S$ pues $f(a) < 0$ y, por tanto, S es no vacío. Claramente, b es una cota superior para S. Así, por la propiedad del sup, S tiene un sup L. Af rmamos que $f(L) = 0$. En caso contrario, sea $r = f(L)$. Suponga, en primer lugar que $r > 0$.

Como $f(x)$ es continua, existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(L)| = |f(x) - r| < \frac{1}{2}r \qquad \text{si} \qquad |x - L| < \delta$$

Equivalentemente:

$$\frac{1}{2}r < f(x) < \frac{3}{2}r \qquad \text{si} \qquad |x - L| < \delta$$

El número $\frac{1}{2}r$ es positivo, por lo que se puede deducir que:

$$f(x) > 0 \qquad \text{si} \qquad L - \delta < x < L + \delta$$

Por def nición de L, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ tal que $x > L$ y, por tanto, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ tal que $x > L - \delta$. Así, $L - \delta$ es una cota superior para S. Esto es una contradicción pues L es el sup de S y, por tanto, $r = f(L)$ no puede cumplir que $r > 0$. Análogamente, r no puede verif car que $r < 0$. La conclusión es que $f(L) = 0$ como se había anunciado.

Ahora, si M no es cero, sea $g(x) = f(x) - M$. Entonces 0 se encuentra entre $g(a)$ y $g(b)$ y, según se acaba de demostrar, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$. Pero entonces $f(c) = g(c) + M = M$, como se quería demostrar. ■

C INDUCCIÓN Y EL TEOREMA DEL BINOMIO

El Principio de Inducción es un método de demostración ampliamente utilizado para probar que un enunciado $P(n)$ es válido para todos los números naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$. He aquí dos enunciados de este tipo:

- $P(n)$: la suma de los n primeros números impares es igual a n^2.
- $P(n)$: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

En el primer enunciado se afirma que para todo número natural n, se verifica:

$$\underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n - 1)}_{\text{Suma de los primeros } n \text{ números impares}} = n^2 \qquad \boxed{1}$$

Se puede comprobar directamente que $P(n)$ es verdadero para los primeros valores de n:

$P(1)$ es la igualdad: $1 = 1^2$ (verdadera)

$P(2)$ es la igualdad: $1 + 3 = 2^2$ (verdadera)

$P(3)$ es la igualdad: $1 + 3 + 5 = 3^2$ (verdadera)

El principio de inducción se puede utilizar para establecer que $P(n)$ es válido para todo n.

El Principio de Inducción se aplica si $P(n)$ es un enunciado definido para $n \geq n_0$, donde n_0 es un entero fijado. Suponga que:

(i) ***Etapa inicial:*** *$P(n_0)$ es verdadero.*

(ii) ***Etapa inductiva:*** *si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k + 1$.*

Entonces $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq n_0$.

TEOREMA 1 Principio de Inducción Sea $P(n)$ un enunciado que depende de un número natural n. Suponga que:

(i) Etapa inicial: $P(1)$ es verdadero.

(ii) Etapa inductiva: si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k + 1$.

Entonces $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales $n = 1, 2, 3, \ldots$.

EJEMPLO 1 Demuestre que $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ para todo número natural n.

Solución Denote por $P(n)$ la igualdad:

$$P(n): \qquad 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Etapa 1. **Etapa inicial: pruebe que $P(1)$ es verdadero**

Se ha comprobado anteriormente. $P(1)$ es la igualdad $1 = 1^2$.

Etapa 2. **Etapa inductiva: pruebe que si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k + 1$**

Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces:

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Sume $2k + 1$ a ambos lados:

$$[1 + 3 + \cdots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

$$1 + 3 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Esto es precisamente el enunciado $P(k+1)$. Por tanto, $P(k+1)$ es verdadero siempre que $P(k)$ sea verdadero. Por el principio de inducción, $P(k)$ es verdadero para todo k. ■

La intuición subyacente al principio de inducción es la siguiente. Si $P(n)$ no fuera cierto para todo n, entonces se podría considerar el menor natural k para el que $P(k)$ fuera falso. Además, $k > 1$ porque $P(1)$ es verdadero. Entonces $P(k-1)$ es verdadero [en caso contrario, $P(k)$ no sería el menor "contraejemplo"]. Por otra parte, si $P(k-1)$ es verdadero, entonces $P(k)$ también lo es por la etapa inductiva. Esto es una contradicción. Por tanto, $P(k)$ debe ser verdadero para todo k.

■ **EJEMPLO 2** Use el principio de inducción y la regla del producto para demostrar que para todo natural n, se verif ca:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Solución Sea $P(n)$ la fórmula $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

Etapa 1. **Etapa inicial: pruebe que $P(1)$ es verdadero**

Utilice la def nición con límites para comprobar $P(1)$:

$$\frac{d}{dx}x = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}1 = 1$$

Etapa 2. **Etapa inductiva: pruebe que si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ también es verdadero para $n = k+1$**

Para llevar a cabo la etapa inductiva, suponga que $\dfrac{d}{dx}x^k = kx^{k-1}$, donde $k \geq 1$. Entonces, por la regla del producto, se tiene:

$$\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{d}{dx}(x\cdot x^k) = x\frac{d}{dx}x^k + x^k\frac{d}{dx}x = x(kx^{k-1}) + x^k =$$

$$= kx^k + x^k = (k+1)x^k$$

Esto demuestra que $P(k+1)$ es verdadero.

Por el principio de inducción, $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq 1$. ■

En el Triángulo de Pascal, *la fila n-ésima muestra los coeficientes del desarrollo de* $(a+b)^n$*:*

n							
0				1			
1			1		1		
2		1		2		1	
3	1		3		3		1
4		1		4		1	
5	1		5		10		5		1
6	1		6		15		20		15		6		1

El triángulo se construye de la siguiente manera: cada entrada es la suma de las dos entradas por encima de ella en la línea precedente. Por ejemplo, la entrada 15 en la línea $n = 6$ *es la suma* $10 + 5$ *de las entradas por encima de ella en la línea* $n = 5$*. La relación de recurrencia garantiza que las entradas en el triángulo son los coeficientes binomiales.*

Como otra aplicación de la inducción, se demuestra a continuación el teorema del binomio, que describe el desarrollo del binomio $(a+b)^n$. Los primeros desarrollos son conocidos:

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En general, se tiene el desarrollo:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \qquad \boxed{2}$$

donde el coef ciente de $a^{n-k}b^k$, que se denota $\binom{n}{k}$, se denomina el **coef ciente binomial**. Observe que el primer término en la ec. (2) corresponde a $k = 0$ y que el último corres-

ponde a $k = n$; por tanto, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. En notación sumatoria:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

El Triángulo de Pascal (que se describe en la nota al margen de la página A14) se puede utilizar para calcular los coef cientes binomiales si n y k no son demasiado grandes. El Teorema del Binomio proporciona la siguiente fórmula general:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1} \qquad 3$$

Antes de demostrar esta fórmula, se va a demostrar una relación de recurrencia para los coef cientes binomiales. Sin embargo, observe que la ec. (3) es cierta para $k = 0$ y para $k = n$ (recuerde que, por convenio, $0! = 1$):

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

TEOREMA 2 Relación de recurrencia para los coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{para } 1 \le k \le n-1$$

Demostración Exprese $(a+b)^n$ como $(a+b)(a+b)^{n-1}$ y desarróllelo en términos de los coef cientes binomiales:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k}b^k =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k}b^k + b\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k}b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-(k+1)}b^{k+1}$$

Sustituyendo k por $k-1$ en la segunda suma, se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^{n-k}b^k$$

A la derecha de la igualdad, el primer término de la primera suma es a^n y el último término es b^n. Por tanto, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = a^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right) a^{n-k}b^k\right) + b^n$$

De aquí se deduce la relación de recurrencia, dado que los coef cientes de $a^{n-k}b^k$, en ambos lados de la ecuación, deben ser iguales. ■

Ahora utilice inducción para demostrar la ec. (3). Sea $P(n)$ el enunciado siguiente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{para } 0 \le k \le n$$

Se tiene que $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ pues $(a+b)^1 = a+b$, por lo que $P(1)$ es verdadero. Además, $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ tal y como se mencionó anteriormente, pues a^n y b^n tienen por coef ciente 1 en el desarrollo de $(a+b)^n$. Para el paso inductivo, suponga que $P(n)$ es verdadero. Según la relación de recurrencia, para $1 \le k \le n$, se tiene:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} =$$

$$= n!\left(\frac{n+1-k}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{k}{k!\,(n+1-k)!}\right) = n!\left(\frac{n+1}{k!\,(n+1-k)!}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

Así, $P(n+1)$ también es verdadero y el teorema del binomio queda demostrado por inducción.

EJEMPLO 3 Use el teorema del binomio para desarrollar $(x+y)^5$ y $(x+2)^3$.

Solución Según la quinta f la en el triángulo de Pascal, se tiene:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Consultando la tercera f la en el triángulo de Pascal, se obtiene:

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

C PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

En los problemas 1-4, use el principio de inducción para demostrar la fórmula para todos los números naturales n.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

4. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ para $x \ne 1$

5. Sea $P(n)$ el siguiente enunciado: $2^n > n$

(a) Pruebe que $P(1)$ es verdadero.

(b) Observe que si $2^n > n$, entonces $2^n + 2^n > 2n$. Use esto para demostrar que si $P(n)$ es verdadero para $n = k$, entonces $P(n)$ es verdadero para $n = k+1$. Concluya que $P(n)$ es verdadero para todo n.

6. Use inducción para demostrar que $n! > 2^n$ para $n \ge 4$.

Sea $\{F_n\}$ la sucesión de Fibonacci, def nida por la fórmula de recurrencia:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_1 = F_2 = 1$$

Los primeros términos son $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$. *En los problemas 7-10, use inducción para probar las identidades.*

7. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

8. $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_{n+1}F_n$

9. $F_n = \dfrac{R_+^n - R_-^n}{\sqrt{5}}$, donde $R_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

10. $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$. *Indicación:* para la etapa inductiva, pruebe que:

$$F_{n+2}F_n = F_{n+1}F_n + F_n^2$$

$$F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1}$$

11. Use inducción para demostrar que $f(n) = 8^n - 1$ es divisible por 7 para todo número natural n. *Indicación:* para la etapa inductiva, pruebe que:

$$8^{k+1} - 1 = 7 \cdot 8^k + (8^k - 1)$$

12. Use inducción para demostrar que $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo número natural n.

13. Use inducción para demostrar que $5^{2n} - 4^n$ es divisible por 7 para todo número natural n.

14. Use el Triángulo de Pascal para obtener los desarrollos de $(a + b)^6$ y de $(a - b)^4$.

15. Desarrolle $(x + x^{-1})^4$.

16. ¿Cuál es el coef ciente de x^9 en $(x^3 + x)^5$?

17. Sea $S(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(a) Use el Triángulo de Pascal para calcular $S(n)$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Demuestre que $S(n) = 2^n$ para todo $n \geq 1$. *Indicación:* desarrolle $(a + b)^n$ y evalúe en $a = b = 1$.

18. Sea $T(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

(a) Use el Triángulo de Pascal para calcular $T(n)$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

(b) Demuestre que $T(n) = 0$ para todo $n \geq 1$. *Indicación:* desarrolle $(a + b)^n$ y evalúe en $a = 1, b = -1$.

D DEMOSTRACIONES ADICIONALES

En este apéndice, se proporcionan demostraciones de diversos teoremas que se han enunciado o utilizado en el texto.

Sección 2.3

TEOREMA 1 Leyes básicas de los límites Suponga que $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen. Entonces:

(i) $\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x)$

(ii) Para cualquier número k, $\lim_{x\to c} kf(x)=k\lim_{x\to c} f(x)$.

(iii) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)=\Big(\lim_{x\to c} f(x)\Big)\Big(\lim_{x\to c} g(x)\Big)$

(iv) Si $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Demostración Sea $L=\lim_{x\to c} f(x)$ y $M=\lim_{x\to c} g(x)$. La ley de la suma (i) se demostró en la sección 2.9. Observe que (ii) es un caso especial de (iii), en el que $g(x)=k$ es una función constante. Por tanto, basta con demostrar la ley del producto (iii). Exprese:

$$f(x)g(x)-LM=f(x)(g(x)-M)+M(f(x)-L)$$

y aplique la desigualdad triangular para obtener:

$$|f(x)g(x)-LM|\le|f(x)(g(x)-M)|+|M(f(x)-L)| \qquad \boxed{1}$$

Por la definición de límite, se puede escoger $\delta>0$ tal que:

$$|f(x)-L|<1 \qquad \text{si } 0<|x-c|<\delta$$

De aquí se tiene que $|f(x)|<|L|+1$ para $0<|x-c|<\delta$. Ahora considere cualquier número $\epsilon>0$. Aplicando de nuevo la definición de límite, se tiene que escogiendo un δ menor si fuera necesario, también se puede asegurar que si $0<|x-c|<\delta$, entonces:

$$|f(x)-L|\le\frac{\epsilon}{2(|M|+1)} \quad \text{y} \quad |g(x)-M|\le\frac{\epsilon}{2(|L|+1)}$$

Por la (1), se tiene que si $0<|x-c|<\delta$, entonces:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-LM|&\le|f(x)|\,|g(x)-M|+|M|\,|f(x)-L|\le\\&\le(|L|+1)\frac{\epsilon}{2(|L|+1)}+|M|\frac{\epsilon}{2(|M|+1)}\le\\&\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, esto demuestra que $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = LM$. Para demostrar la ley del cociente (iv), es suf ciente comprobar que si $M \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M} \qquad \boxed{2}$$

Pues si la (2) se cumpliera, entonces se puede aplicar la ley del producto a $f(x)$ y $g(x)^{-1}$ para obtener la ley del cociente:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)\frac{1}{g(x)} = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)}\right) =$$
$$= L\left(\frac{1}{M}\right) = \frac{L}{M}$$

A continuación, se va a comprobar la (2). Como $g(x)$ tiende a M y $M \neq 0$, se puede considerar $\delta > 0$ tal que $|g(x)| \geq |M|/2$ si $0 < |x - c| < \delta$. Ahora, considere $\epsilon > 0$ cualquiera. Escogiendo un δ menor si fuera necesario, también se puede asegurar que:

$$|M - g(x)| < \epsilon|M|\left(\frac{|M|}{2}\right) \qquad \text{para } 0 < |x - c| < \delta$$

Entonces:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \leq \left|\frac{M - g(x)}{M(M/2)}\right| \leq \frac{\epsilon|M|(|M|/2)}{|M|(|M|/2)} = \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, el límite (2) queda demostrado. ■

El siguiente resultado se utilizó en el texto.

TEOREMA 2 Los límites preservan las desigualdades Sea (a, b) un intervalo abierto y sea $c \in (a, b)$. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ estén def nidas en (a, b), excepto quizás en c. Suponga que:

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{para } x \in (a, b), \quad x \neq c$$

y que los límites $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} g(x)$ existen. Entonces:

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

Demostración Sean $L = \lim_{x\to c} f(x)$ y $M = \lim_{x\to c} g(x)$. Para probar que $L \leq M$, se realizará una demostración por contradicción. Si $L > M$, sea $\epsilon = \frac{1}{2}(L - M)$. Por la def nición formal de límite, se puede considerar $\delta > 0$ de tal manera que se verif quen las dos condiciones siguientes:

$$|M - g(x)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - c| < \delta$$
$$|L - f(x)| < \epsilon \qquad \text{si } |x - c| < \delta$$

Pero entonces:

$$f(x) > L - \epsilon = M + \epsilon > g(x)$$

Esto es una contradicción pues $f(x) \leq g(x)$. Por tanto, se deduce que $L \leq M$. ■

TEOREMA 3 Límite de una función compuesta Suponga que los siguientes límites existen:

$$L = \lim_{x \to c} g(x) \qquad \text{y} \qquad M = \lim_{x \to L} f(x)$$

Entonces $\lim_{x \to c} f(g(x)) = M$.

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Por la definición de límite, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|f(x) - M| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - L| < \delta_1 \qquad (3)$$

Análogamente, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|g(x) - L| < \delta_1 \qquad \text{si } 0 < |x - c| < \delta \qquad (4)$$

Sustituya x por $g(x)$ en la (3) y aplique la (4) para obtener:

$$|f(g(x)) - M| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - c| < \delta$$

Como ϵ es arbitrario, queda demostrado que $\lim_{x \to c} f(g(x)) = M$. ■

Sección 2.4

TEOREMA 4 Continuidad de funciones compuestas Sea $F(x) = f(g(x))$ una función compuesta. Si g es continua en $x = c$ y f es continua en $x = g(c)$, entonces $F(x)$ es continua en $x = c$.

Demostración Por la definición de continuidad, se tiene que:

$$\lim_{x \to c} g(x) = g(c) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to g(c)} f(x) = f(g(c))$$

Por tanto, se puede aplicar el teorema 3 para obtener:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(g(c))$$

Esto demuestra que $f(g(x))$ es continua en $x = c$. ■

Sección 2.9

TEOREMA 5 Teorema de compresión Suponga que para $x \neq c$ (en algún intervalo abierto que contenga a c), se verifica lo siguiente:

$$l(x) \leq f(x) \leq u(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} l(x) = \lim_{x \to c} u(x) = L$$

Entonces $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$. Se puede escoger $\delta > 0$ tal que:

$$|l(x) - L| < \epsilon \quad \text{y} \quad |u(x) - L| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - c| < \delta$$

En principio puede ser necesario una δ diferente para obtener las dos desigualdades, la de $l(x)$ y la de $u(x)$, pero se puede considerar la menor de las dos deltas. Por tanto, si $0 < |x - c| < \delta$, se tiene:

$$L - \epsilon < l(x) < L + \epsilon$$

y también:

$$L - \epsilon < u(x) < L + \epsilon$$

Como $f(x)$ se encuentra entre $l(x)$ y $u(x)$, se tiene que:

$$L - \epsilon < l(x) \leq f(x) \leq u(x) < L + \epsilon$$

y, por tanto, $|f(x) - L| < \epsilon$ si $0 < |x - c| < \delta$. Como ϵ es arbitrario, queda demostrado que $\lim_{x \to c} u(x) = L$. ■

Sección 7.2

TEOREMA 6 Derivada de la inversa Suponga que $f(x)$ es derivable e inyectiva en un intervalo abierto (r, s), inversa $g(x)$. Si b pertenece al dominio de $g(x)$ y $f'(g(b)) \neq 0$, entonces $g'(b)$ existe y se verif ca:

$$g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$$

Demostración La función $f(x)$ es inyectiva y continua (pues es derivable). Por tanto, $f(x)$ es monótona creciente o decreciente en (r, s). Si no lo fuera, $f(x)$ tendría un máximo o un mínimo local en algún punto $x = x_0$. Pero entonces $f(x)$ no sería inyectiva en un pequeño intervalo alrededor de x_0, por el TVI.

Suponga que $f(x)$ sea creciente (el caso decreciente es similar). Se va a demostrar que $g(x)$ es continua en $x = b$. Sea $a = g(b)$, tal que $f(a) = b$. Considere un pequeño número $\epsilon > 0$. Como $f(x)$ es una función creciente, aplica el intervalo abierto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ en el intervalo abierto $(f(a - \epsilon), f(a + \epsilon))$ que contiene $f(a) = b$. Se puede escoger un número $\delta > 0$ tal que $(b - \delta, b + \delta)$ esté contenido en $(f(a - \epsilon), f(a + \epsilon))$. Entonces $g(x)$ aplica de vuelta $(b - \delta, b + \delta)$ en $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. De aquí se deduce que:

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |y - b| < \delta$$

Esto demuestra que g es continua en $x = b$.

Para completar la demostración, se debe demostrar que el siguiente límite existe y es igual a $1/f'(g(b))$:

$$g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$$

Por la relación inversa, si $y = f(x)$, entonces $g(y) = x$, y como $g(y)$ es continua, x tiende a a cuando y tiende a b. Por tanto, como $f(x)$ es derivable y $f'(a) \neq 0$, se tiene:

$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$ ■

Sección 4.2

TEOREMA 7 Existencia de extremos en un intervalo cerrado Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado (acotado) $I = [a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza su valor máximo y mínimo en I.

Demostración Se va a demostrar que $f(x)$ alcanza su valor máximo en dos etapas (el caso del mínimo es similar).

Etapa 1. **Demuestre que $f(x)$ está acotada superiormente**

Se realizará una demostración por contradicción. Si $f(x)$ no estuviera acotada superiormente, entonces existirían puntos $a_n \in [a, b]$ tales que $f(a_n) \geq n$ para $n = = 1, 2, \ldots$. Según el teorema 3 en el apéndice B, se puede considerar una subsucesión de elementos $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ que converja a un límite en $[a, b]$; digamos, $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = L$. Como $f(x)$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(L)| < 1 \qquad \text{si} \quad x \in [a, b] \quad \text{y} \quad |x - L| < \delta$$

Por tanto:

$$f(x) < f(L) + 1 \qquad \text{si} \quad x \in [a, b] \quad \text{y} \quad x \in (L - \delta, L + \delta) \tag{5}$$

Para k suf cientemente grande, a_{n_k} se encuentra en $(L - \delta, L + \delta)$ pues $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$. Según la ec. (5), $f(a_{n_k})$ está acotada por $f(L) + 1$. Sin embargo, $f(a_{n_k}) = n_k$ tiende a inf nito cuando $k \to \infty$. Esto es una contradicción. Por tanto, el supuesto de que $f(x)$ no está acotada superiomente es falso.

Etapa 2. **Demuestre que $f(x)$ alcanza un valor máximo**

El rango de $f(x)$ sobre $I = [a, b]$ es el conjunto:

$$S = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Según la etapa anterior, S está acotado superiormente y, por tanto, existe su menor cota superior M por la propiedad del supremo. Así, $f(x) \le M$ para todo $x \in [a, b]$. Para f nalizar la demostración, se debe probar que $f(c) = M$ para algún $c \in [a, b]$. Esto probará que $f(x)$ alcanza el valor máximo M en $[a, b]$.

Por def nición, $M - 1/n$ no es una cota superior para $n \ge 1$ y, en consecuencia, se puede escoger un punto b_n en $[a, b]$ tal que:

$$M - \frac{1}{n} \le f(b_n) \le M$$

Nuevamente, por el teorema 3 en el apéndice B, existe una subsucesión de elementos $\{b_{n_1}, b_{n_2}, \dots\}$ en $\{b_1, b_2, \dots\}$ que tiene límite; sea entonces:

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = c$$

Considere $\epsilon > 0$. Como $f(x)$ es continua, se puede escoger k suf cientemente grande de manera que las dos condiciones siguientes se cumplan: $|f(c) - f(b_{n_k})| < \epsilon/2$ y $n_k > 2/\epsilon$. Entonces:

$$|f(c) - M| \le |f(c) - f(b_{n_k})| + |f(b_{n_k}) - M| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n_k} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Por tanto, $|f(c) - M|$ es menor que ϵ para cualquier ϵ positivo. Pero esto no es posible salvo si $|f(c) - M| = 0$. En consecuencia $f(c) = M$ como se quería probar. ■

Sección 5.2

TEOREMA 8 Las funciones continuas son integrables Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración Se va a suponer que $f(x)$ es derivable y que su derivada $f'(x)$ es acotada. Dicho de otro modo, se supone que $|f'(x)| \le K$ para alguna constante K. Esta hipótesis de simplif cación sobre $f(x)$ se utiliza para mostrar que la función no puede variar demasiado en un intervalo pequeño. De forma más precisa, se va a demostrar que si $[a_0, b_0]$ es cualquier intervalo cerrado contenido en $[a, b]$ y si m y M son los valores mínimo y máximo de $f(x)$ en $[a_0, b_0]$, entonces:

$$|M - m| \le K|b_0 - a_0| \tag{6}$$

La f gura 1 ilustra la idea subyacente a esta desigualdad. Suponga que $f(x_1) = m$ y $f(x_2) = M$, donde x_1 y x_2 se encuentran en $[a_0, b_0]$. Si $x_1 \ne x_2$, entonces por el teorema del valor medio (TVM), existe un punto c comprendido entre x_1 y x_2 tal que:

$$\frac{M - m}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

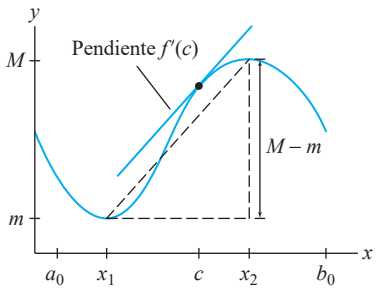


FIGURA 1 Como $M - m = f'(c)(x_2 - x_1)$, se deduce que $M - m \le K(b_0 - a_0)$.

Como x_1, x_2 se encuentran en $[a_0, b_0]$, se tiene que $|x_2 - x_1| \le |b_0 - a_0|$ y, por tanto:

$$|M - m| = |f'(c)|\,|x_2 - x_1| \le K|b_0 - a_0|$$

Esto demuestra la ec. (6).

El resto de la demostración se va a dividir en dos etapas. Considere una partición P:

$$P: \; x_0 = a < x_1 < \quad \cdots \quad < x_{N-1} < x_N = b$$

Sea m_i el valor mínimo de $f(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ y M_i el valor máximo en $[x_{i-1}, x_i]$. Se def nen las sumas de Riemann *inferior* y *superior* como:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i, \qquad U(f, P) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i$$

Se trata de sumas de Riemann particulares en las que el punto intermedio en $[x_{i-1}, x_i]$ es el punto en el que $f(x)$ alcanza su mínimo o máximo sobre $[x_{i-1}, x_i]$. La f gura 2 ilustra el caso $N = 4$.

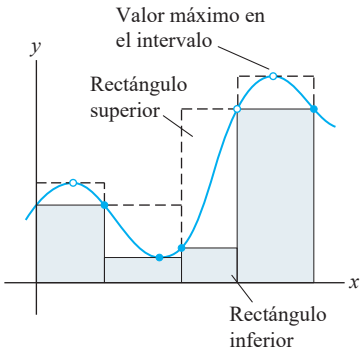


FIGURA 2 Rectángulos inferior y superior para una partición de longitud $N = 4$.

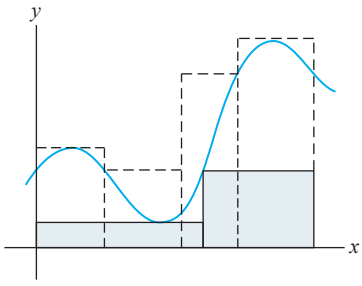


FIGURA 3 Los rectángulos inferiores siempre se encuentran por debajo de los rectángulos superiores, incluso cuando las particiones son diferentes.

Etapa 1. **Demuestre que las sumas inferior y superior tienen límite**

Se tiene que:

$$L(f, P_1) \le U(f, P_2) \quad \text{para cualesquiera particiones } P_1 \text{ y } P_2 \qquad \boxed{7}$$

Si un subintervalo I_1 de P_1 se superpone a un intervalo I_2 de P_2, entonces el mínimo de f sobre I_1 es menor o igual que el máximo de f sobre I_2 (f gura 3). En particular, las sumas inferiores se encuentran acotadas superiormente por $U(f, P)$ para cualquier partición P que se quiera considerar. Sea L la menor cota superior para las sumas inferiores. Entonces, para toda partición P, se tiene:

$$L(f, P) \le L \le U(f, P) \qquad \boxed{8}$$

Según la ec. (6), $|M_i - m_i| \le K\Delta x_i$ para todo i. Como $\|P\|$ es la mayor de las amplitudes Δx_i, se tiene que $|M_i - m_i| \le K\|P\|$ y, por consiguiente:

$$|U(f, P) - L(f, P)| \le \sum_{i=1}^{N} |M_i - m_i|\,\Delta x_i \le$$

$$\le K\|P\| \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = K\|P\|\,|b - a| \qquad \boxed{9}$$

Sea $c = K\,|b - a|$. Aplicando la ec. (8) y la ec. (9), se obtiene:

$$|L - U(f, P)| \le |U(f, P) - L(f, P)| \le c\|P\|$$

Se deduce de aquí que $\lim_{\|P\| \to 0} |L - U(f, P)| = 0$. Análogamente:

$$|L - L(f, P)| \le c\|P\|$$

y, por tanto:

$$\lim_{\|P\| \to 0} |L - L(f, P)| = 0$$

Así pues, se tiene:

$$\lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) = L$$

Etapa 2. **Demuestre que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y que su valor es L**

Recuerde que para cualquier elección C de puntos intermedios $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se define la suma de Riemann del modo siguiente:

$$R(f,P,C) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

Se tiene, entonces:

$$L(f,P) \le R(f,P,C) \le U(f,P)$$

Así, como $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, se tiene que $m_i \le f(c_i) \le M_i$ para todo i y, por tanto:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} M_i\,\Delta x_i$$

De aquí se deduce que:

$$|L - R(f,P,C)| \le |U(f,P) - L(f,P)| \le c\|P\|$$

Esto prueba que $R(f,P,C)$ converge a L cuando $\|P\| \to 0$. ■

Sección 11.1

TEOREMA 9 Si $f(x)$ es continua y $\{a_n\}$ es una sucesión tal que el límite $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ existe, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Como $f(x)$ es continua, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(L)| < \epsilon \qquad \text{si } 0 < |x - L| < \delta$$

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, existe $N > 0$ tal que $|a_n - L| < \delta$ para $n > N$. Por tanto:

$$|f(a_n) - f(L)| < \epsilon \qquad \text{para } n > N$$

De aquí se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$. ■

Sección 15.3

TEOREMA 10 Teorema de Clairaut Si f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en un disco D, entonces $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ para todo $(a,b) \in D$.

Demostración Se va a demostrar que tanto $f_{xy}(a,b)$ como $f_{yx}(a,b)$ son iguales al límite:

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)}{h^2}$$

Sea $F(x) = f(x, b+h) - f(x,b)$. El numerador en el límite es igual a:

$$F(a+h) - F(a)$$

y $F'(x) = f_x(x, b + h) - f_x(x, b)$. Por el TVM, existe a_1 entre a y $a + h$ tal que:

$$F(a + h) - F(a) = hF'(a_1) = h(f_x(a_1, b + h) - f_x(a_1, b))$$

Por el TVM aplicado a f_x, existe b_1 entre b y $b + h$ tal que:

$$f_x(a_1, b + h) - f_x(a_1, b) = hf_{xy}(a_1, b_1)$$

Por tanto, se tiene:

$$F(a + h) - F(a) = h^2 f_{xy}(a_1, b_1)$$

y, también:

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 f_{xy}(a_1, b_1)}{h^2} = \lim_{h \to 0} f_{xy}(a_1, b_1) = f_{xy}(a, b)$$

La última igualdad es cierta por la continuidad de f_{xy} pues (a_1, b_1) tiende a (a, b) cuando $h \to 0$. Para demostrar que $L = f_{yx}(a, b)$, repita el proceso pero usando la función $F(y) = = f(a + h, y) - f(a, y)$ con los papeles de x y de y intercambiados. ■

Sección 15.4

TEOREMA 11 Criterio para diferenciabilidad Si $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ existen y son continuas en un disco abierto D, entonces $f(x, y)$ es diferenciable en D.

Demostración Sea $(a, b) \in D$ e introduzca:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Es conveniente cambiar a las variables h y k, siendo $x = a + h$ e $y = b + k$. Sea:

$$\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

Entonces:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

y se puede def nir la función:

$$e(h, k) = f(x, y) - L(x, y) = \Delta f - (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)$$

Para demostrar que $f(x, y)$ es diferenciable, se debe probar que:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{e(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Con este objetivo, exprese Δf como una suma de dos términos:

$$\Delta f = (f(a + h, b + k) - f(a, b + k)) + (f(a, b + k) - f(a, b))$$

y aplique el TVM a cada término por separado. Se obtiene así que existe a_1, entre a y $a + h$, y b_1, entre b y $b + k$, tales que:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b + k) = hf_x(a_1, b + k)$$

$$f(a, b + k) - f(a, b) = kf_y(a, b_1)$$

Por tanto:

$$e(h,k) = h(f_x(a_1, b+k) - f_x(a,b)) + k(f_y(a,b_1) - f_y(a,b))$$

y para $(h,k) \neq (0,0)$, se tendrá:

$$\left|\frac{e(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{h(f_x(a_1,b+k) - f_x(a,b)) + k(f_y(a,b_1) - f_y(a,b))}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{h(f_x(a_1,b+k) - f_x(a,b))}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| + \left|\frac{k(f_y(a,b_1) - f_y(a,b))}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| =$$

$$= |f_x(a_1,b+k) - f_x(a,b)| + \left|f_y(a,b_1) - f_y(a,b)\right|$$

En la segunda línea se ha utilizado la desigualdad triangular (vea la ec. (1) en la sección 1.1) y se puede pasar a la tercera línea porque tanto $\left|h/\sqrt{h^2+k^2}\right|$ como $\left|k/\sqrt{h^2+k^2}\right|$ son ambos menores que 1. Los dos términos de la última línea tienden a cero cuando $(h,k) \rightarrow (0,0)$ porque f_x y f_y son funciones continuas, por hipótesis. Esto f naliza la demostración de que $f(x,y)$ es diferenciable. ■

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS IMPARES

Capítulo 12

Sección 12.1 Ejercicios preliminares

1. Una circunferencia de radio 3 centrada en el origen.

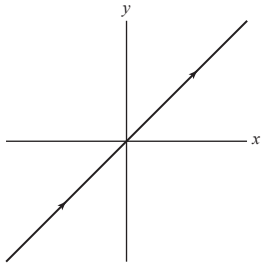
2. El centro se encuentra en $(4, 5)$. **3.** Altura máxima: 4

4. Sí; no **5.** (a) ↔ (iii), (b) ↔ (ii), (c) ↔ (i)

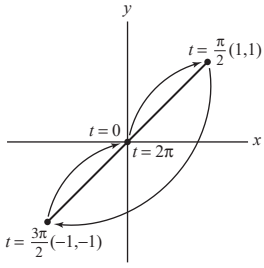
Sección 12.1 Problemas

1. $(t = 0)(1, 9)$; $(t = 2)(9, -3)$; $(t = 4)(65, -39)$

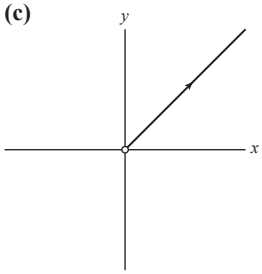
5. **(a)**



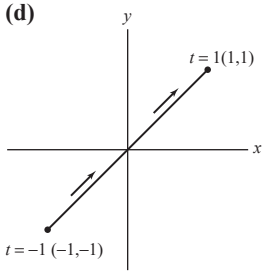
(b)



(c)



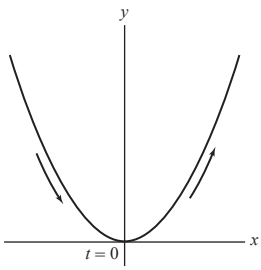
(d)



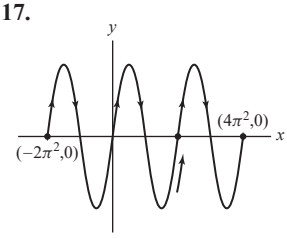
7. $y = 4x - 12$ **9.** $y = \tan^{-1}\left(x^3 + e^x\right)$

11. $y = \frac{6}{x^2}$ (donde $x > 0$) **13.** $y = 2 - e^x$

15.



17.



19. (a) ↔ (iv), (b) ↔ (ii), (c) ↔ (iii), (d) ↔ (i)

21. $\pi \le t \le 2\pi$ **23.** $c(t) = (t, 9 - 4t)$ **25.** $c(t) = \left(\frac{5+t^2}{4}, t\right)$

27. $c(t) = (-9 + 7\cos t, 4 + 7\operatorname{sen} t)$ **29.** $c(t) = (-4 + t, 9 + 8t)$

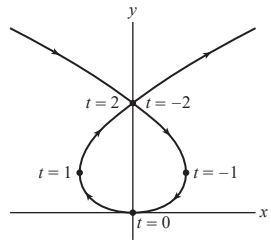
31. $c(t) = (3 - 8t, 1 + 3t)$ **33.** $c(t) = (1 + t, 1 + 2t)\ (0 \le t \le 1)$

35. $c(t) = (3 + 4\cos t, 9 + 4\operatorname{sen} t)$ **37.** $c(t) = \left(-4 + t, -8 + t^2\right)$

39. $c(t) = (2 + t, 2 + 3t)$ **41.** $c(t) = \left(3 + t, (3 + t)^2\right)$

43. $y = \sqrt{x^2 - 1}\ (1 \le x \text{¡} \infty)$ **45.** Plot III.

47.



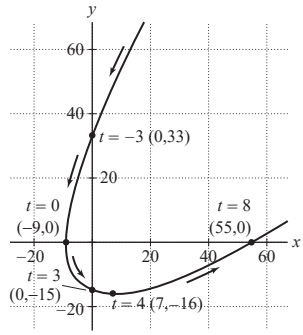
49. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-4} = -\frac{1}{6}$

51. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{s=-1} = -\frac{3}{4}$

53. $y = -\frac{9}{2}x + \frac{11}{2}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{2}$

55. $y = x^2 + x^{-1}$; $\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x^2}$ **57.** $(0, 0), (96, 180)$

59.

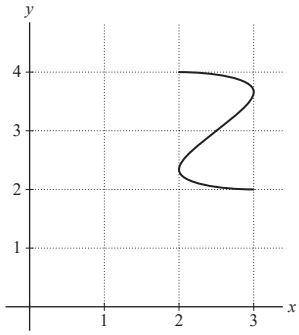


La gráfica está en el: cuadrante (i) para $t < -3$ o $t > 8$, cuadrante (ii) para $-3 < t < 0$, cuadrante (iii) para $0 < t < 3$, cuadrante (iv) para $3 < t < 8$.

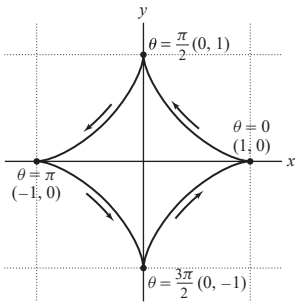
61. $(55, 0)$

63. Las coordenadas de P, $(R\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, describen una elipse para $0 \le \theta \le 2\pi$.

67. $c(t) = (3 - 9t + 24t^2 - 16t^3, 2 + 6t^2 - 4t^3), 0 \le t \le 1$



71. $y = -\sqrt{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



73. $((2k-1)\pi, 2), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

83. $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = -\dfrac{21}{512}$ **85.** $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-3} = 0$ **87.** Convexa: $t > 0$

Sección 12.2 Ejercicios preliminares

1. $S = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$ **2.** La celeridad en el instante t.

3. Desplazamiento: 5; no **4.** $L = 180$ cm

Sección 12.2 Problemas

1. $S = 10$ **3.** $S = 16\sqrt{13}$ **5.** $S = \frac{1}{2}(65^{3/2} - 5^{3/2}) \approx 256{,}43$

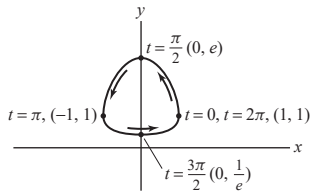
7. $S = 3\pi$ **9.** $S = -8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 2{,}34$

13. $S = \ln(\cosh(A))$ **15.** $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65$ m/s

17. $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=9} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ m/s **19.** $\left(\dfrac{ds}{dt}\right)_{\text{mín}} \approx \sqrt{4{,}89} \approx 2{,}21$

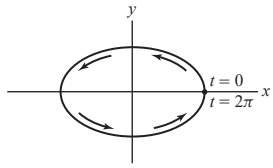
21. $\dfrac{ds}{dt} = 8$

23.



$M_{10} = 6{,}903734$, $M_{20} = 6{,}915035$, $M_{30} = 6{,}914949$, $M_{50} = 6{,}914951$

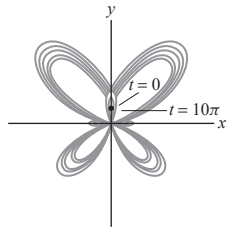
25.

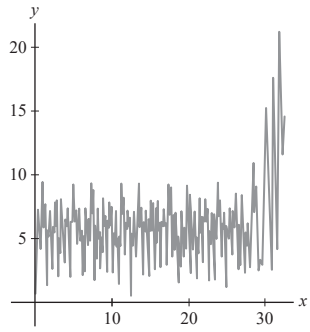


$M_{10} = 25{,}528309$, $M_{20} = 25{,}526999$, $M_{30} = 25{,}526999$, $M_{50} = 25{,}526999$

27. $S = 2\pi^2 R$ **29.** $S = m\sqrt{1 + m^2}\pi A^2$ **31.** $S = \frac{64\pi}{3}$

33. (a)





(b) $L \approx 212{,}09$

Sección 12.3 Ejercicios preliminares

1. (b) **2.** Positivo: $(r,\theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$; negativo: $(r, \theta) = \left(-1, \frac{3\pi}{2}\right)$

3. (a) Ecuación de la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

(b) Ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{2}$ centrada en el origen.

(c) Ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(2, 0)$.

4. (a)

Sección 12.3 Problemas

1. (A): $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$; (B): $(3, \pi)$;
(C): $\left(\sqrt{5}, \pi + 0{,}46\right) \approx \left(\sqrt{5}, 3{,}60\right)$; (D): $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$;
(E): $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$; (F): $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$; (G): $\left(4, \frac{11\pi}{6}\right)$

3. (a) $(1, 0)$ **(b)** $\left(\sqrt{12}, \frac{\pi}{6}\right)$ **(c)** $\left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right)$ **(d)** $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$

5. (a) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **(b)** $\left(-\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $(0, 0)$ **(d)** $(0, -5)$

7. (A): $0 \le r \le 3$, $\pi \le \theta \le 2\pi$, (B): $0 \le r \le 3$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$,
(C): $3 \le r \le 5$, $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$

9. $m = \tan\frac{3\pi}{5} \approx -3{,}1$ **11.** $x^2 + y^2 = 7^2$

13. $x^2 + (y-1)^2 = 1$ **15.** $y = x - 1$ **17.** $r = \sqrt{5}$

19. $r = \tan\theta \sec\theta$

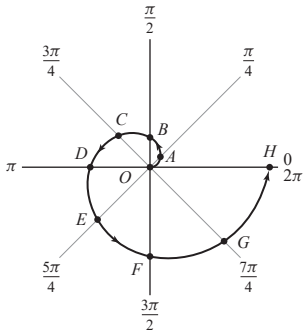
21. (a)↔(iii), (b)↔(iv), (c)↔(i), (d)↔(ii)

23. **(a)** $(r, 2\pi - \theta)$ **(b)** $(r, \theta + \pi)$ **(c)** $(r, \pi - \theta)$

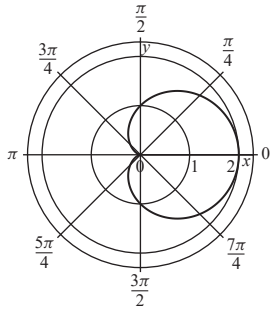
(d) $\left(r, \frac{\pi}{2} - \theta\right)$

25. $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = d$

27.



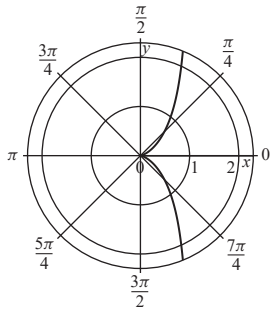
29.



31. **(a)** A, $\theta = 0$, $r = 0$; B, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4} = 1$; C, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$; D, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $r = \operatorname{sen}\frac{2\cdot 3\pi}{4} = -1$; E, $\theta = \pi$, $r = 0$; F, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, $r = 1$; G, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $r = 0$; H, $\theta = \frac{7\pi}{4}$, $r = -1$; I, $\theta = 2\pi$, $r = 0$

(b) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ está en el primer cuadrante. $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ está en el cuarto cuadrante. $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ está en el tercer cuadrante. $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ está en el segundo cuadrante.

33.

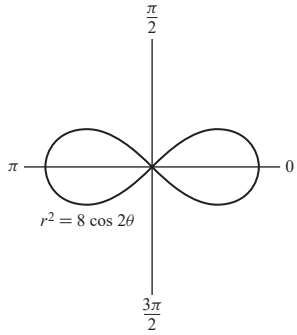


35. $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, centrada en el punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

37. $r^2 = \sec 2\theta$ **39.** $(x^2 + y^2) = x^3 - 3y^2x$

41. $r = 2\sec\left(\theta - \frac{\pi}{9}\right)$ **43.** $r = 2\sqrt{10}\sec(\theta - 4{,}39)$

47. $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$



51. $\theta = \frac{\pi}{2}$, $m = -\frac{2}{\pi}$; $\theta = \pi$, $m = \pi$

53. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$

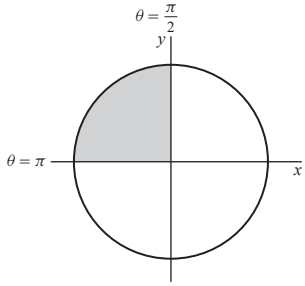
55. A: $m = 1$, B: $m = -1$, C: $m = 1$

Sección 12.4 Ejercicios preliminares

1. (b) **2.** Sí **3.** (c)

Sección 12.4 Problemas

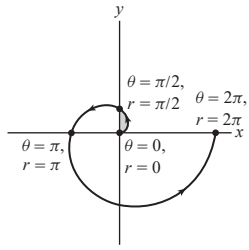
1. $A = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} r^2\, d\theta = \frac{25\pi}{4}$



3. $A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\, d\theta = 4\pi$ **5.** $A = 16$

7. $A = \frac{3\pi}{2}$ **9.** $A = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}39$

11. $A = \frac{\pi^3}{48}$



13. $A = \frac{\sqrt{15}}{2} + 7\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 11{,}163$

15. $A = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}54$ **17.** $A = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \approx 0{,}14$ **19.** $A = 4\pi$

21. $A = \frac{9\pi}{2} - 4\sqrt{2}$ **23.** $A = 4\pi$

25. $L = \frac{1}{3}\left(\left(\pi^2 + 4\right)^{3/2} - 8\right) \approx 14{,}55$

27. $L = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right) \approx 755{,}9$ **29.** $L = 8$

31. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4\cos\theta}\,(2 - \cos\theta)^{-2}\,d\theta$ **33.** $L \approx 6{,}682$

35. $L \approx 79{,}564$

Sección 12.5 Ejercicios preliminares

1. (a) Hipérbola **(b)** Parábola **(c)** Elipse

(d) No es una sección cónica.

2. Hipérbolas **3.** Los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$

4. $\pm\frac{b}{a}$ son las pendientes de las dos asíntotas de la hipérbola.

Sección 12.5 Problemas

1. $F_1 = \left(-\sqrt{65}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{65}, 0\right)$. Los vértices son $(9, 0)$, $(-9, 0)$, $(0, 4)$ y $(0, -4)$.

3. $F_1 = \left(\sqrt{97}, 0\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{97}, 0\right)$. Los vértices son $(4, 0)$ y $(-4, 0)$.

5. $F_1 = \left(\sqrt{65} + 3, -1\right)$, $F_2 = \left(-\sqrt{65} + 3, -1\right)$. Los vértices son $(10, -1)$ y $(-4, -1)$.

7. $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ **9.** $\frac{(x-14)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{3^2} = 1$

11. $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$ **13.** $\frac{x^2}{(40/3)^2} + \frac{y^2}{(50/3)^2} = 1$

15. $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ **17.** $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 1$

19. $\left(\frac{x-2}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{10\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ **21.** $y = 3x^2$

23. $y = \frac{1}{20}x^2$ **25.** $y = \frac{1}{16}x^2$ **27.** $x = \frac{1}{8}y^2$

29. Vértices: $(\pm 4, 0)$, $(0, \pm 2)$. Focos: $\left(\pm\sqrt{12}, 0\right)$.

Centrada en el origen.

31. Vértices: $(7, -5)$, $(-1, -5)$. Focos: $\left(\sqrt{65} + 3, -5\right)$, $\left(-\sqrt{65} + 3, -5\right)$. Centro: $(3, -5)$.

Asíntotas: $y = \frac{4}{7}x + \frac{47}{7}$ e $y = -\frac{4}{7}x + \frac{23}{7}$.

33. Vértices: $(5, 5)$, $(-7, 5)$. Focos: $\left(\sqrt{84} - 1, 5\right)$, $\left(-\sqrt{84} - 1, 5\right)$. Centro: $(-1, 5)$. Asíntotas: $y = \frac{\sqrt{48}}{6}(x + 1) + 5 \approx 1{,}15x + 6{,}15$ e $y = -\frac{\sqrt{48}}{6}(x + 1) + 5 \approx -1{,}15x + 3{,}85$.

35. Vértice: $(0, 0)$. Foco: $\left(0, \frac{1}{16}\right)$.

37. Vértices: $\left(1 \pm \frac{5}{2}, \frac{1}{5}\right)$, $\left(1, \frac{1}{5} \pm 1\right)$.

Focos: $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2} + 1, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}}{2} + 1, \frac{1}{5}\right)$. Centrada en $\left(1, \frac{1}{5}\right)$.

39. $D = -87$; elipse **41.** $D = 40$; hipérbola

47. Foco: $(0, c)$. Directriz: $y = -c$. **49.** $A = \frac{8}{3}c^2$

51. $r = \frac{3}{2 + \cos\theta}$ **53.** $r = \frac{4}{1 + \cos\theta}$

55. Hipérbola, $e = 4$, directriz $x = 2$.

57. Elipse, $e = \frac{3}{4}$, directriz $x = \frac{8}{3}$ **59.** $r = \frac{12}{5 - 6\cos\theta}$

61. $\left(\frac{x+3}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{16/5}\right)^2 = 1$

63. 4,5 billones de millas

Capítulo 12 Repaso

1. (a), (c)

3. $c(t) = (1 + 2\cos t, 1 + 2\,\mathrm{sen}\,t)$. Los puntos de intersección con el eje y son $\left(0, 1 \pm \sqrt{3}\right)$. Los puntos de intersección con el eje x son $\left(1 \pm \sqrt{3}, 0\right)$.

5. $c(\theta) = (\cos(\theta + \pi), \mathrm{sen}(\theta + \pi))$ **7.** $c(t) = (1 + 2t, 3 + 4t)$

9. $y = -\frac{x}{4} + \frac{37}{4}$ **11.** $y = \frac{8}{(3-x)^2} + \frac{3-x}{2}$

13. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=3} = \frac{3}{14}$ **15.** $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{\cos 20}{e^{20}}$

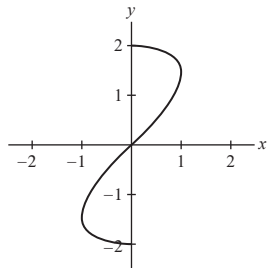
17. $(0, 1)$, $(\pi, 2)$, $(0{,}13, 0{,}40)$, y $(1{,}41, 1{,}60)$

19. $x(t) = -2t^3 + 4t^2 - 1$, $y(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t - 1$

21. $\frac{ds}{dt} = \sqrt{3 + 2(\cos t - \mathrm{sen}\,t)}$; celeridad maximal: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

23. $s = \sqrt{2}$

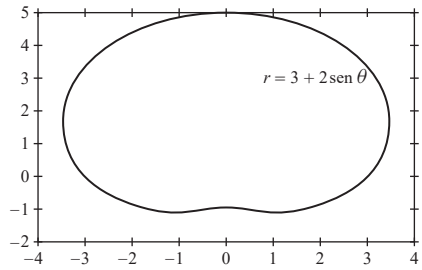
25.



$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 2t + \mathrm{sen}^2\, t}\,dt \approx 6{,}0972$

27. $\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$ tienen coordenadas rectangulares $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

29. $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x-y}$ **31.** $r = 3 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$



33. $A = \frac{\pi}{16}$ **35.** $e - \frac{1}{e}$

Nota: es necesario duplicar la integral de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ para tener en cuenta ambos lados de la gráfica.

37. $A = \frac{3\pi a^2}{2}$

39. Exterior: $L \approx 36{,}121$, interior: $L \approx 7{,}5087$, diferencia: $28{,}6123$

41. Elipse. Vértices: $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 2)$. Focos: $(\pm\sqrt{5}, 0)$.

43. Elipse. Vértices: $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$. Focos: $\left(0, \pm\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$.

45. $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{61}}\right)^2 = 1$ **47.** $\left(\frac{x}{8}\right)^2 - \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$ **49.** $x = \frac{1}{32}y^2$

51. $y = \sqrt{3}x + \left(\sqrt{3} - 5\right)$ e $y = -\sqrt{3}x + \left(-\sqrt{3} - 5\right)$

Capítulo 13

Sección 13.1 Ejercicios preliminares

1. **(a)** Verdadero **(b)** Falso **(c)** Verdadero **(d)** Verdadero

2. $\|-3\mathbf{a}\| = 15$

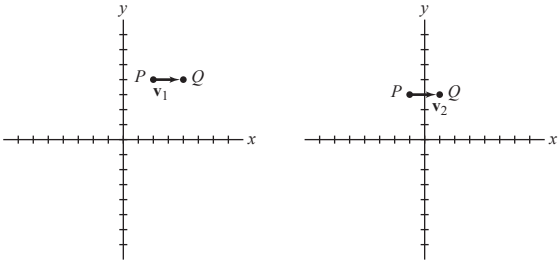
3. Las componentes no cambian.

4. $(0,\ 0)$

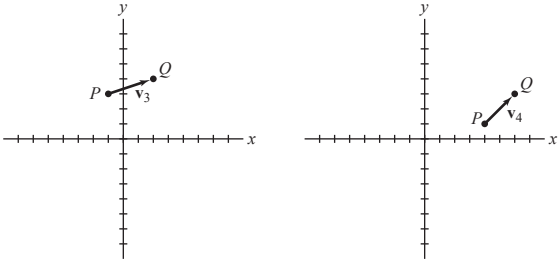
5. **(a)** Verdadero **(b)** Falso

Sección 13.1 Problemas

1. $\mathbf{v}_1 = \langle 2,\ 0\rangle$, $\|\mathbf{v}_1\| = 2$ $\quad$ $\mathbf{v}_2 = \langle 2,\ 0\rangle$, $\|\mathbf{v}_2\| = 2$

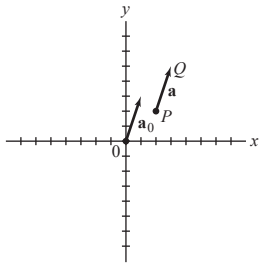


$\mathbf{v}_3 = \langle 3,\ 1\rangle$, $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{10}$ $\quad$ $\mathbf{v}_4 = \langle 2,\ 2\rangle$, $\|\mathbf{v}_4\| = 2\sqrt{2}$



Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son equivalentes.

3. $(3,\ 5)$

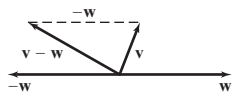


5. $\overrightarrow{PQ} = \langle -1,\ 5\rangle$ $\quad$ **7.** $\overrightarrow{PQ} = \langle -2,\ -9\rangle$ $\quad$ **9.** $\langle 5,\ 5\rangle$

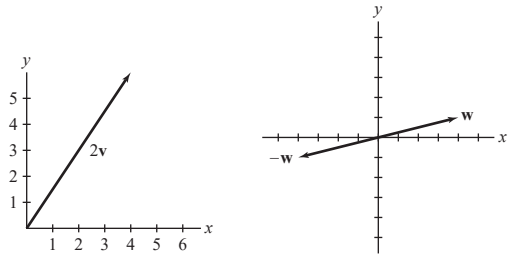
11. $\langle 30,\ 10\rangle$

13. $\left\langle \frac{5}{2},\ 5\right\rangle$

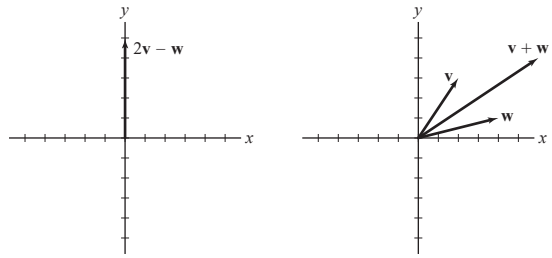
15. El vector (B)



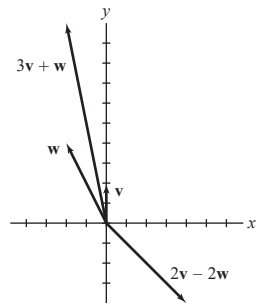
17. $2\mathbf{v} = \langle 4,\ 6\rangle$ $\quad$ $-\mathbf{w} = \langle -4,\ -1\rangle$



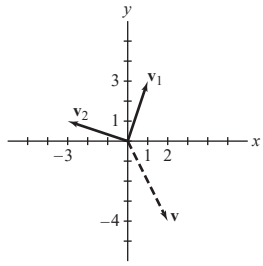
$2\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle 0,\ 5\rangle$ $\quad$ $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 6,\ 4\rangle$



19. $3\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle -2,\ 10\rangle$, $2\mathbf{v} - 2\mathbf{w} = \langle 4,\ -4\rangle$



21.



23. (b) y (c)

25. $\overrightarrow{AB} = \langle 2,\ 6\rangle$ y $\overrightarrow{PQ} = \langle 2,\ 6\rangle$; equivalentes

27. $\overrightarrow{AB} = \langle 3, -2\rangle$ y $\overrightarrow{PQ} = \langle 3, -2\rangle$; equivalentes

29. $\overrightarrow{AB} = \langle 2,\ 3\rangle$ y $\overrightarrow{PQ} = \langle 6,\ 9\rangle$; paralelos y apuntan en la misma dirección

31. $\overrightarrow{AB} = \langle -8,\ 1\rangle$ y $\overrightarrow{PQ} = \langle 8, -1\rangle$; paralelos y apuntan en direcciones opuestas

33. $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \sqrt{53}$ $\quad$ **35.** $P = (0,\ 0)$ $\quad$ **37.** $\mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{1}{5}\langle 3, 4\rangle$

39. $4\mathbf{e}_\mathbf{u} = \left\langle -2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}\right\rangle$

41. $\mathbf{e} = \left\langle \cos\frac{4\pi}{7},\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{7}\right\rangle = \langle -0{,}22,\ 0{,}97\rangle$

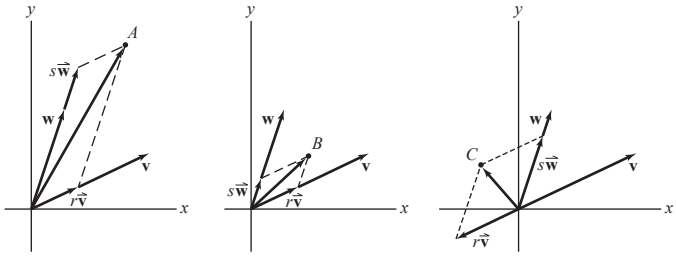
43. $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}$ **45.** $P = (4,\ 6)$

47. (a) → (ii), (b) → (iv), (c) → (iii), (d) → (i)

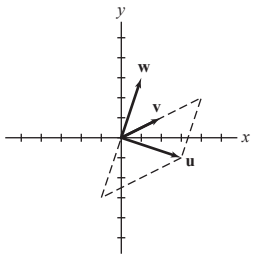
49. $9\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

51. $-5\mathbf{i} - \mathbf{j}$

53.



55. $\mathbf{u} = 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$



57. La fuerza sobre el cable 1 es ≈ 45 lb y la fuerza sobre el cable 2 es ≈ 21 lb.

59. 230 km/hr **61.** $\mathbf{r} = \langle 6{,}45,\ 0{,}38\rangle$

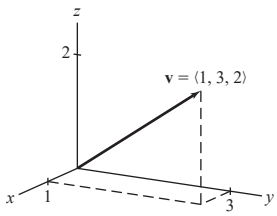
Sección 13.2 Ejercicios preliminares

1. $(4,\ 3,\ 2)$ **2.** $\langle 3,\ 2,\ 1\rangle$ **3.** (a) **4.** (c)

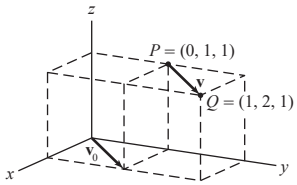
5. Infinitos vectores directores **6.** Verdadero

Sección 13.2 Problemas

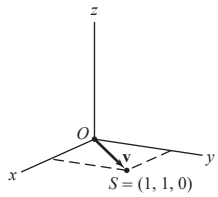
1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{14}$



3. La cabeza de $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ es $Q = (1,\ 2,\ 1)$.



$\mathbf{v}_0 = \overrightarrow{OS}$, donde $S = (1,\ 1,\ 0)$



5. $\overrightarrow{PQ} = \langle 1,\ 1,\ -1\rangle$ **7.** $\overrightarrow{PQ} = \left\langle -\frac{9}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1\right\rangle$

9. $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ **11.** $P = (-2,\ 6,\ 0)$

13. **(a)** Paralelos y en la misma dirección **(b)** No paralelos

(c) Paralelos y en direcciones opuestas **(d)** No paralelos

15. No equivalentes **17.** No equivalentes **19.** $\langle -8,\ -18,\ -2\rangle$

21. $\langle -2,\ -2,\ 3\rangle$ **23.** $\langle 16,\ -1,\ 9\rangle$

25. $\mathbf{e}_\mathbf{w} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}},\ \frac{-2}{\sqrt{21}},\ \frac{-1}{\sqrt{21}}\right\rangle$ **27.** $-\mathbf{e}_\mathbf{v} = \left\langle \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right\rangle$

29. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t,\ 2 + t,\ -8 + 3t\rangle$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle 4 + 7t,\ 0,\ 8 + 4t\rangle$ **33.** $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 2t,\ 1 - 6t,\ 1 + t\rangle$

35. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t,\ t,\ t\rangle$ **37.** $\mathbf{r}(t) = \langle 0,\ 0,\ t\rangle$

39. $\mathbf{r}(t) = \langle -t,\ -2t,\ 4 - 2t\rangle$

41. (c) **43.** $(3,\ 4,\ 3)$ **45.** $R = (6,\ 13,\ 15)$

49. $\mathbf{r}_1(t) = \langle 5,\ 5,\ 2\rangle + t\langle 0,\ -2,\ 1\rangle$;
$\mathbf{r}_2(t) = \langle 5,\ 5,\ 2\rangle + t\langle 0,\ -20,\ 10\rangle$

53. $(3,\ 4,\ 7)$ **55.** $\mathbf{v} = \left\langle 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle$ **59.** $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$

61. $\mathbf{r}(t) = \langle 5,\ -3,\ 10\rangle + t\langle 9,\ 7,\ 1\rangle$

Sección 13.3 Ejercicios preliminares

1. Escalar **2.** Obtuso **3.** Propiedad distributiva

4. **(a)** $\mathbf{v}$ **(b)** $\mathbf{v}$

5. (b); (c) **6.** (c)

Sección 13.3 Problemas

1. 15 **3.** 41 **5.** 5 **7.** 0 **9.** 1 **11.** 0 **13.** Obtuso

15. Ortogonal **17.** Agudo **19.** 0 **21.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **23.** $\pi/4$

25. ≈ 0,615 **27.** $2\pi/3$

29. **(a)** $b = -\frac{1}{2}$ **(b)** $b = 0$ o $b = \frac{1}{2}$

31. $\mathbf{v}_1 = \langle 0,\ 1,\ 0\rangle$, $\mathbf{v}_2 = \langle 3,\ 2,\ 2\rangle$ **33.** $-\frac{3}{2}$ **35.** $\|\mathbf{v}\|^2$

37. $\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2$ **39.** 8 **41.** 2 **43.** π **45.** (b) 7 **49.** 51,91°

51. $\left\langle \frac{7}{2},\ \frac{7}{2}\right\rangle$ **53.** $\left\langle -\frac{4}{5},\ 0,\ -\frac{2}{5}\right\rangle$ **55.** $-4\mathbf{k}$ **57.** $a\mathbf{i}$ **59.** $2\sqrt{2}$

61. $\sqrt{17}$

63. $\mathbf{a} = \left\langle \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle$

65. $\mathbf{a} = \left\langle 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle 4,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle$

67. $\left\langle \frac{x-y}{2},\ \frac{y-x}{2}\right\rangle + \left\langle \frac{x+y}{2},\ \frac{y+x}{2}\right\rangle$

71. ≈ 35° **73.** $\overrightarrow{AD}$ **77.** ≈ 68,07 N **95.** $2x + 2y - 2z = 1$

Sección 13.4 Ejercicios preliminares

1. $\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ **2.** $\|\mathbf{e} \times \mathbf{f}\| = \frac{1}{2}$ **3.** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \langle -2, -2, -1 \rangle$

4. **(a)** 0 **(b)** 0

5. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ **6.** $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ si o bien $\mathbf{v}$ o $\mathbf{w}$ (o ambos) son el vector cero o $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores paralelos.

Sección 13.4 Problemas

1. -5 **3.** -15 **5.** -8 **7.** 0 **9.** $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ **11.** $6\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$

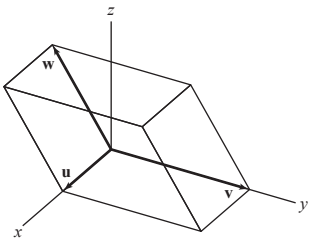
13. $-\mathbf{j} + \mathbf{i}$ **15.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ **17.** $\langle -1, -1, 0 \rangle$

19. $\langle -2, -2, -2 \rangle$ **21.** $\langle 4, 4, 0 \rangle$

23. $\mathbf{v} \times \mathbf{i} = \langle 0, c, -b \rangle$; $\mathbf{v} \times \mathbf{j} = \langle -c, 0, a \rangle$; $\mathbf{v} \times \mathbf{k} = \langle b, -a, 0 \rangle$

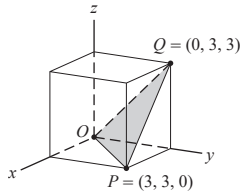
25. $-\mathbf{u}$ **27.** $\langle 0, 3, 3 \rangle$ **31.** $\mathbf{e}'$ **33.** $\mathbf{F}_1$ **37.** $2\sqrt{138}$

39. El volumen es 4.



41. $\sqrt{35} \approx 5{,}92$

43.



El área del triángulo es $\frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}8$.

55. $\mathbf{X} = \langle a, a, a + 1 \rangle$ **59.** $\tau = 250 \operatorname{sen} 125° \, \mathbf{k} \approx 204{,}79 \, \mathbf{k}$

Sección 13.5 Ejercicios preliminares

1. $3x + 4y - z = 0$ **2.** (c): $z = 1$ **3.** Plano (c) **4.** Plano xz

5. (c): $x + y = 0$ **6.** El enunciado (a)

Sección 13.5 Problemas

1. $\langle 1, 3, 2 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle = 3$
$x + 3y + 2z = 3$
$(x - 4) + 3(y + 1) + 2(z - 1) = 0$

3. $\langle -1, 2, 1 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle = 3$
$-x + 2y + z = 3$
$-(x - 4) + 2(y - 1) + (z - 5) = 0$

5. $\langle 1, 0, 0 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle = 3$
$x = 3$
$(x - 3) + 0(y - 1) + 0(z + 9) = 0$

7. $\langle 0, 0, 1 \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle = 2$
$z = 2$
$0(x - 6) + 0(y - 7) + 1(z - 2) = 0$

9. $x = 0$ **11.** Los enunciados (b) y (d) **13.** $\langle 9, -4, -11 \rangle$

15. $\langle 3, -8, 11 \rangle$ **17.** $6x + 9y + 4z = 19$ **19.** $x + 2y - z = 1$

21. $4x - 9y + z = 0$ **23.** $x = 4$ **25.** $x + z = 3$

27. $13x + y - 5z = 27$ **29.** Sí, los planos son paralelos.

31. $10x + 15y + 6z = 30$ **33.** (1, 5, 8) **35.** $(-2, 3, 12)$

37. $-9y + 4z = 5$ **39.** $x = -\frac{2}{3}$ **41.** $x = -4$

43. Los dos planos no tienen puntos en común.

45. $y - 4z = 0$
$x + y - 4z = 0$

47. $(3\lambda)x + by + (2\lambda)z = 5\lambda, \ \lambda \neq 0$ **49.** $\theta = \pi/2$

51. $\theta = 1{,}143$ rad o $\theta = 65.49°$ **53.** $\theta \approx 55{,}0°$

55. $x + y + z = 1$ **57.** $x - y - z = f$

59. $x = \frac{9}{5} + 2t, \ y = -\frac{6}{5} - 3t, \ z = 2 + 5t$ **61.** $\pm 24 \langle 1, 2, -2 \rangle$

67. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **69.** $\frac{6}{\sqrt{30}} \approx 1{,}095$ **71.** $|a|$

Sección 13.6 Ejercicios preliminares

1. Verdadero, excepto en $x = \pm a$, $y = \pm b$, or $z = \pm c$.

2. Falso **3.** Paraboloide hiperbólico

4. No **5.** Elipsoide

6. Todas las rectas verticales que pasen por una parábola c en el plano xy.

Sección 13.6 Problemas

1. Elipsoide **3.** Elipsoide

5. Hiperboloide de una hoja **7.** Paraboloide elíptico

9. Paraboloide hiperbólico **11.** Paraboloide hiperbólico

13. Elipsoide, la traza es una circunferencia sobre el plano xz.

15. Elipsoide, la traza es una elipse sobre el plano xy.

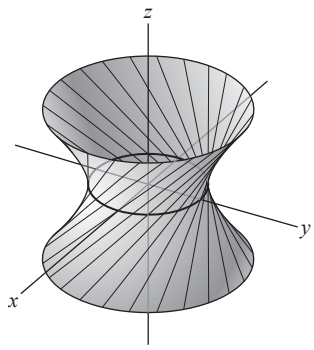
17. Hiperboloide de una hoja, la traza es una hipérbola.

19. Cilindro parabólico, la traza es la parábola $y = 3x^2$.

21. (a) ↔ f gura b; (b) ↔f gura c; (c) ↔ f gura a

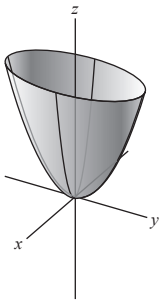
23. $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2$

25.

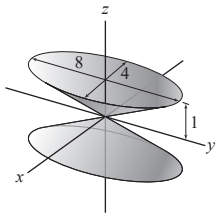


Gráf ca de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

27.



29.



31. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{6}\right)^2 = 1$ **33.** $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 - \left(\frac{z}{3\sqrt{3}}\right)^2 = 1$

35. Una o dos rectas verticales, o un conjunto vacío.

37. La parte superior de un cono elíptico.

Sección 13.7 Ejercicios preliminares

1. Cilindro de radio R cuyo eje es el eje z, esfera de radio R centrada en el origen.

2. (b) **3.** (a) **4.** $\phi = 0,\ \pi$ **5.** $\phi = \frac{\pi}{2}$, el plano xy

Sección 13.7 Problemas

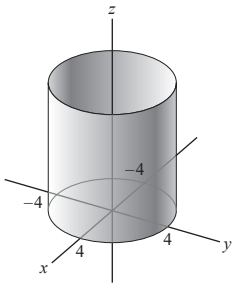
1. $(-4,\ 0,\ 4)$ **3.** $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ **5.** $\left(\sqrt{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 1\right)$ **7.** $\left(2,\ \frac{\pi}{3},\ 7\right)$

9. $\left(5,\ \frac{\pi}{4},\ 2\right)$ **11.** $r^2 \le 1$

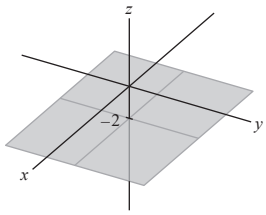
13. $r^2 + z^2 \le 4,\ \theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3\pi}{2}$

15. $r^2 \le 9,\ \frac{5\pi}{4} \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

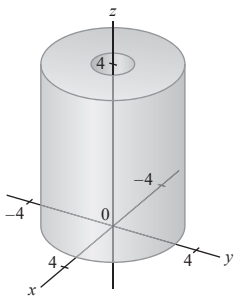
17.



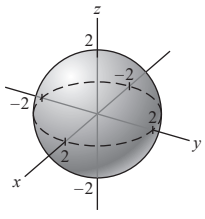
19.



21.



23.



25. $r = \frac{z}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$ **27.** $r = \frac{z\tan\theta}{\cos\theta}$ **29.** $r = 2$ **31.** $(3,\ 0,\ 0)$

33. $(0,\ 0,\ 3)$ **35.** $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2},\ -3\sqrt{3}\right)$ **37.** $\left(2,\ 0,\ \frac{\pi}{3}\right)$

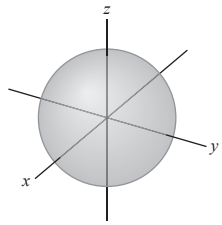
39. $\left(\sqrt{3},\ \frac{\pi}{4},\ 0{,}955\right)$ **41.** $\left(2,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6}\right)$ **43.** $\left(2\sqrt{2},\ 0,\ \frac{\pi}{4}\right)$

45. $\left(2\sqrt{2},\ 0,\ 2\sqrt{2}\right)$ **47.** $0 \le \rho \le 1$

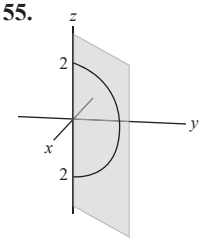
49. $\rho = 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$

51. $\left\{(\rho,\ \theta,\ \phi) : 0 \le \rho \le 2,\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{3\pi}{2}\right\}$

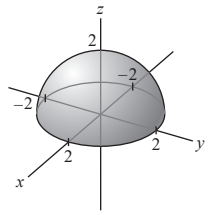
53.



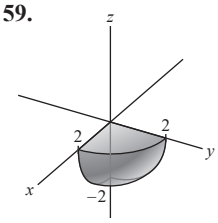
55.



57.



59.



61. $\rho = \frac{2}{\cos\phi}$ **63.** $\rho = \frac{\cos\theta\tan\phi}{\cos\phi}$ **65.** $\rho = \frac{2}{\operatorname{sen}\phi\sqrt{\cos 2\theta}}$ **67.** (b)

69. Helsinki:(25,0°, 29,9°), Sao Paulo: (313,48°, 113,52°)

71. Sydney: $(-4618{,}8,\ 2560{,}3,\ -3562{,}1)$,
Bogotá: $(1723{,}7,\ -6111{,}7,\ 503{,}1)$

73. $z = \pm r\sqrt{\cos 2\theta}$

77. $r = \sqrt{z^2 + 1}$ y $\rho = \sqrt{-\frac{1}{\cos 2\phi}}$; ningún punto; $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{3\pi}{4}$

Capítulo 13 Repaso

1. $\langle 21,\ -25\rangle$ y $\langle -19,\ 31\rangle$ **3.** $\left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}},\ \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$

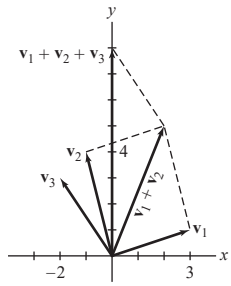
5. $\mathbf{i} = \frac{2}{11}\mathbf{v} + \frac{5}{11}\mathbf{w}$ **7.** $\overrightarrow{PQ} = \langle -4,\ 1\rangle$; $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{17}$

9. $\left\langle \frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \right\rangle$ **11.** $\beta = \frac{3}{2}$ **13.** $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{3},\ -\frac{11}{6},\ \frac{7}{6} \right\rangle$

15. $\mathbf{r}_1(t) = \langle 1 + 3t,\ 4 + t,\ 5 + 6t\rangle$; $\mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 3t,\ t,\ 6t\rangle$

17. $a = -2,\ b = 2$

19.



21. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -9$ **23.** $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \langle 10,\ -8,\ -7\rangle$

25. $V = 48$ **29.** $\frac{5}{3}$

31. $\|\mathbf{F}_1\| = \frac{2\|\mathbf{F}_2\|}{\sqrt{3}}$; $\|\mathbf{F}_1\| = 980$ N

33. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \langle -6,\ 7,\ -2\rangle$

35. -47 **37.** $5\sqrt{2}$ **41.** $\|\mathbf{e} - 4\mathbf{f}\| = \sqrt{13}$

47. $(x-0)+4(y-1)-3(z+1)=0$

49. $17x-21y-13z=-28$ **51.** $3x-2y=4$ **53.** Elipsoide

55. Paraboloide elíptico **57.** Cono elíptico

59. **(a)** Conjunto vacío **(b)** Hiperboloide de una hoja

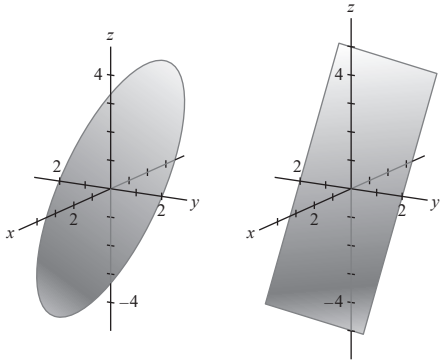
(c) Hiperboloide de dos hojas

61. $(r,\ \theta,\ z)=\left(5,\ \tan^{-1}\frac{4}{3},\ -1\right)$,

$(\rho,\ \theta,\ \phi)=\left(\sqrt{26},\ \tan^{-1}\frac{4}{3},\ \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{26}}\right)\right)$

63. $(r,\ \theta,\ z)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{3}{2}\right)$

65. $z=2x$



69. $A<-1$: Hiperboloide de una hoja

$A=-1$: Cilindro con el eje z como eje central

$A>-1$: Elipsoide

$A=0$: Esfera

Capítulo 14

Sección 14.1 Ejercicios preliminares

1. (c) **2.** La curva $z=e^x$

3. La proyección sobre el plano xz

4. El punto $(-2, 2, 3)$

5. Cuando t aumenta de 0 a 2π, un punto sobre $\operatorname{sen} t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}$ se mueve en el sentido de las agujas del reloj y un punto sobre $\cos t\mathbf{i}+\operatorname{sen} t\mathbf{j}$ se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

6. (a), (c) y (d)

Sección 14.1 Problemas

1. $D=\{t\in\mathbf{R},\ t\neq 0,\ t\neq -1\}$

3. $\mathbf{r}(2)=\left\langle 0,\ 4,\ \frac{1}{5}\right\rangle$; $\mathbf{r}(-1)=\left\langle -1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right\rangle$

5. $\mathbf{r}(t)=(3+3t)\mathbf{i}-5\mathbf{j}+(7+t)\mathbf{k}$

7. A ↔ ii, B ↔ i, C ↔ iii

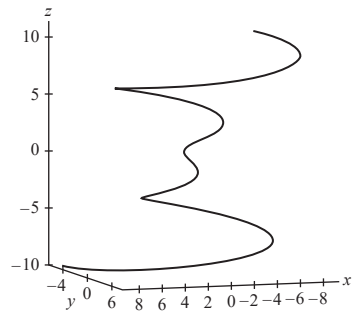
9. (a) = (v), (b) = (i), (c) = (ii), (d) = (vi), (e) = (iv), (f) = (iii)

11. C ↔ i, A ↔ ii, B ↔ iii

13. Radio 9, centro $(0,\ 0,\ 0)$, plano xy

15. Radio 1, centro $(0,\ 0,\ 4)$, plano xz

17. **(b)**



19. $(0,\ 1,\ 0),(0,\ -1,\ 0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$

21. $\mathbf{r}(t)=\left\langle 2t^2-7,\ t,\ \pm\sqrt{9-t^2}\right\rangle$, para $-3\le t\le 3$

23. **(a)** $\mathbf{r}(t)=\left\langle \pm t\sqrt{1-t^2},\ t^2,\ t\right\rangle$ para $-1\le t\le 1$

(b) La proyección es una circunferencia en el plano xy de radio $\frac{1}{2}$ y centrada en el punto del plano xy $(0,\ \frac{1}{2})$.

25. $\mathbf{r}(t)=\langle\cos t,\ \pm\operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} t\rangle$; la proyección de la curva sobre el plano xy queda descrita por $\langle\cos t,\ \pm\operatorname{sen} t,\ 0\rangle$, que es la circunferencia unitaria en este plano; la proyección de la curva sobre el plano xz queda descrita por $\langle\cos t,\ 0,\ \operatorname{sen} t\rangle$, que es la circunferencia unitaria en este plano; la proyección de la curva sobre el plano yz queda descrita por $\langle 0,\ \pm\operatorname{sen} t,\ \operatorname{sen} t\rangle$, que son los dos segmentos $z=y$ y $z=-y$ para $-1\le y\le 1$.

27. $\mathbf{r}(t)=\left\langle\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 4\cos t^2\right\rangle$, $0\le t\le 2\pi$

29. Contactan en el punto $(12,\ 4,\ 2)$ e intersecan en los puntos $(4,\ 0,\ -6)$ y $(12,\ 4,\ 2)$.

31. $\mathbf{r}(t)=\langle 3,\ 2,\ t\rangle$, $-\infty<t<+\infty$

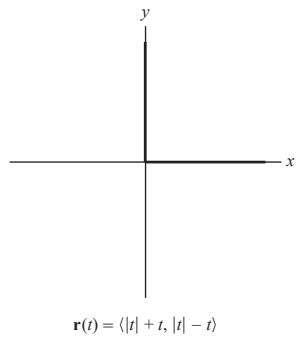
33. $\mathbf{r}(t)=\langle t,\ 3t,\ 15t\rangle$, $-\infty<t<+\infty$

35. $\mathbf{r}(t)=\langle 1,\ 2+2\cos t,\ 5+2\operatorname{sen} t\rangle$, $0\le t\le 2\pi$

37. $\mathbf{r}(t)=\left\langle\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t\right\rangle$, $0\le t\le 2\pi$

39. $\mathbf{r}(t)=\langle 3+2\cos t,\ 1,\ 5+3\operatorname{sen} t\rangle$, $0\le t\le 2\pi$

41.



$\mathbf{r}(t)=\langle |t|+t,\ |t|-t\rangle$

Sección 14.2 Ejercicios preliminares

1. $\frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{r}(t))=f(t)\mathbf{r}'(t)+f'(t)\mathbf{r}(t)$

$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t))=\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}'_2(t)+\mathbf{r}'_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t))=\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}'_2(t)+\mathbf{r}'_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)$

2. Verdadero **3.** Falso **4.** Verdadero **5.** Falso **6.** Falso

7. **(a)** Vector **(b)** Escalar **(c)** Vector

Sección 14.2 Problemas

1. $\lim_{t\to 3}\left\langle t^2,\ 4t,\ \frac{1}{t}\right\rangle = \left\langle 9,\ 12,\ \frac{1}{3}\right\rangle$

3. $\lim_{t\to 0}(e^{2t}\mathbf{i} + \ln(t+1)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

5. $\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h} = \left\langle -\frac{1}{t^2},\ \cos t,\ 0\right\rangle$

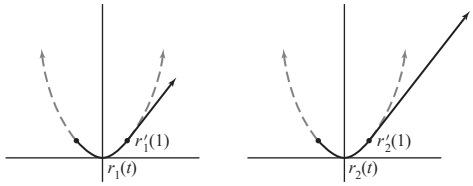
7. $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\langle 1,\ 2t,\ 3t^2\right\rangle$

9. $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left\langle 3e^{3s},\ -e^{-s},\ 4s^3\right\rangle$

11. $\mathbf{c}'(t) = -t^{-2}\mathbf{i} - 2e^{2t}\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}'(t) = \left\langle 1,\ 2t,\ 3t^2\right\rangle$, $\mathbf{r}''(t) = \langle 0,\ 2,\ 6t\rangle$

15.



17. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)) =$
$= 2t^3e^{2t} + 3t^2e^{3t} + 2te^{3t} + 3t^2e^{2t} + te^t + e^t$

19. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)) =$

$$\left\langle \begin{array}{l} 3t^2e^t - 2te^{2t} - e^{2t} + t^3e^t,\ \ e^{3t} + 3te^{3t} - t^2e^t - 2te^t, \\ 2te^{2t} + 2t^2e^{2t} - 3t^2e^{3t} - 3t^3e^{3t} \end{array}\right\rangle$$

21. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)) = 2t + 2e^t + 2te^t$

23. $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(g(t)) = \left\langle 2e^{2t},\ -e^t\right\rangle$

25. $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(g(t)) = \left\langle 4e^{4t+9},\ 8e^{8t+18},\ 0\right\rangle$

27. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{a}(t))|_{t=2} = 13$

29. $\ell(t) = \langle 4 - 4t,\ 16 - 32t\rangle$

31. $\ell(t) = \langle -3 - 4t,\ 10 + 5t,\ 16 + 24t\rangle$

33. $\ell(t) = \left\langle 2 - t,\ 0,\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t\right\rangle$

35. $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{r}') = \left\langle (t^2-2)e^t,\ -te^t,\ 2t\right\rangle$

39. $\left\langle \frac{212}{3},\ 124\right\rangle$ **41.** $\langle 0,\ 0\rangle$

43. $\left\langle 1,\ 2,\ -\frac{\operatorname{sen} 3}{3}\right\rangle$ **45.** $(\ln 4)\mathbf{i} + \frac{56}{3}\mathbf{j} - \frac{496}{5}\mathbf{k}$

47. $\mathbf{r}(t) = \left\langle -t^2 + t + 3,\ 2t^2 + 1\right\rangle$

49. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3\right)\mathbf{i} + \left(\frac{5t^2}{2}\right)\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}$; con condiciones iniciales,

$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + \left(\frac{5t^2}{2} + 1\right)\mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}$

51. $\mathbf{r}(t) = (8t^2)\mathbf{k} + \mathbf{c}_1t + \mathbf{c}_2$; con condiciones iniciales, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + (8t^2)\mathbf{k}$

53. $\mathbf{r}(t) = \left\langle 0,\ t^2,\ 0\right\rangle + \mathbf{c}_1t + \mathbf{c}_2$; con condiciones iniciales,

$\mathbf{r}(t) = \left\langle 1,\ t^2 - 6t + 10,\ t - 3\right\rangle$

55. $\mathbf{r}(3) = \left\langle \frac{45}{4},\ 5\right\rangle$

57. Únicamente en el instante $t = 3$ el piloto podrá alcanzar al objetivo situado en el origen.

59. $\mathbf{r}(t) = (t-1)\mathbf{v} + \mathbf{w}$ **61.** $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{c}$

Sección 14.3 Ejercicios preliminares

1. $2\mathbf{r}' = \langle 50,\ -70,\ 20\rangle$, $-\mathbf{r}' = \langle -25,\ 35,\ -10\rangle$

2. El enunciado (b) es verdadero.

3. **(a)** $L'(2) = 4$

(b) $L(t)$ es la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria, que suele ser diferente de la distancia al origen.

4. 6

Sección 14.3 Problemas

1. $L = 3\sqrt{61}$ **3.** $L = 15 + \ln 4$

5. $L = \pi\sqrt{4\pi^2 + 10} + 5\ln\frac{2\pi + \sqrt{4\pi^2+10}}{\sqrt{10}} \approx 29{,}3$

7. $s(t) = \frac{1}{27}\left((20 + 9t^2)^{3/2} - 20^{3/2}\right)$

9. $v(4) \approx 4{,}58$ **11.** $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ **13.** $\mathbf{r}' = \left\langle \frac{20}{\sqrt{17}},\ \frac{-5}{\sqrt{17}}\right\rangle$

15. **(c)** $L_1 \approx 132{,}0$, $L_2 \approx 125{,}7$; el primer muelle usa más alambre.

17. **(a)** $t = \pi$

19. **(a)** $s(t) = \sqrt{29}t$ **(b)** $t = \phi(s) = \frac{s}{\sqrt{29}}$

21. $\left\langle 1 + \frac{3s}{\sqrt{50}},\ 2 + \frac{4s}{\sqrt{50}},\ 3 + \frac{5s}{\sqrt{50}}\right\rangle$

23. $\mathbf{r}_1(s) = \langle 2 + 4\cos(2s),\ 10,\ -3 + 4\operatorname{sen}(2s)\rangle$

25. $\mathbf{r}_1(s) = \left\langle \frac{1}{9}(27s+8)^{2/3} - \frac{4}{9},\ \pm\frac{1}{27}\left((27s+8)^{2/3} - 4\right)^{3/2}\right\rangle$

27. $\left\langle \frac{s}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{sm}{\sqrt{1+m^2}}\right\rangle$

29. **(a)** $\sqrt{17}e^t$ **(b)** $\frac{s}{\sqrt{17}}\left\langle \cos\left(4\ln\frac{s}{\sqrt{17}}\right),\ \operatorname{sen}\left(4\ln\frac{s}{\sqrt{17}}\right)\right\rangle$

31. $L = \int_{-\infty}^{\infty}\|\mathbf{r}'(t)\| = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = 2\pi$

Sección 14.4 Ejercicios preliminares

1. $\left\langle \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right\rangle$ **2.** $\frac{1}{4}$

3. La curvatura de una circunferencia de radio 2 **4.** Curvatura cero

5. $\kappa = \sqrt{14}$ **6.** 4 **7.** $\frac{1}{9}$

Sección 14.4 Problemas

1. $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{64t^2 + 81}$, $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{64t^2+81}}\langle 8t,\ 9\rangle$,

$\mathbf{T}(1) = \left\langle \frac{8}{\sqrt{145}},\ \frac{9}{\sqrt{145}}\right\rangle$

3. $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{122}$, $\mathbf{T}(t) = \left\langle \frac{4}{\sqrt{122}},\ -\frac{5}{\sqrt{122}},\ \frac{9}{\sqrt{122}}\right\rangle$, $\mathbf{T}(1) = \mathbf{T}(t)$

5. $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\pi^2 + 1}$,

$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}\langle -\pi\operatorname{sen}\pi t,\ \pi\cos\pi t,\ 1\rangle$,

$\mathbf{T}(1) = \left\langle 0,\ -\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+1}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi^2+1}}\right\rangle$

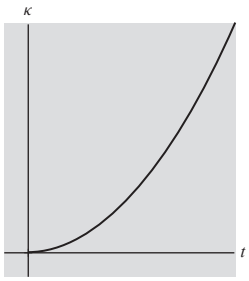
7. $\kappa(t) = \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$ **9.** $\kappa(t) = 0$ **11.** $\kappa = \frac{2\sqrt{74}}{27}$

13. $\kappa = \frac{\sqrt{\pi^2+5}}{(\pi^2+1)^{3/2}} \approx 0{,}108$ **15.** $\kappa(3) \approx 0{,}0025$

17. $\kappa(2) \approx 0{,}0015$ **19.** $\kappa\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 4{,}54$, $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}2$

23. $\alpha = \pm\sqrt{2}$ **29.** $\kappa(2) \approx 0{,}012$ **31.** $\kappa(\pi) \approx 1{,}11$

35. $\kappa(t) = t^2$



37. $\mathbf{N}(t) = \langle 0,\ -\operatorname{sen} 2t,\ -\cos 2t\rangle$

39. $\mathbf{T}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},\ -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right\rangle$, $\mathbf{T}'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right\rangle$

41. $\mathbf{N}\left(\pi^{1/3}\right) = \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ **43.** $\mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -3,\ 2\rangle$

45. $\mathbf{N}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0,\ 1,\ -1\rangle$ **47.** $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{6}\left\langle -\sqrt{6},\ 2\sqrt{6},\ -\sqrt{6}\right\rangle$

51. $\langle \cos t,\ \operatorname{sen} t\rangle$, es decir, la propia circunferencia unitaria.

53. $\mathbf{c}(t) = \left\langle -4,\ -\frac{7}{2}\right\rangle + \frac{5^{3/2}}{2}\langle \cos t,\ \operatorname{sen} t\rangle$

55. $\mathbf{c}(t) = \langle \pi,\ -2\rangle + 4\langle \cos t,\ \operatorname{sen} t\rangle$

57. $\mathbf{c}(t) = \left\langle -1 - 2\cos t,\ \frac{2\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}},\ \frac{2\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right\rangle$

65. $\kappa(\theta) = 1$ **67.** $\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\theta}$

Sección 14.5 Ejercicios preliminares

1. No, pues la partícula podría cambiar su dirección. **2.** $\mathbf{a}(t)$

3. El enunciado (a), sus vectores velocidad apuntan en la misma dirección.

4. El vector velocidad siempre apunta en la dirección y sentido de movimiento. Como el vector $\mathbf{N}(t)$ es ortogonal a la dirección de movimiento, los vectores $\mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son ortogonales.

5. La descripción (b), paralelos **6.** $\|\mathbf{a}(t)\| = 8$ cm/s^2 **7.** $a_{\mathbf{N}}$

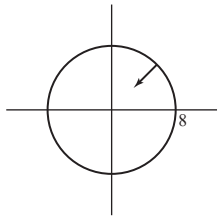
Sección 14.5 Problemas

1. $h = -0{,}2$: $\langle -0{,}085,\ 1{,}91,\ 2{,}635\rangle$
$h = -0{,}1$: $\langle -0{,}19,\ 2{,}07,\ 2{,}97\rangle$
$h = 0{,}1$: $\langle -0{,}41,\ 2{,}37,\ 4{,}08\rangle$
$h = 0{,}2$: $\langle -0{,}525,\ 2{,}505,\ 5{,}075\rangle$
$\mathbf{v}(1) \approx \langle -0{,}3,\ 2{,}2,\ 3{,}5\rangle$, $v(1) \approx 4{,}1$

3. $\mathbf{v}(1) = \langle 3,\ -1,\ 8\rangle$, $\mathbf{a}(1) = \langle 6,\ 0,\ 8\rangle$, $v(1) = \sqrt{74}$

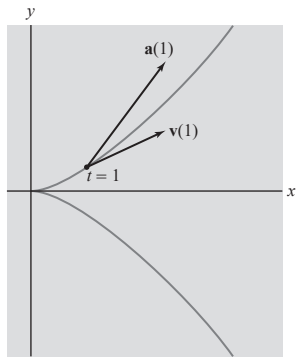
5. $\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle \frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right\rangle$, $\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 9\right\rangle$, $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

7. $\mathbf{a}(t) = -2\left\langle \cos\frac{t}{2},\ \operatorname{sen}\frac{t}{2}\right\rangle$; $\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx \langle -1{,}85,\ -{,}077\rangle$



$R(t) = 8\left\langle \cos\frac{t}{2}, \operatorname{sen}\frac{t}{2}\right\rangle$

9.



$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$

11. $\mathbf{v}(t) = \left\langle \frac{3t^2+2}{6},\ 4t - 2\right\rangle$ **13.** $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{k}$

15. $\mathbf{v}(t) = \left\langle \frac{t^2}{2} + 3,\ 4t - 2\right\rangle$, $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{t^3}{6} + 3t,\ 2t^2 - 2t\right\rangle$

17. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{t^3}{6}\mathbf{k}$

19. $v_0 = \sqrt{5292} \approx 72{,}746$ m/s **23.** $H = 355$ m

25. $\mathbf{r}(10) = \langle 45,\ -20\rangle$

27. **(a)** En su posición original **(b)** No

29. La celeridad es decreciente.

31. $a_{\mathbf{T}} = 0$, $a_{\mathbf{N}} = 1$ **33.** $a_{\mathbf{T}} = \frac{7}{\sqrt{6}}$, $a_{\mathbf{N}} = \sqrt{\frac{53}{6}}$

35. $\mathbf{a}(-1) = -\frac{2}{\sqrt{10}}\mathbf{T} + \frac{6}{\sqrt{10}}\mathbf{N}$ con $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 1,\ -3\rangle$ y $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle -3,\ -1\rangle$

37. $a_{\mathbf{T}}(4) = 4$, $a_{\mathbf{N}}(4) = 1$, por lo que $\mathbf{a} = 4\mathbf{T} + \mathbf{N}$, con $\mathbf{T} = \left\langle \frac{1}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{9}\right\rangle$ y $\mathbf{N} = \left\langle -\frac{4}{9},\ -\frac{7}{9},\ \frac{4}{9}\right\rangle$

39. $\mathbf{a}(0) = \sqrt{3}\mathbf{T} + \sqrt{2}\mathbf{N}$, con $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,\ 1,\ 1\rangle$ y $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1,\ 0,\ 1\rangle$

41. $\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\mathbf{T} + \frac{\pi}{\sqrt{6}}\mathbf{N}$, con $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1,\ -1,\ 1\rangle$
y $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 1,\ -1,\ -2\rangle$

43. $a_{\mathbf{T}} = 0$, $a_{\mathbf{N}} = 0{,}25$ cm/s^2

45. La aceleración tangencial es $\frac{50}{\sqrt{2}} \approx 35{,}36$ m/min^2,
$v = \sqrt{35{,}36(30)} \approx 32{,}56$ m/min

47. $\|\mathbf{a}\| = 1{,}157 \times 10^5$ km/h^2

49. $\mathbf{a} = \left\langle -\frac{1}{6},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\rangle$

51. (A) desacelerando, (B) acelerando, (C) desacelerando

57. Pasados 139,91 s el coche empieza a patinar.

59. $R \approx 105$ m

Sección 14.6 Ejercicios preliminares

1. $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\|\mathbf{J}\|$

3. El periodo se ha multiplicado por ocho.

Sección 14.6 Problemas

1. Los datos corroboran la predicción de Kepler;
$T \approx \sqrt{a^3 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \approx 11{,}9$ años **3.** $M \approx 1{,}897 \times 10^{27}$ kg

5. $M \approx 2{,}6225 \times 10^{41}$ kg **11.** $\{(x,\ y,\ z)\ :\ 2x - y = 0\}$

Capítulo 14 Repaso

1. (a) $-1 < t < 0$ o $0 < t \leq 1$ (b) $0 < t \leq 2$

3. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2,\ t,\ \sqrt[3]{3 - t^4} \right\rangle,\ -\infty < t < +\infty$

5. $\mathbf{r}'(t) = \left\langle -1,\ -2t^{-3},\ \frac{1}{t} \right\rangle$ **7.** $\mathbf{r}'(0) = \langle 2,\ 0,\ 6 \rangle$

9. $\frac{d}{dt} e^t \left\langle 1,\ t,\ t^2 \right\rangle = e^t \left\langle 1,\ 1 + t,\ 2t + t^2 \right\rangle$

11. $\frac{d}{dt} (6\mathbf{r}_1(t) - 4\mathbf{r}_2(t))|_{t=3} = \langle 0,\ -8,\ -10 \rangle$

13. $\frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))|_{t=3} = 2$

15. $\int_0^3 \left\langle 4t + 3,\ t^2,\ -4t^3 \right\rangle\ dt = \langle 27,\ 9,\ -81 \rangle$

17. $\left(3,\ 3,\ \frac{16}{3}\right)$ **19.** $\mathbf{r}(t) = \left\langle 2t^2 - \frac{8}{3}t^3 + t,\ t^4 - \frac{1}{6}t^3 + 1 \right\rangle$

21. $L = 2\sqrt{13}$ **23.** $\left\langle 5 \cos \frac{2\pi s}{5\sqrt{1+4\pi^2}},\ 5 \operatorname{sen} \frac{2\pi s}{5\sqrt{1+4\pi^2}},\ \frac{s}{\sqrt{1+4\pi^2}} \right\rangle$

25. $v_0 \approx 67{,}279$ m/s **27.** $(0,\ -1,\ -2)$

29. $\mathbf{T}(\pi) = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \right\rangle$ **31.** $\kappa(1) = \frac{1}{2^{3/2}}$

33. $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{T} + 4\mathbf{N}$, donde $\mathbf{T} = \langle -1,\ 0 \rangle$ y $\mathbf{N} = \langle 0,\ -1 \rangle$

35. $\kappa = \frac{13}{16}$ **37.** $\mathbf{c}(t) = \left\langle -\frac{9}{2},\ 36 \right\rangle + \frac{17^{3/2}}{2} \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t \rangle$

Capítulo 15

Sección 15.1 Ejercicios preliminares

1. Misma forma, pero situados en planos paralelos.

2. La parábola $z = x^2$ en el plano xz. **3.** No es posible.

4. Las rectas verticales $x = c$ con una distancia de 1 unidad entre rectas adyacentes.

5. En el mapa de contorno de $g(x,\ y) = 2x$, la unidad entre rectas adyacentes verticales es $\frac{1}{2}$.

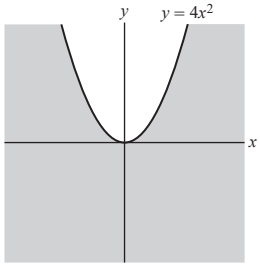
Sección 15.1 Problemas

1. $f(2,\ 2) = 18, f(-1,\ 4) = -5$

3. $h(3,\ 8,\ 2) = 6$; $h(3,\ -2,\ -6) = -\frac{1}{6}$

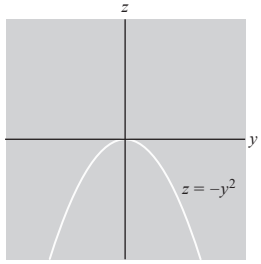
5. El dominio es la totalidad del plano xy.

7.



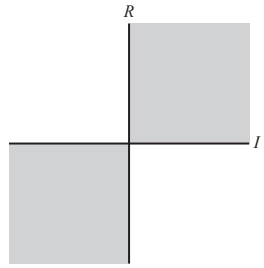
9.

$\mathcal{D} = \left\{(y,z) : z \neq -y^2\right\}$



$z + y^2 \neq 0$

11.



$IR \geq 0$

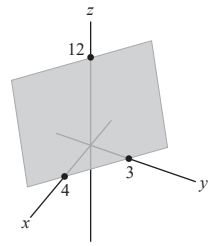
13. Dominio: todo el espacio $(x,\ y,\ z)$; rango: la totalidad de la recta real

15. Dominio: $\{(r,\ s,\ t) : |rst| \leq 4\}$; rango: $\{w : 0 \leq w \leq 4\}$

17. $f \leftrightarrow$ (B), $g \leftrightarrow$ (A)

19. **(a)** D **(b)** C **(c)** E **(d)** B **(e)** A **(f)** F

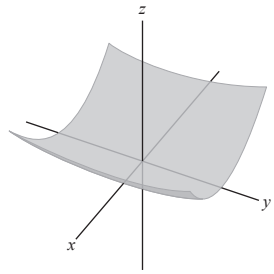
21.



Traza horizontal: $3x + 4y = 12 - c$ en el plano $z = c$

Traza vertical: $z = (12 - 3a) - 4y$ y $z = -3x + (12 - 4a)$ en los planos $x = a$ e $y = a$, respectivamente

23.

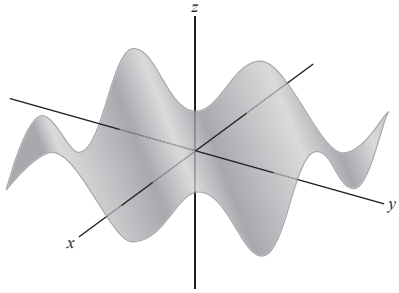


Las trazas horizontales son elipses, para $c > 0$.

La traza vertical en el plano $x = a$ es la parábola $z = a^2 + 4y^2$.

La traza vertical en el plano $y = a$ es la parábola $z = x^2 + 4a^2$.

25.

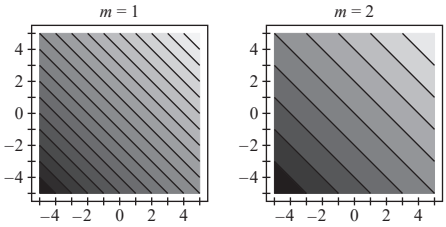


Las trazas horizontales en el plano $z = c$, $|c| \leq 1$, son las rectas $x - y = \operatorname{sen}^{-1} c + 2k\pi$ y $x - y = \pi - \operatorname{sen}^{-1} c + 2k\pi$, para k entero.

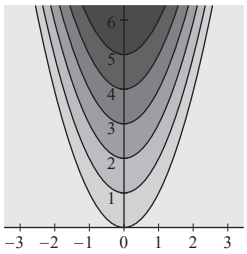
La traza vertical en el plano $x = a$ es $z = \operatorname{sen}(a - y)$.

La traza vertical en el plano $y = a$ es $z = \operatorname{sen}(x - a)$.

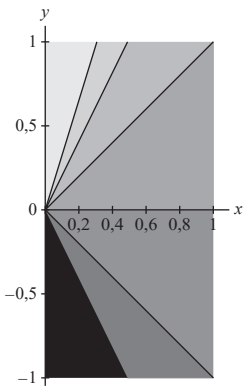
27. $m = 1 : m = 2 :$



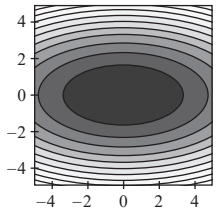
29.



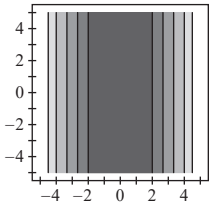
31.



33.



35.



37. $m = 6 : \ f(x, y) = 2x + 6y + 6$
$m = 3 : \ f(x, y) = x + 3y + 3$

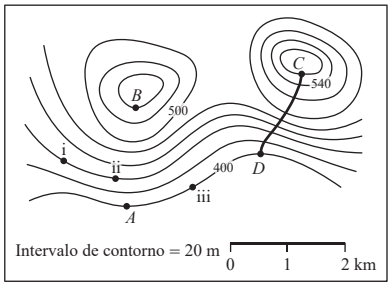
39. **(a)** Sólo en (A) **(b)** Sólo en (C) **(c)** Oeste

41. Tasa media de variación de B a $C = 0{,}000625$ kg/m^3 · ppt

43. En el punto A

45. Tasa media de variación de A a $B \approx 0{,}0737$, tasa media de variación de A a $C \approx 0{,}0457$

47.



49. $f(r, \theta) = \cos\theta$; las curvas de nivel son
$\theta = \pm\cos^{-1}(c)$ para $|c| < 1, \quad c \neq 0$;
el eje y para $c = 0$;
el eje de las x positivas para $c = 1$;
el eje de las x negativas para $c = -1$.

Sección 15.2 Ejercicios preliminares

1. $D^*(p, r)$ está formado por todos los puntos en $D(p, r)$ diferentes del propio punto p.

2. $f(2, 3) = 27$

3. Los tres enunciados son verdaderos

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe.

Sección 15.2 Problemas

1. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + y) = 3$

3. $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} (xy - 3x^2y^3) = 10$

5. $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},0)} \tan x \cos y = 1$

7. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x^2} - e^{-y^2}}{x+y} = \frac{1}{2}(e - e^{-1})$

9. $\lim_{(x,y)\to(2,5)} (g(x, y) - 2f(x, y)) = 1$

11. $\lim_{(x,y)\to(2,5)} e^{f(x,y)^2 - g(x,y)} = e^2$

13. No; el límite sobre el eje x y el límite sobre el eje y son diferentes.

17. $\lim_{(x,y)\to(4,0)} (x^2 - 16)\cos\left(\frac{1}{(x-4)^2 + y^2}\right) = 0$

19. $\lim_{(z,w)\to(-2,1)} \frac{z^4 \cos(\pi w)}{e^{z+w}} = -16e$

21. $\lim_{(x,y)\to(4,2)} \frac{y-2}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$

23. $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{5}$

25. $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} e^{x-y} \ln(x - y) = e^4 \ln(4)$

27. $\lim_{(x,y)\to(-3,-2)} (x^2y^3 + 4xy) = -48$

29. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tan(x^2 + y^2)\tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$

31. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2$

35. $\lim_{(x,y)\to Q} g(x, y) = 4$

37. Sí **41.** **(b)** $f(10^{-1}, 10^{-2}) = \frac{1}{2}$, $f(10^{-5}, 10^{-10}) = \frac{1}{2}$, $f(10^{-20}, 10^{-40}) = \frac{1}{2}$

Sección 15.3 Ejercicios preliminares

1. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = 2xy^2$

2. En este caso, se puede utilizar la regla del múltiplo constante. En la segunda parte, como y aparece tanto en el numerador como en el denominador, es preferible la regla del cociente.

3. (a), (c) **4.** $f_x = 0$ **5.** (a), (d)

Sección 15.3 Problemas

3. $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{z+y} = \frac{x}{(x+y)^2}$ **5.** $f_z(2,\ 3,\ 1) = 6$

7. $m = 10$ **9.** $f_x(A) \approx 8, f_y(A) \approx -16{,}7$ **11.** NW

13. $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x, \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y$

15. $\frac{\partial}{\partial x}(x^4y + xy^{-2}) = 4x^3y + y^{-2}$,

$\frac{\partial}{\partial y}(x^4y + xy^{-2}) = x^4 - 2xy^{-3}$

17. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2}$

19. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{9 - x^2 - y^2}\right) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{9 - x^2 - y^2}\right) = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

21. $\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) = \operatorname{sen} y \cos x, \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) = \operatorname{sen} x \cos y$

23. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\tan\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\tan\frac{x}{y}\right) = \frac{-x}{y^2\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)}$

25. $\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2 + y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2 + y^2) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

27. $\frac{\partial}{\partial r}e^{r+s} = e^{r+s}, \frac{\partial}{\partial s}e^{r+s} = e^{r+s}$

29. $\frac{\partial}{\partial x}e^{xy} = ye^{xy}, \frac{\partial}{\partial y}e^{xy} = xe^{xy}$

31. $\frac{\partial z}{\partial y} = -2xe^{-x^2-y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}$

33. $\frac{\partial U}{\partial t} = -e^{-rt}, \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{-e^{-rt}(rt+1)}{r^2}$

35. $\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{senh}(x^2y) = 2xy\cosh(x^2y), \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{senh}(x^2y) = x^2\cosh(x^2y)$

37. $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2z^3, \frac{\partial w}{\partial y} = 2xz^3y, \frac{\partial w}{\partial z} = 3xy^2z^2$

39. $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{M - Lt}{M^2}e^{-Lt/M}$,

$\frac{\partial Q}{\partial M} = \frac{L(Lt - M)}{M^3}e^{-Lt/M}, \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{L^2}{M^2}e^{-Lt/M}$

41. $f_x(1,\ 2) = -164$ **43.** $g_u(1,\ 2) = \ln 3 + \frac{1}{3}$

45. $N = 2865{,}058, \Delta N \approx -217{,}74$

47. **(a)** $I(95,\ 50) \approx 73{,}1913$ **(b)** $\frac{\partial I}{\partial T}$; 1,66

49. Un incremento de 1 cm en r.

51. $\frac{\partial W}{\partial E} = -\frac{1}{kT}e^{-E/kT}, \frac{\partial W}{\partial T} = \frac{E}{kT^2}e^{-E/kT}$

55. (a), (b) **57.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -72xy^2$

59. $h_{vv} = \frac{32u}{(u + 4v)^3}$ **61.** $f_{yy}(2,\ 3) = -\frac{4}{9}$

63. $f_{xyxzy} = 0$ **65.** $f_{uuv} = 2v\operatorname{sen}(u + v^2)$

67. $F_{rst} = 0$ **69.** $F_{uu\theta} = \cosh(uv + \theta^2) \cdot 2\theta v^2$

71. $g_{xyz} = \frac{3xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$ **73.** $f(x,\ y) = x^2y$

77. $B = A^2$

Sección 15.4 Ejercicios preliminares

1. $L(x,\ y) = f(a,\ b) + f_x(a,\ b)(x - a) + f_y(a,\ b)(y - b)$

2. $f(x,\ y) - L(x,\ y) = \epsilon\ (x,\ y)\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$

3. (b) **4.** $f(2,\ 3,\ 1) \approx 8{,}7$ **5.** $\Delta f \approx -0{,}1$

6. El criterio para diferenciabilidad

Sección 15.4 Problemas

1. $z = -34 - 20x + 16y$ **3.** $z = 5x + 10y - 14$

5. $z = 8x - 2y - 13$ **7.** $z = 4r - 5s + 2$

9. $z = \left(\frac{4}{5} + \frac{12}{25}\ln 2\right) - \frac{12}{25}x + \frac{12}{25}y$ **11.** $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{8}\right)$

13. **(a)** $f(x,\ y) = -16 + 4x + 12y$

(b) $f(2{,}01,\ 1{,}02) \approx 4{,}28$; $f(1{,}97,\ 1{,}01) \approx 4$

15. $\Delta f \approx 3{,}56$ **17.** $f(0{,}01,\ -0{,}02) \approx 0{,}98$

19. $L(x,\ y,\ z) = -8{,}66025 + 0{,}721688x + 0{,}721688y + 3{,}4641z$

21. 5,07 **23.** 8,44 **25.** 4,998 **27.** 3,945

29. $z = 3x - 3y + 13$ **31.** $\Delta I \approx 0{,}5644$

33. **(b)** $\Delta H \approx 0{,}022\text{m}$ **3 5 .** **(b)** 6 % **(c)** Un 1 % de error en r

37. **(a)** 7,10 $ **(b)** 28,85 $, 57,69 $ **(c)** −74,24 $

39. El error máximo en V es del orden de 8,948 m.

Sección 15.5 Ejercicios preliminares

1. (b) $\langle 3,\ 4\rangle$

2. Falso

3. ∇f apunta en la dirección de máxima tasa de crecimiento de f y es normal a las curvas de nivel de f.

4. **(b)** NW y **(c)** SE

5. $3\sqrt{2}$

Sección 15.5 Problemas

1. (a) $\nabla f = \left\langle y^2,\ 2xy\right\rangle, \mathbf{c}'(t) = \left\langle t,\ 3t^2\right\rangle$

(b) $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=1} = 4$; $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=-1} = -4$

3. A: cero, B: negativa, C: positiva, D: cero

5. $\nabla f = -\operatorname{sen}(x^2 + y)\langle 2x,\ 1\rangle$

7. $\nabla h = \left\langle yz^{-3},\ xz^{-3},\ -3xyz^{-4}\right\rangle$

9. $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=0} = -7$ **11.** $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=0} = -3$

13. $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=0} = 5\cos\ 1 \approx 2{,}702$

15. $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=4} = -56$

17. $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=\pi/4} = -1 + \frac{\pi}{8} \approx 1{,}546$

19. $\frac{d}{dt}(g(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=1} = 0$

21. $D_{\mathbf{u}}f(1,\ 2) = 8{,}8$ **23.** $D_{\mathbf{u}}f\left(\frac{1}{6},\ 3\right) = \frac{39}{4\sqrt{2}}$

25. $D_{\mathbf{u}}f(3,\ 4) = \frac{7\sqrt{2}}{290}$ **27.** $D_{\mathbf{u}}f(1,\ 0) = \frac{6}{\sqrt{13}}$

29. $D_{\mathbf{u}}f(1,\ 2,\ 0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **31.** $D_{\mathbf{u}}f(3,\ 2) = \frac{-50}{\sqrt{13}}$

33. $D_{\mathbf{u}}f(P) = -\frac{e^5}{3} \approx -49{,}47$

35. f es creciente en P en la dirección de v.

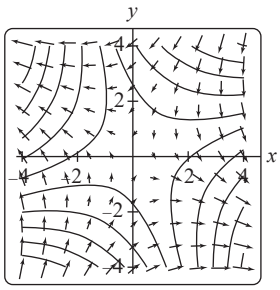
37. $D_{\mathbf{u}}f(P) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ **39.** $\langle 6,\ 2,\ -4\rangle$

41. $\left(\frac{4}{\sqrt{17}},\ \frac{9}{\sqrt{17}},\ -\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$ y $\left(-\frac{4}{\sqrt{17}},\ -\frac{9}{\sqrt{17}},\ \frac{2}{\sqrt{17}}\right)$

43. $9x + 10y + 5z = 33$

45. $0{,}5217x + 0{,}7826y - 1{,}2375z = -5{,}309$

47.



49. $f(x, y, z) = x^2 + y + 2z$

51. $f(x, y, z) = xz + y^2$ **55.** $\Delta f \approx 0{,}08$

57. **(a)** $\langle 34, 18, 0 \rangle$

(b) $\left\langle 2 + \frac{32}{\sqrt{21}}t,\ 2 + \frac{16}{\sqrt{21}}t,\ 8 - \frac{8}{\sqrt{21}}t \right\rangle$; $\approx 4{,}58$ s

61. $x = 1 - 4t,\ y = 2 + 26t,\ z = 1 - 25t$

73. $y = \sqrt{1 - \ln(\cos^2 x)}$

Sección 15.6 Ejercicios preliminares

1. **(a)** $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ quad **(b)** u y v

2. (a) **3.** $f(u, v)|_{(r,s)=(1,1)} = e^2$ **4.** (b)

5. (c) **6.** No

Sección 15.6 Problemas

1. **(a)** $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z^3$

(b) $\frac{\partial x}{\partial s} = 2s,\ \frac{\partial y}{\partial s} = 2t^2,\ \frac{\partial z}{\partial s} = 2st$

(c) $\frac{\partial f}{\partial s} = 7s^6t^6 + 8s^7t^4$

3. $\frac{\partial f}{\partial s} = 6rs^2,\ \frac{\partial f}{\partial r} = 2s^3 + 4r^3$

5. $\frac{\partial g}{\partial u} = -10\,\text{sen}(10u - 20v),\ \frac{\partial g}{\partial v} = 20\,\text{sen}(10u - 20v)$

7. $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^{x^2+xy}$ **9.** $\frac{\partial h}{\partial t_2} = 0$

11. $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u,v)=(-1,-1)} = 1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u,v)=(-1,-1)} = -2$

13. $\left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(r,\theta)=(2\sqrt{2},\ \pi/4)} = \frac{1}{6}$ **15.** $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u,v)=(0,1)} = 2\cos 2$

17. **(b)** $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{19}{2\sqrt{7}}$

23. **(a)** $F_x = z^2 + y,\ F_y = 2yz + x,\ F_z = 2xz + y^2$

(b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^2 + y}{2xz + y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz + x}{2xz + y^2}$

25. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy + z^2}{2xz + y^2}$ **27.** $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^{xy} + 1}{x\cos(xz)}$

29. $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{-y(w^2 + x^2)^2}{w\left((w^2 + y^2)^2 + (w^2 + x^2)^2\right)}$; at (1, 1, 1), $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2}$

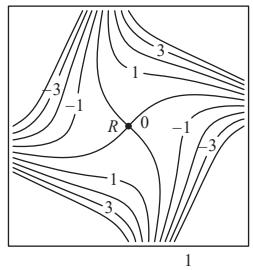
33. $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$ **35.** (c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x - 6}{z + 4}$

37. $\frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{nR}{V - nb},\ \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{nbV^3 - V^4}{PV^3 + 2an^3b - an^2V}$

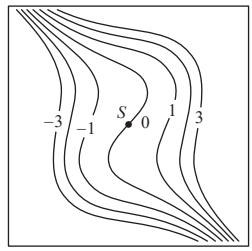
Sección 15.7 Ejercicios preliminares

1. f tiene un mínimo local (y global) en (0, 0); g tiene un punto de silla en (0, 0).

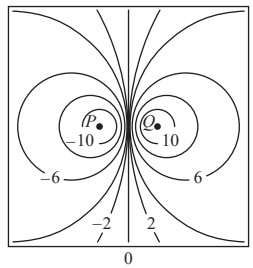
2.



El punto R es un punto de silla.



El punto S no es ni un extremo local ni un punto de silla.



El punto P es un mínimo local y el punto Q es un máximo local.

3. El enunciado (a)

Sección 15.7 Problemas

1. **(b)** $P_1 = (0, 0)$ es un punto de silla, $P_2 = \left(2\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$ y $P_3 = \left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ son mínimos locales; el valor mínimo absoluto de f es -4.

3. (0, 0) punto de silla, $\left(\frac{13}{64}, -\frac{13}{32}\right)$ y $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ mínimos locales

5. **(c)** (0, 0), (1, 0) y (0, −1) puntos de silla, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ mínimo local.

7. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ mínimo local

9. (−2, −1) máximo local, $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}\right)$ punto de silla

11. $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$ puntos de silla, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ máximo local, $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ mínimo local

13. (0, 0) punto de silla, (1, 1) y (−1, −1) mínimos locales

15. (0, 0) punto de silla, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ máximos locales, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mínimos locales

17. Los puntos críticos son $\left(j\pi,\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, donde

j, k par: puntos de silla

j, k impar: máximos locales

j par, k impar: mínimos locales

j impar, k par: puntos de silla

19. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ máximo local **21.** $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ punto de silla

23. $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{17}{18}\right)$ mínimo local

27. $x = y = 0{,}27788$ mínimo local

29. Máximo global 2, mínimo global 0

31. Máximo global 1, mínimo global $\frac{1}{35}$ **35.** Valor máximo $\frac{1}{3}$

37. Mínimo global $f(0,\ 1) = -2$, máximo global $f(1,\ 0) = 1$

39. Máximo global 3, mínimo global 0

41. Mínimo global $f(1,\ 1) = -1$, máximo global $f(1,\ 0) = f(0,\ 1) = 1$

43. Mínimo global $f(1,\ 0) = f(-1,\ 0) = -0{,}368$, máximo global $f(0,\ -1) = f(0,\ 1) = 1{,}472$

45. Volumen máximo $\frac{3}{4}$

49. **(a)** No. En la caja B con área minimal, z es es menor que $\sqrt[3]{V}$, el lado de un cubo de volumen V.

(b) Amplitud: $x = (2V)^{1/3}$; longitud: $y = (2V)^{1/3}$;

altura: $z = \left(\frac{V}{4}\right)^{1/3}$

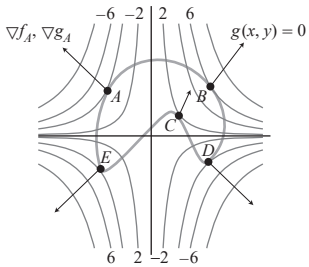
51. $f(x) = 1{,}9629x - 1{,}5519$

Sección 15.8 Ejercicios preliminares

1. El enunciado (b)

2. f tenía un máximo local 2, bajo la restricción, en A; $f(B)$ no es ni un mínimo local ni un máximo local de f.

3. **(a)**



Mapa de contorno de $f(x, y)$
(intervalo de contorno 2)

(b) Mínimo global −4, máximo global 6.

Sección 15.8 Problemas

1. **(c)** Puntos críticos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$

(d) Máximo 10, mínimo −10

3. Máximo $4\sqrt{2}$, mínimo $-4\sqrt{2}$

5. Mínimo $\frac{36}{13}$, hay valor máximo

7. Máximo $\frac{8}{3}$, mínimo $-\frac{8}{3}$

9. Máximo $\sqrt{2}$, mínimo 1

11. Máximo 3,7, mínimo −3,7

13. No hay valores máximo ni mínimo

15. $(-1,\ e^{-1})$

17. **(a)** $h = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}\pi}} \approx 0{,}6, r = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}\pi}} \approx 0{,}43$ **(b)** $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$

(c) No existe ningún cono de volumen 1 y área máxima.

19. $(8,\ -2)$ **21.** $\left(\frac{48}{97}, \frac{108}{97}\right)$ **23.** $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$ **25.** $\sqrt{\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}}$

31. $r = 3,\ h = 6$ **33.** $x + y + z = 3$

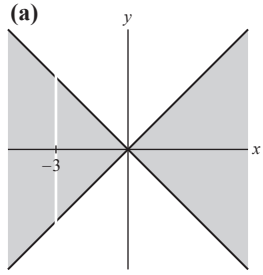
39. $\left(\frac{-6}{\sqrt{105}}, \frac{-3}{\sqrt{105}}, \frac{30}{\sqrt{105}}\right)$ **41.** $(-1,\ 0,\ 2)$

43. Mínimo $\frac{138}{11} \approx 12{,}545$, no hay valor máximo

47. (b) $\lambda = \frac{c}{2p_1p_2}$

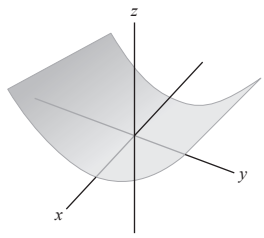
Capítulo 15 Repaso

1. **(a)**



(b) $f(3,\ 1) = \frac{\sqrt{2}}{3},\ f(-5,\ -3) = -2$ **(c)** $\left(-\frac{5}{3},\ 1\right)$

3.



Trazas vertical y horizontal: la recta $z = (c^2 + 1) - y$ en el plano $x = c$, la parábola $z = x^2 - c + 1$ en el plano $y = c$.

5. **(a)** Gráfica (B) **(b)** Gráfica (C)

(c) Gráfica (D) **(d)** Gráfica (A)

7. **(a)** Rectas paralelas $4x - y = \ln c,\ c > 0$, en el plano xy

(b) Rectas paralelas $4x - y = e^c$ en el plano xy

(c) Hipérbolas $3x^2 - 4y^2 = c$ en el plano xy

(d) Parábolas $x = c - y^2$ en el plano xy

9. $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} (xy + y^2) = 6$ **11.** El límite no existe.

13. $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} (2x + y)e^{-x+y} = -e^{-4}$ **17.** $f_x = 2,\ f_y = 2y$

19. $f_x = e^{-x-y}(y\cos(xy) - \operatorname{sen}(xy))$
$f_y = e^{-x-y}(x\cos(yx) - \operatorname{sen}(yx))$

21. $f_{xxyz} = -\cos(x + z)$ **23.** $z = 33x + 8y - 42$

25. Estimación, 12,146; valor obtenido con una calculadora, con tres decimales de precisión, 11,996.

27. Los enunciados (ii) y (iv) son verdaderos.

29. $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=2} = 3 + 4e^4 \approx 221{,}4$

31. $\frac{d}{dt}(f(\mathbf{c}(t)))\big|_{t=1} = 4e - e^{3e} \approx -3469{,}3$

33. $D_{\mathbf{u}} f(3,\ -1) = -\frac{54}{\sqrt{5}}$

35. $D_{\mathbf{u}} f(P) = -\frac{\sqrt{2}e}{5}$ **37.** $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle$

41. $\frac{\partial f}{\partial s} = 3s^2t + 4st^2 + t^3 - 2st^3 + 6s^2t^2$

$\frac{\partial f}{\partial t} = 4s^2t + 3st^2 + s^3 + 4s^3t - 3s^2t^2$

45. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^z - 1}{xe^z + e^y}$

47. $(0, 0)$ punto de silla, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ mínimos locales

49. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ punto de silla

53. Máximo global $f(2, 4) = 10$, mínimo global $f(-2, 4) = -18$

55. Máximo $\frac{26}{\sqrt{13}}$, mínimo $-\frac{26}{\sqrt{13}}$

57. Máximo $\frac{12}{\sqrt{3}}$, mínimo $-\frac{12}{\sqrt{3}}$

59. $f(0{,}8,\ 0{,}52,\ -0{,}32) = 0{,}88$ y $f(-0{,}13,\ 0{,}15,\ 0{,}99) = 3{,}14$

61. $r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$, $h = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$

Capítulo 16

Sección 16.1 Ejercicios preliminares

1. $\Delta A = 1$, el número de subrectángulos es 32.

2. $\iint_R f\, dA \approx S_{1,1} = 0{,}16$

3. $\iint_R 5\, dA = 50$

4. El volumen con signo entre la gráfica de $z = f(x, y)$ y el plano xy. La región por debajo del plano xy se trata como volumen negativo.

5. (b) **6.** (b), (c)

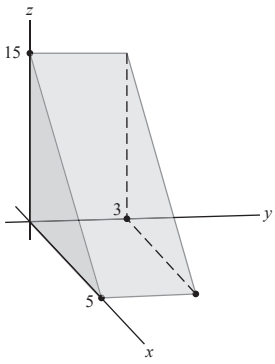
Sección 16.1 Problemas

1. $S_{4,3} = 13{,}5$ **3.** (A) $S_{3,2} = 42$, (B) $S_{3,2} = 43{,}5$

5. (A) $S_{3,2} = 60$, (B) $S_{3,2} = 62$

7. Dos posibles soluciones son $S_{3,2} = \frac{77}{72}$ y $S_{3,2} = \frac{79}{72}$.

9. $\frac{225}{2}$



11. 0,19375 **13.** 1,0731, 1,0783, 1,0809 **15.** 0 **17.** 0 **19.** 40

21. 55 **23.** $\frac{4}{3}$ **25.** 84 **27.** 4 **29.** $\frac{1858}{15}$

31. $6\ln 6 - 2\ln 2 - 5\ln 5 \approx 1{,}317$ **33.** $\frac{4}{3}\left(19 - 5\sqrt{5}\right) \approx 10{,}426$

35. $\frac{1}{2}(\ln 3)(-2 + \ln 48) \approx 1{,}028$ **37.** $6\ln 3 \approx 6{,}592$

39. 1 **41.** $\left(e^2 - 1\right)\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1{,}871$

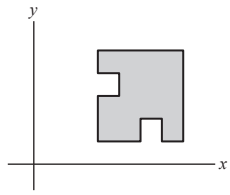
43. $m = \frac{3}{4}$ **45.** $2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386$

49. $\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} - e + 1 \approx 4{,}644$

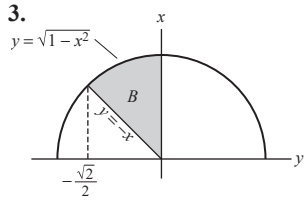
Sección 16.2 Ejercicios preliminares

1. (b), (c)

2.



3.



4.(b)

Sección 16.2 Problemas

1. **(a)** Puntos intermedios •, $S_{3,4} = -3$

(b) Puntos intermedios ○, $S_{3,4} = -4$

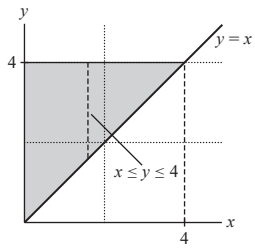
3. Como una región verticalmente simple: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x^2$; como una región horizontalmente simple: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1 - y}$

5. $\frac{192}{5} = 38{,}4$ **7.** $\frac{608}{15} \approx 40{,}53$ **9.** $2\frac{1}{4}$ **11.** $-\frac{3}{4} + \ln 4$

13. $\frac{16}{3} \approx 5{,}33$ **15.** $\frac{11}{60}$ **17.** $\frac{1754}{15} \approx 116{,}93$ **19.** $\frac{e-2}{2} \approx 0{,}359$

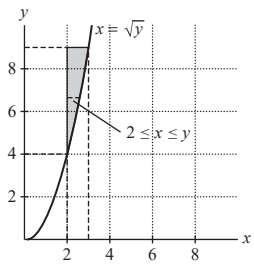
21. $\frac{1}{12}$ **23.** $2e^{12} - \frac{1}{2}e^9 + \frac{1}{2}e^5 \approx 321,532{,}2$

25.



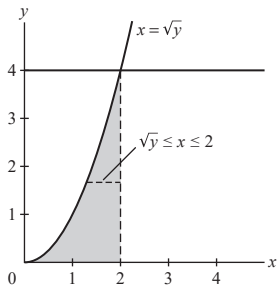
$$\int_0^4 \int_x^4 f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^4 \int_0^y f(x, y)\, dx\, dy$$

27.



$$\int_4^9 \int_2^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_2^3 \int_{x^2}^9 f(x, y)\, dy\, dx$$

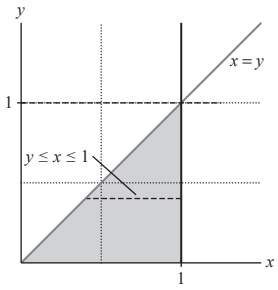
29.



$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{4x^2 + 5y}\, dy\, dx = \frac{152}{15}$$

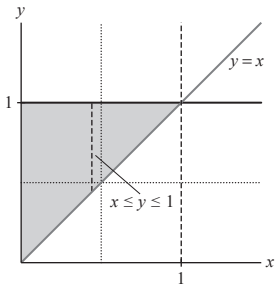
31. $\int_1^e \int_{\ln^2 y}^{\ln y} (\ln y)^{-1}\, dx\, dy = e - 2 \approx 0{,}718$

33.



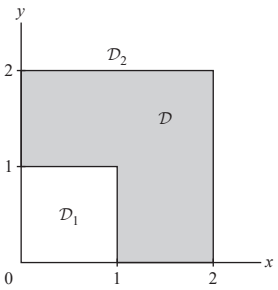
$$\int_0^1 \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dy\, dx = 1 - \cos 1 \approx 0{,}460$$

35.



$$\int_0^1 \int_0^y xe^{y^3}\, dx\, dy = \frac{e-1}{6} \approx 0{,}286$$

37.



$$\iint_D e^{x+y}\, dA = e^4 - 3e^2 + 2e \approx 37{,}878$$

39. $\int_0^4 \int_{x/4}^{3x/4} e^{x^2}\, dy\, dx = \frac{1}{4}\left(e^{16} - 1\right)$

41. $\int_2^4 \int_{y-1}^{7-y} \frac{x}{y^2}\, dx\, dy = 6 - 6\ln 2 \approx 1{,}841$

43. $\iint_D \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dA = \cos 1 - \cos 2 \approx 0{,}956$

45. $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (40 - 10y)\, dy\, dx = 256$

47. $\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\, dx\, dy = e^2 - 2e + 1 \approx 2{,}952$

49. $\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} y^2 \operatorname{sen} x\, dx\, dy = \frac{2}{3\pi}$ **51.** $\bar{f} = p$

57. Una posible solución es $P = \left(\frac{2}{3},\ 2\right)$

59. $\iint_D f(x,\ y)\, dA \approx 57{,}01$

Sección 16.3 Ejercicios preliminares

1. (c) **2.** (b)

3. (a) $D = \{(x,\ y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

(b) $D = \left\{(x,\ y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}$

Sección 16.3 Problemas

1. 6 **3.** $(e-1)(1-e^{-2})$ **5.** $-\frac{27}{4} = -6{,}75$

7. $\frac{b}{20}\left[(a+c)^5 - a^5 - c^5\right]$ **9.** $\frac{1}{6}$ **11.** $\frac{1}{16}$ **13.** $e - \frac{5}{2}$

15. $2\frac{1}{12}$ **17.** $\frac{128}{15}$ **19.** 2 **21.** $\frac{1}{12}$ **23.** $\frac{126}{5}$

25. La región limitada por el plano $y = 1$ y el paraboloide $y = 5 - x^2 - z^2$ que se encuentra por encima del disco $x^2 + z^2 \le 4$ en el plano xz.

27. $\int_0^2 \int_0^{y/2} \int_0^{4-y^2} xyz\, dz\, dx\, dy$, $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \int_0^{y/2} xyz\, dx\, dy\, dz$, y $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{1-(z/4)}} \int_{2x}^{\sqrt{4-z}} xyz\, dy\, dx\, dz$

29. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,\ y,\ z)\, dz\, dy\, dx$

31. $\frac{16}{21}$ **33.** $\frac{1}{2\pi}$ **35.** $2e - 4 \approx 1{,}437$

37. $S_{N,N,N} \approx 0{,}561,\ 0{,}572,\ 0{,}576$; $I \approx 0{,}584$; $N = 100$

Sección 16.4 Ejercicios preliminares

1. (d)

2. (a) $\int_{-1}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 f(P)\, r\, dr\, d\theta\, dz$

(b) $\int_{-2}^0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r\, dr\, d\theta\, dz$

3. (a) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^4 f(P)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

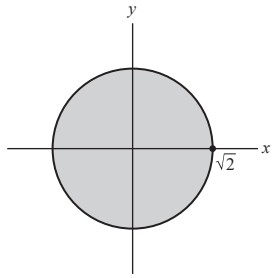
(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_4^5 f(P)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

(c) $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^2 f(P)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

4. $\Delta A \approx r(\Delta r \Delta\theta)$ y el factor r aparece en $dA = r\, dr\, d\theta$ en la fórmula del cambio de variables.

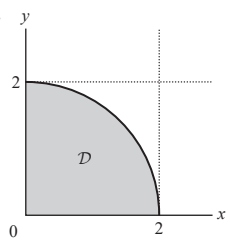
Sección 16.4 Problemas

1.



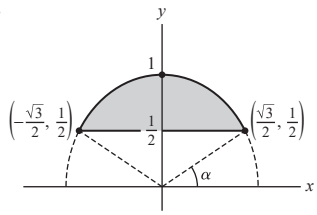
$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$$

3.



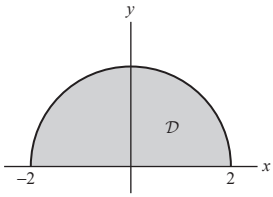
$$\iint_D xy\,dA = 2$$

5.



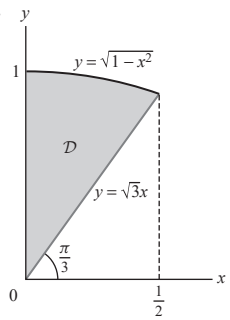
$$\iint_D y\left(x^2 + y^2\right)^{-1}\,dA = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}685$$

7.



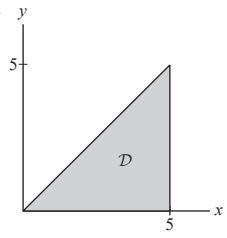
$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = 4\pi$$

9.



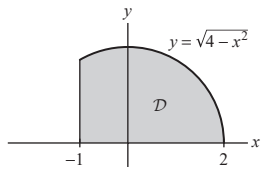
$$\int_{0}^{1/2}\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}045$$

11.



$$\int_{0}^{5}\int_{0}^{y} x\,dx\,dy = \frac{125}{6}$$

13.



$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8\pi}{3} \approx 9{,}244$$

15. $\frac{1}{4}$ **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** 0 **21.** 18 **23.** $\frac{48\pi - 32}{9} \approx 13{,}2$

25. (a) $W : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ r^2 \le z \le 8 - r^2$

(b) 16π

27. $\frac{405\pi}{2} \approx 636{,}17$ **29.** $\frac{2}{3}$ **31.** 243π

33. $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^4 f(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$

35. $\int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{r^2} f(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$

37. $z = \frac{H}{R}r;\ V = \frac{\pi R^2 H}{3}$ **39.** $\frac{4}{3}\pi\left(a^2 - b^2\right)^{3/2}$ **41.** $-\frac{\pi}{16}$

43. $\frac{8\pi}{15}$ **45.** $\frac{8\pi}{5}$ **47.** $\frac{5\pi}{8}$ **49.** π **51.** $\frac{4\pi a^3}{3}$

Sección 16.5 Ejercicios preliminares

1. 5 kg/m^3 **2.** (a)

3. La probabilidad que $0 \le X \le 1$ y $0 \le Y \le 1$; la probabilidad que $0 \le X + Y \le 1$

Sección 16.5 Problemas

1. $\frac{2}{3}$

3. $4\left(1 - e^{-100}\right) \times 10^{-6}$ C $\approx 4 \times 10^{-6}$ C

5. $10\,000 - 18\,000e^{-4/5} \approx 1912$

7. $25\pi\left(3 \times 10^{-8}\text{ C}\right) \approx 2{,}356 \times 10^{-6}$ C

9. $\approx 2{,}593 \times 10^{10}$ kg **11.** $\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$ **13.** $\left(\frac{4R}{3\pi},\ \frac{4R}{3\pi}\right)$

15. (0,555, 0) **17.** $\left(0,\ 0,\ \frac{3R}{8}\right)$ **19.** $\left(0,\ 0,\ \frac{9}{8}\right)$

21. $\left(0,\ 0,\ \frac{13}{2\left(17 - 6\sqrt{6}\right)}\right)$ **23.** (1, 2) **25.** (0, 0) **27.** $\frac{16}{15\pi}$

29. (a) $\frac{M}{4ab}$ **(b)** $I_x = \frac{Mb^2}{3};\ I_0 = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$ **(c)** $\frac{b}{\sqrt{3}}$

31. $I_0 = 8000\text{ kg} \cdot \text{m}^2;\ I_x = 4000\text{ kg} \cdot \text{m}^2$

33. $\frac{9}{2}$ **35.** $\frac{243}{20}$ **37.** $\left(\frac{24a}{35},\ \frac{3b}{5}\right)$ **39.** $\frac{a^2b^4}{60}$

41. $I_x = \frac{MR^2}{4}$; la energía cinética necesaria es $\frac{25MR^2}{2}$ J

47. (a) $I = 182{,}5\text{ g} \cdot \text{cm}^2$ **(b)** $\omega \approx 126{,}92$ rad/s

49. $\frac{13}{72}$ **51.** $\frac{1}{64}$

53. $C = 15$; la probabilidad es $\frac{5}{8}$.

55. **(a)** $C = 4$ **(b)** $\frac{1}{48\pi} + \frac{1}{32} \approx 0{,}038$

Sección 16.6 Ejercicios preliminares

1. (b)

2. **(a)** $G(1, 0) = (2, 0)$ **(b)** $G(1, 1) = (1, 3)$

(c) $G(2, 1) = (3, 3)$

3. Área $(G(R)) = 36$ **4.** Área $(G(R)) = 0{,}06$

Sección 16.6 Problemas

1. **(a)** La imagen del eje u es la recta $y = \frac{1}{2}x$; la imagen del eje v es el eje y.

(b) El paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(10, 5)$ $(10, 2)$, $(0, 7)$.

(c) El segmento que une los puntos $(2, 3)$ y $(10, 8)$.

(d) El triángulo de vértices $(0, 1)$, $(2, 1)$, y $(2, 2)$.

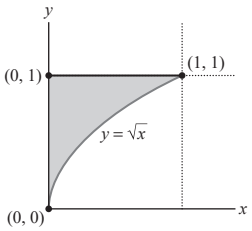
3. G no es inyectiva; G es inyectiva en el dominio $\{(u, v) : u \geq 0\}$, y G es inyectiva en el dominio $\{(u, v) : u \leq 0\}$.

(a) El eje de las x positivas, incluyendo el origen y el eje y, respectivamente.

(b) El rectángulo $[0, 1] \times [-1, 1]$.

(c) La curva $y = \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$.

(d)



5. $y = 3x - c$ **7.** $y = \frac{17}{6}x$ **11.** $\text{Jac}(G) = 1$

13. $\text{Jac}(G) = -10$ **15.** $\text{Jac}(G) = 1$ **17.** $\text{Jac}(G) = 4$

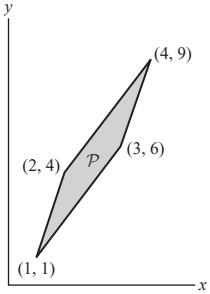
19. $G(u, v) = (4u + 2v, u + 3v)$

21. $\frac{2329}{12} \approx 194{,}08$

23. **(a)** Área $(G(R)) = 105$ **(b)** Área $(G(R)) = 126$

25. $\text{Jac}(G) = \frac{2u}{v}$; para $R = [1, 4] \times [1, 4]$, área $(G(R)) = 15 \ln 4$

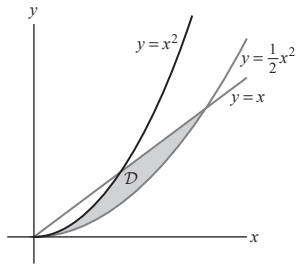
27.



$$G(u, v) = (1 + 2u + v, 1 + 5u + 3v)$$

29. 82 **31.** 80 **33.** $\frac{56}{45}$ **35.** $\frac{\pi(e^{36} - 1)}{6}$

37.



$$\iint_D y^{-1}\, dx\, dy = 1$$

39. $\iint_D e^{xy}\, dA = (e^{20} - e^{10}) \ln 2$

41. **(b)** $-\frac{1}{x + y}$ **(c)** $I = 9$ **45.** $\frac{\pi^2}{8}$

Capítulo 16 Repaso

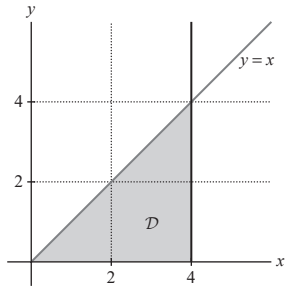
1. **(a)** $S_{2,3} = 240$ **(b)** $S_{2,3} = 510$ **(c)** 520

3. $S_{4,4} = 2{,}9375$

5. $\frac{32}{3}$

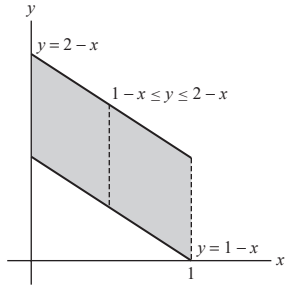
7. $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

9.



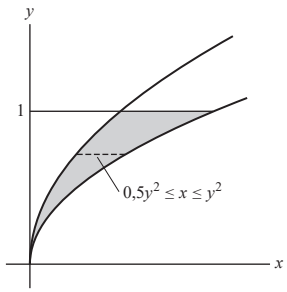
$$\iint_D \cos y\, dA = 1 - \cos 4$$

11.



$$\iint_D e^{x+2y}\, dA = \tfrac{1}{2}e(e + 1)(e - 1)^2$$

13.



$$\iint_D ye^{1+x}\,dA = 0{,}5(e^2 - 2e^{1{,}5} + e)$$

15. $\int_0^9 \int_{-\sqrt{9-y}}^{\sqrt{9-y}} f(x, y)\,dx\,dy$ **17.** $\frac{1}{24}$ **19.** $18(\sqrt{2} - 1)$

21. $1 - \cos 1$ **23.** 6π **25.** $\pi/2$ **27.** 10 **29.** $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$ **31.** π

33. $\frac{1}{4}$ **35.** $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^r zr\,dz\,dr\,d\theta = \pi/16$ **37.** $\frac{2\pi(-1 + e^8)}{3e^8}$

41. $\frac{256\pi}{15} \approx 53{,}62$ **43.** 1280π **45.** $\left(-\frac{1}{4}R,\ 0,\ \frac{5}{8}H\right)$

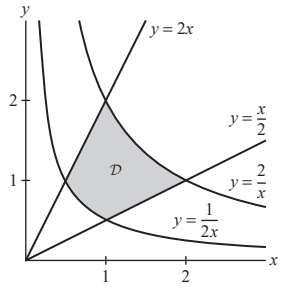
47. $\left(-\frac{2}{11\pi}R,\ -\frac{2}{11\pi}R(2 - \sqrt{3}),\ \frac{1}{2}H\right)$ **49.** $\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$

51. $\left(\frac{8}{15},\ \frac{16}{15\pi},\ \frac{16}{15\pi}\right)$ **53.** $\frac{19}{33}$ **55.** $\frac{4}{7}$

57. $G(u, v) = (3u + v,\ -u + 4v)$; Área $(G(R)) = 156$

59. Área$(D) \approx \frac{1}{5}$

61. (a)



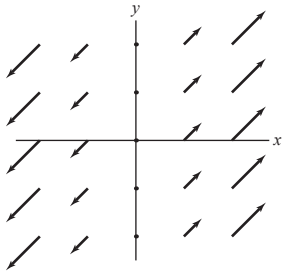
(d) $\frac{3}{4}(e^2 - \sqrt{e})$

Capítulo 17

Sección 17.1 Ejercicios preliminares

1. (b)

2.

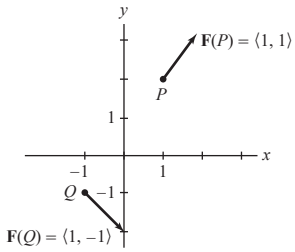


3. $\mathbf{F} = \langle 0,\ -z,\ y \rangle$

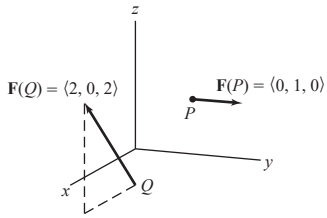
4. $f_1(x, y, z) = xyz + 1$

Sección 17.1 Problemas

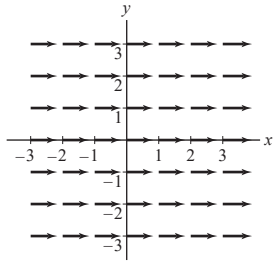
1. $\mathbf{F}(1, 2) = \langle 1, 1 \rangle$, $\mathbf{F}(-1, -1) = \langle 1, -1 \rangle$



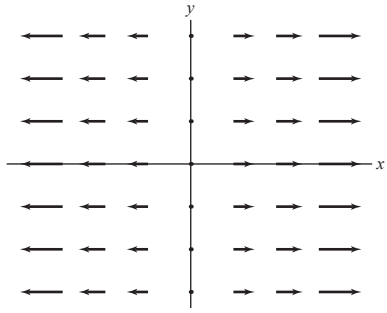
3. $\mathbf{F}(P) = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{F}(Q) = \langle 2, 0, 2 \rangle$



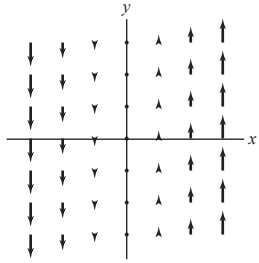
5. $\mathbf{F} = \langle 1, 0 \rangle$



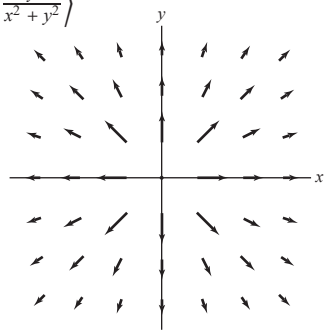
7. $\mathbf{F} = x\mathbf{i}$



9. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 0, x \rangle$



11. $\mathbf{F} = \left\langle \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right\rangle$



13. Gráfico (D) **15.** Gráfico (B) **17.** Gráfico (C)

19. Gráfico (B)

21. $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2$ **23.** $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

25. $f(x, y, z) = xyz^2$ **27.** $f_1(r) = -\frac{1}{2r^2}$; $f_2(r) = -\frac{1}{3r^3}$

29. $\nabla\phi = \frac{\mathbf{e}_r}{r}$ **31.** Gráfico (B)

33. **(a)** Gráfico (C) **(b)** Gráfico (B)

Sección 17.2 Ejercicios preliminares

1. 50 **2.** (a), (c), (d), (e) **3.** **(a)** Verdadero

(b) Falso. Cambiar la orientación de la curva cambia el signo de la integral de línea vectorial.

4. **(a)** 0 **(b)** −5

Sección 17.2 Problemas

1. **(a)** $f(\mathbf{c}(t)) = 6t + 4t^2$, $ds = 2\sqrt{11}\,dt$ **(b)** $\frac{26\sqrt{11}}{3}$

3. **(a)** $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \left\langle t^{-2}, t^2 \right\rangle$, $d\mathbf{s} = \left\langle 1, -t^{-2} \right\rangle dt$ **(b)** $-\frac{1}{2}$

5. $\sqrt{2}\left(\pi + \frac{\pi^3}{3}\right)$ **7.** $\pi^2/2$ **9.** 2.8 **11.** $\frac{128\sqrt{29}}{3} \approx 229{,}8$

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}(e-1) \approx 1{,}488$ **15.** $\frac{2}{3}\left((e^2+5)^{3/2} - 2^{3/2}\right)$

17. 39; la distancia entre (8, −6, 24) y (20, −15, 60)

19. $\frac{16}{3}$ **21.** 0 **23.** $2(e^2 - e^{-2}) - (e - e^{-1}) \approx 12{,}157$ **25.** $\frac{10}{9}$

27. $-\frac{8}{3}$ **29.** $\frac{13}{2}$ **31.** $\frac{\pi}{2}$ **33.** 339,5587 **35.** $2 - e - \frac{1}{e}$

37. **(a)** −8 **(b)** −11 **(c)** −16

39. $\approx 7{,}6$; $\approx 4\frac{2}{3}$ **41.** (A) Cero, (B) Negativa, (C) Cero **43.** 64π g

45. $\approx 10{,}4 \times 10^{-6}$ C **47.** $\approx 22\,743{,}10$ voltios

49. $\approx -10\,097$ voltios **51.** 1 **53.** **(a)** *ABC* **(b)** *CBA*

57. $\frac{1}{3}\left((4\pi^2+1)^{3/2} - 1\right) \approx 85{,}5 \times 10^{-6}$ C

63. 18 **65.** $e - 1$ **71.** 0,574

Sección 17.3 Ejercicios preliminares

1. Cerrada **2.** **(a)** Campos vectoriales conservativos

(b) Cualquier campo vectorial

(c) Campos vectoriales conservativos **(d)** Cualquier campo vectorial

(e) Campos vectoriales conservativos **(f)** Cualquier campo vectorial

(g) Campos vectoriales conservativos y *algún* otro campo vectorial

3. **(a)** Siempre es verdadero **(b)** Siempre es verdadero

(c) Verdadero bajo hipótesis adicionales sobre D

4. **(a)** 4 **(b)** −4

Sección 17.3 Problemas

1. 0 **3.** $-\frac{9}{4}$ **5.** $32e - 1$ **7.** $V(x, y, z) = zx + y$

9. $V(x, y, z) = y^2x + e^z y$

11. El campo vectorial no es conservativo.

13. $V(x, y, z) = z\tan x + zy$ **15.** $V(x, y, z) = x^2y + 5x - 4zy$

17. 16 **19.** 6

21. $-\frac{2}{3}$; 0 **23.** $6{,}2 \times 10^9$ J

25. **(a)** $V(x, y, z) = -gz$ **(b)** $\approx 82{,}8$ m/s

27. (A) 2π, (B) 2π, (C) 0, (D) -2π, (E) 4π

Sección 17.4 Ejercicios preliminares

1. 50

2. Un factor de distorsión que indica en qué magnitud se ve alterada el área de R_{ij} bajo la aplicación G.

3. $\text{Área}(S) \approx 0{,}0006$ **4.** $\iint_S f(x, y, z)\,dS \approx 0{,}6$

5. $\text{Área}(S) = 20$ **6.** $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

Sección 17.4 Problemas

1. **(a)** v **(b)** iii **(c)** i **(d)** iv **(e)** ii

3. **(a)** $\mathbf{T}_u = \langle 2, 1, 3 \rangle$, $\mathbf{T}_v = \langle 0, -1, 1 \rangle$, $\mathbf{n}(u, v) = \langle 4, -2, -2 \rangle$

(b) $\text{Área}(S) = 4\sqrt{6}$ **(c)** $\iint_S f(x, y, z)\,dS = \frac{32\sqrt{6}}{3}$

5. **(a)** $\mathbf{T}_x = \langle 1, 0, y \rangle$,

$\mathbf{T}_y = \langle 0, 1, x \rangle$, $\mathbf{n}(x, y) = \langle -y, -x, 1 \rangle$

(b) $\frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{6}$ **(c)** $\frac{\sqrt{2}+1}{15}$

7. $\mathbf{T}_u = \langle 2, 1, 3 \rangle$, $\mathbf{T}_v = \langle 1, -4, 0 \rangle$,

$\mathbf{n}(u, v) = 3\langle 4, 1, -3 \rangle$, $4x + y - 3z = 0$

9. $\mathbf{T}_\theta = \langle -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0 \rangle$,

$\mathbf{T}_\phi = \langle \cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi \rangle$,

$\mathbf{n}(u, v) = -(\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi)\mathbf{j} - (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\mathbf{k}$,

$y + z = \sqrt{2}$

11. $\text{Área}(S) \approx 0{,}2078$ **13.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$ **15.** $\frac{37\sqrt{37}-1}{4} \approx 56{,}02$ **17.** $\frac{\pi}{6}$

19. $4\pi(1 - e^{-4})$ **21.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **23.** $\frac{7\pi}{3}$ **25.** $\frac{5\sqrt{10}}{27} - \frac{1}{54}$

27. $\text{Área}(S) = 16$ **29.** $3e^3 - 6e^2 + 3e + 1 \approx 25{,}08$

31. $\text{Área}(S) = 4\pi R^2$

33. **(a)** $\text{Área}(S) \approx 1{,}0780$ **(b)** $\approx 0{,}09814$

35. $\text{Área}(S) = \frac{5\sqrt{29}}{4} \approx 6{,}73$ **37.** $\text{Área}(S) = \pi$ **39.** 48π

43. $\text{Área}(S) = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right) \approx 36{,}18$ **47.** $4\pi^2 ab$

49. $V(r) = -\frac{Gm}{2Rr}\left(\sqrt{R^2 + r^2} - |R - r|\right)$

Sección 17.5 Ejercicios preliminares

1. (b) **2.** (c) **3.** (a) **4.** (b)

5. **(a)** 0 **(b)** π **(c)** π

6. $\approx 0{,}05\sqrt{2} \approx 0{,}0707$ **7.** 0

Sección 17.5 Problemas

1. **(a)** $\mathbf{n} = \langle 2v,\ -4uv,\ 1\rangle$, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 2v^3 + u$

(b) $\frac{4}{\sqrt{69}}$ **(c)** 265

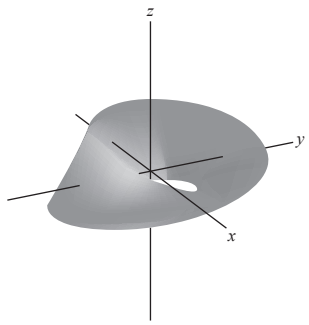
3. 4 **5.** -4 **7.** $\frac{27}{12}(3\pi + 4)$ **9.** $\frac{693}{5}$ **11.** $\frac{11}{12}$

13. $\frac{9\pi}{4}$ **15.** $(e-1)^2$ **17.** 270 **19.** **(a)** $18\pi e^{-3}$ **(b)** $\frac{\pi}{2}e^{-1}$

21. $\left(2 - \frac{6}{\sqrt{13}}\right)\pi k$ **23.** $\frac{2\pi}{3}$ m^3/s **25.** **(a)** 1 **(b)** 1

29. $\Phi(t) = -1{,}56\times 10^{-5}e^{-0{,}1\,t}$ T–m^2;
caída de voltaje $= -1{,}56\times 10^{-6}e^{-0{,}1\,t}$ V

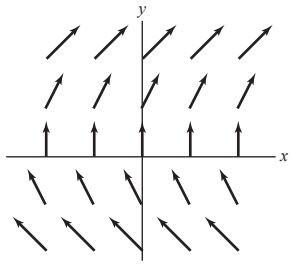
31. **(a)**



Capítulo 17 Repaso

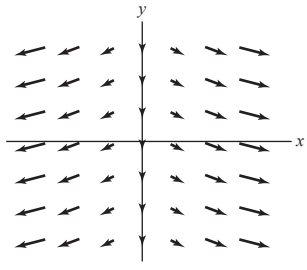
1. **(a)** $\langle -15,\ 8\rangle$ **(b)** $\langle 4,\ 8\rangle$ **(c)** $\langle 9,\ 1\rangle$

3.



$\mathbf{F} = \langle y, 1\rangle$

5. $\mathbf{F}(x,\ y) = \langle 2x,\ -1\rangle$



$\nabla V = \langle 2x, -1\rangle$

7. $\mathbf{F}$ no es conservativo. **9.** $-\cos x + e^y + \frac{z^2}{2}$

11. $\mathbf{F}$ no es conservativo. **13.** $y\tan^{-1}(x) + z^2$

15. $\mathbf{F}$ no es conservativo. **17.** $\frac{\sqrt{5}}{6}$ **19.** $\frac{11}{6}$

21. $M = 13\frac{1}{3}$ **23.** $\frac{81-9\pi}{4}$ **25.** $-\frac{\pi}{2}$ **27.** $-\frac{13}{18}$

29. (B) y (C) cero, (D) negativa

31. $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{5}{4}$, $c = -5$,
$\mathbf{T}_u = \left\langle 1,\ \frac{5}{4},\ 2\right\rangle$,
$\mathbf{T}_v = \left\langle \frac{4}{3},\ 1,\ 0\right\rangle$,
$\mathbf{n} = \left\langle -2,\ \frac{8}{3},\ -\frac{2}{3}\right\rangle$

33. **(a)** $\mathbf{T}_u\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right) = \left\langle 1,\ \sqrt{3},\ 0\right\rangle$,
$\mathbf{T}_v\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 3\right\rangle$,
$\mathbf{n}\left(1,\ \frac{\pi}{3}\right) = \left\langle 3\sqrt{3},\ -3,\ -2\right\rangle$

(b) $3\sqrt{3}x - 3y - 2z + 2\pi = 0$ **(c)** Área$(S) \approx 38{,}4$

35. Área$(S) \approx 41{,}8525$ **37.** $54\pi(e^{-10} + 1) \approx 54\pi$

39. Área$(S) = 0{,}02\sqrt{6} \approx 0{,}049$ **41.** 54 **43.** 8π **45.** $3 - e$

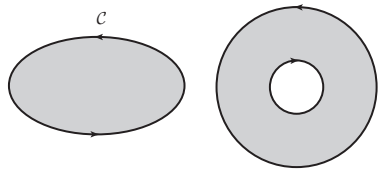
47. $\frac{\pi}{3}KH^3R$ **49.** 6π

Capítulo 18

Sección 18.1 Ejercicios preliminares

1. $\mathbf{F} = \left\langle -e^y,\ x^2\right\rangle$

2.



3. Sí **4.** (a), (c)

Sección 18.1 Problemas

3. 0 **5.** $-\frac{\pi}{4}$ **7.** $\frac{1}{6}$ **9.** $\frac{(e^2-1)(e^4-5)}{2}$

11. (a) $V(x,\ y) = x^2e^y$ **13.** $I = 34$ **15.** $A = 9\pi$ **17.** $A = 3\pi$

19. (c) $A = \frac{3}{2}$ **23.** $9 + \frac{15\pi}{2}$ **25.** 214π

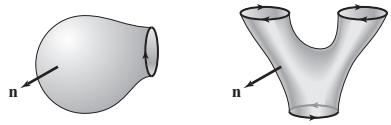
27. (A) cero (B) positivo (C) negativo (D) cero

29. $-0{,}10$ **31.** $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$ **33.** Triángulo (A), 3; polígono (B), 12

37. 2 **39.** 0,021 búfalos por segundo

Sección 18.2 Ejercicios preliminares

3.



(A) (B)

2. (a)

3. Un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{A})$ es un vector potencial para $\mathbf{F}$.

4. (b)

5. Si las dos superf cies orientadas S_1 y S_2 tiene la misma curva orientada frontera, C.

Sección 18.2 Problemas

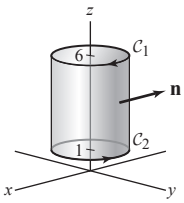
1. $\langle 1 - 3z^2,\ 1 - 2x,\ 1 + 2y \rangle$ **3.** $\langle 0,\ \operatorname{sen} x,\ \cos x - e^y \rangle$

5. $\iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \pi$

7. $\iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = e^{-1} - 1$

9. $\langle -3z^2 e^{z^3},\ 2ze^{z^2} + z \operatorname{sen}(xz),\ 2 \rangle$; 2π

11. (a) **(b)** 140π



13. (a) $\mathbf{A} = \langle 0,\ 0,\ e^y - e^{x^2} \rangle$ **(c)** $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2}$

15. (a) $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = r^2 B\pi$ **(b)** $\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$

17. $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = b\pi$ **19.** $c = 2a$ y b es arbitrario.

23. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 25$

Sección 18.3 Ejercicios preliminares

1. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

2. Como el integrando es positivo para todo $(x,\ y,\ z) \neq (0,\ 0,\ 0)$, la integral triple y, en consecuencia, también el f ujo, es positiva.

3. (a), (b), (d), (f) tienen sentido; (b) y (d) son automáticamente cero.

4. (c) **5.** $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 1$ y f ujo $= \int \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV =$ volumen

Sección 18.3 Problemas

1. $y + z$ **3.** $1 - 4zx - x + 2zx^2$ **5.** $c = -\frac{1}{5}$

7. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint_R 0\, dV = 0$

9. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_R \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = 4\pi$

11. $\frac{4\pi}{15}$ **13.** $\frac{32\pi}{5}$ **15.** 64π **17.** 81π **19.** 0 **21.** $\frac{13}{3}$

23. $\frac{4\pi}{3}$ **25.** $\frac{16\pi}{3} + \frac{9\sqrt{3}}{2} \approx 24{,}549$ **27.** $\approx 1{,}57\ \text{m}^3/\text{s}$

29. (b) 0 **(c)** 0

(d) Como **E** es no está def nido en el origen, que se encuentra dentro de la bola W, no se puede utilizar el teorema de la divergencia.

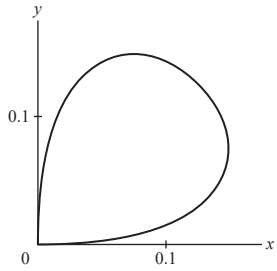
31. $(-4) \cdot \left[\frac{256\pi}{3} - 1\right] \approx -1068{,}33$

33. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

Capítulo 18 Repaso

1. 0 **3.** -30 **5.** $\frac{3}{5}$

7. (a) **(b)** $A = \frac{1}{60}$



9. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = -\mathbf{k},\ \operatorname{div}(\mathbf{F}) = -1$

11. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0},\ \operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2e^{-x^2-y^2-z^2}\left(2(x^2 + y^2 + z^2) - 3\right)$

13. $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \langle -2z,\ 0,\ -2y \rangle$ **19.** 2π

21. $\mathbf{A} = \langle yz,\ 0,\ 0 \rangle$ y el f ujo es 8π. **23.** $\frac{296}{3}$ **25.** -128π

27. Volumen$(W) = 2$ **29.** $4 \cdot 0{,}0009\pi \approx 0{,}0113$

31. $2x - y + 4z = 0$

33. (b) $\frac{\pi}{2}$ **35. (c)** 0 **(d)** $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -4$, $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 4$

REFERENCIAS

El recurso on-line MacTutor History of Mathematics Archive **www-history.mcs.st-and.ac.uk** ha sido una valiosa fuente de información.

Sección 12.2

(FI&C 35) Adaptado de Richard Courant y Fritz John, *Differential and Integral Calculus*, Wiley-Interscience, New York, 1965.

Sección 12.3

(EJ 56) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

Sección 13.4

(EJ 61) Adaptado de Ethan Berkove y Rich Marchand, "The Long Arm of Calculus," *The College Mathematics Journal* 29, 5:376-386 (Noviembre 1998).

Sección 14.3

(EJ 15) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

Sección 14.4

(EJ 60) Damien Gatinel, Thanh Hoang-Xuan y Dimitri T. Azar, "Determination of Corneal Asphericity After Myopia Surgery with the Excimer Laser: A Mathematical Model," *Investigative Opthalmology and Visual Science* 42: 1736-1742 (2001).

Sección 14.5

(EJ 55, 58) Adaptado de apuntes del curso "Dynamics and Vibrations" de la Brown University **http://www.engin.brown.edu/courses/en4/**.

Sección 15.8

(EJ 42) Adaptado de C. Henry Edwards, "Ladders, Moats, and Lagrange Multipliers," *Mathematica Journal* 4, Issue 1 (Winter 1994).

Sección 16.3

(FIGURA 9 COMPUTACIÓN) La computación se ha basado en Jeffrey Nunemacher, "The Largest Unit Ball in Any Euclidean Space," en *A Century of Calculus*, Part II, Mathematical Association of America, Washington DC, 1992.

Sección 16.6

(UN APUNTE CONCEPTUAL) Vea R. Courant y F. John, Introduction to Calculus and Analysis, Springer-Verlag, New York, 1989, p. 534.

Sección 17.2

(FIGURA 9) Inspirada por Tevian Dray y Corinne A. Manogue, "The Murder Mystery Method for Determining Whether a Vector Field Is Conservative," *The College Mathematics Journal*, Mayo 2003.

Sección 17.3

(EJ 19) Adaptado de *Calculus Problems for a New Century*, Robert Fraga, ed., Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993.

Apéndice D

(DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7) Una demostración sin esta hipótesis de simplif cación se puede consultar en R. Courant y F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1989.

CRÉDITOS DE LAS FOTOS

PÁGINA 613, CO12
Mircea Bezergheanu/ iStockphoto

PÁGINA 620
Renault Communication /TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS

PÁGINA 654
Stockbyte

PÁGINA 655
Architect of the Capitol

PÁGINA 663, CO13
Ryan Pyle

PÁGINA 694
LBNL / Science Source / Photo Researchers

PÁGINA 729, CO14
Spectral-Design/ iStockphoto

PÁGINA 752
inferior Alfred Pasieka / Photo Researchers, Inc.

PÁGINA 752
superior Robin Smith/ Stone/ Getty Images

PÁGINA 762
NASA

PÁGINA 766
Bernd Kappelmeyer/ zefa/Corbis

PÁGINA 775
NASA, ESA y el Hubble Heritage Team (STScI/AURA)-ESA/Hubble Collaboration

PÁGINA 780, CO15
superior Tom Dempsey / Photoseek.com

PÁGINA 780
inferior Krista Longnecker/Woods Hole Oceanographic Institution

PÁGINA 786
Galen Rowell/Corbis

PÁGINA 786
USGS/http://www.topozone.com

PÁGINA 805
SSPL / The Image Works

PÁGINA 807
izquierda Hulton Archive/Getty Images

PÁGINA 807
derecha Wikipedia

PÁGINA 855
Bettmann/Corbis

PÁGINA 866, CO16
scottygo / Alamy

PÁGINA 902
Gary A Glatzmaier (University of California, Santa Cruz) y Paul H Roberts (University of California, Los Angeles)

PÁGINA 945, CO17
Honkanen M, Jung J, Kuo C-J, Peles Y, Amitay M 2010, Medición en dos fases PIV/PTV del f ujo de burbujas a través de *pin f ns*. En Proc. of 7th Int. Symp. on Multiphase Flow, Tampa, US, 30.5.-4.6.2010.

PÁGINA 945
Michelle Borkin (Harvard University)

PÁGINA 947
Bettmann/Corbis

PÁGINA 1009, CO18
Alamy

PÁGINA 1012
planímetro cortesía de John D. Eggers UCSD/ fotografía de Adriene Hughes/ UC San Diego Media Lab

PÁGINA 1020
Paul Horsted/Stock Connection Distribution / Alamy

PÁGINA 1043
SSPL / The Image Works

ÍNDICE DE MATERIAS

Los números en negrita corresponden al volumen de **una variable**.

abscisas, *véase* coordenadas *x*
aceleración, **132**, **140**, 762
– normal, 765
– tangencial, 765 , 770
aditividad
– de integrales de línea, 961
– de momentos, **495**
– para intervalos adyacentes, **262**
afelio (de órbita planetaria), 659
Agnesi, Maria, **127**
álgebra
– lineal, teoría de matrices y determinantes, 694
– vectorial, 665 – 670
– y producto vectorial, 694
altura
– máxima, **132**–**133**
– y velocidad, **132**
amplitud (de una gráf ca), **9**
análisis vectorial, teoremas fundamentales de, 1009– 1017
Andrews, George, **564**
ángulo(s)
– complementarios, **30**, **392**
– de declinación (ϕ), 721
– de incidencia, **220**
– de inclinación, 827
– – de una curva plana, 756
– de ref exión, **220**
– en radianes, **26**
– entre vectores, y producto escalar, 684 – 686
– estudio de, 687
– obtuso, comprobación, 687
anticonmutatividad, de producto vectorial, 696
antiderivación, *véase* integración
antiguos griegos, matemáticos y f lósofos, **496**, 647
anualidad, **379**
– perpetua, **450**–**451**
aplicación(es), **4**, 926 – 929
– cambios de área por una, 929 – 931
– cuadrícula rectangular, 932
– de coordenada polar, 926
– inversas, 935
– inyectiva, 931
– jacobianos, 929 – 931
– lineales, 926 – 927
– – jacobiano de, 929 – 930
– y cambio de variables, 931 – 936
Apolonio de Perga, **121**
aproximación(es)
– basada en
– – el extremo inferior, **248**, **249**, **251**, **304**, **465**
– – el extremo superior, **246**, **250**, **324**
– – el punto medio, **248**, **257**
– – los extremos, **253**, **257**, **258**, **280**, **526**
– de la derivada, **104**
– de paralelogramos, 930
– de primer orden, **488**, 1028
– de rectángulos, 930
– de sumas inf nitas, **554**
– error en, **176**, **179**–**180**
– extremo superior, **246**, **250**–**251**, **465**
– lineales, **175**–**178**, **499**, 814 – 816
– numéricas, **228**–**230**
– parabólicas, **471**
– poligonales, **478**–**480**, **481**, 626, 747
– por linealización, **178**
– por sumas de Riemann, **257**, **268**
– punto medio, **248**, **257**
– trapezoidal, **280**
– y polinomios de Taylor, **499**
aproximadamente igual a (≈), **175**
arcos
– de circunferencia, longitud de, **25**, 627
– formas gráf cas de, **208**–**209**
arcotangente, de funciones lineales o cuadráticas, **444**
área, **244**
– acumulada de una función, **273**
– – derivada de, **273**
– – y concavidad, **278**
– aproximación
– – del área por debajo de una gráf ca, **244**–**253**
– – mediante rectángulos, **244**–**246**
– – y cálculo de, **244**–**253**
– bajo una gráf ca, aproximación trapezoidal, **465**
– cálculo
– – mediante el teorema de Green, 1012
– – como el límite de aproximaciones, **250**–**253**
– – como un límite, **250**
– – dividiendo una región, **250**
– cambios por una aplicación, 929 – 931
– con signo, **259**–**260**, **299**, **447**
– de un polígono, 1020
– de un trapecio, **465**
– de una elipse, 1012
– de una superf cie, 629, 985 – 989
– entre dos curvas, **296**–**298**, **315**–**316**
– entre gráf cas, **396**–**398**
– paralelogramo, 986
– producto vectorial y determinantes, 698 – 699
– y coordenadas polares, 640–643
– y producto vectorial, 694 – 697
Aristarco, 775
Arquímedes, **496**, **561**, 898
asíntota(s)
– de una hipérbola, 649–650, 651–653
– funciones con, **36**
– horizontal, **36**, **81**–**82**, **212**
– vertical, **35**, **53**–**54**, **208**, **211**, **212**

ball grid array (BGA), 802
banda de Möbius, 999
Barrow, Isaac, **267**
base (función exponencial), **22**, **339**
Bernoulli, Jacob, **253**, **561**, 618
Bernoulli, Johann, **561**
Bernstein, Sergei, 620
Bézier, Pierre, 620
Brahe, Tycho, 775

bruja de Agnesi, **127**
Bubble Sort, **385**

cabeza (en el plano), 663
caída libre, **377**–**378**
calculadoras
– representación gráf ca, **34**–**37**
– y funciones exponenciales, **339**
cálculo(s)
– *véase también* teorema fundamental del cálculo (FTC)
– diferencial, **40**, **101**
– integral, **40**, **78**, **244**
– inventores del, **41**, **111**, **189**
– f nancieros y funciones exponenciales, **371**–**372**
– series inf nitas, **543**
– y teoría de series inf nitas, **543**
caloría, **330**
cambio
– de base, fórmula, **356**
– de signo, **196**–**197**, **199**, **208**
campo(s)
– campo vectorial velocidad, 1006
– de fuerza, 962 – 972
– de pendientes, **522**–**528**
– de un f ujo de f uido, 999 – 1000
– de vorticidad, 967 , 976
– eléctricos, 956 , 973 , 1001– 1012, 1041–1043
– espinoriles, 947
– magnéticos, 1001– 1003, 1030, 1043
– – de un solenoide, 1028– 1029
– – velocidad en, 697
– – y producto vectorial, 694
– potenciales para, 949
– teorema fundamental para, 969
– vectoriales, 945 – 948 , 1011, 1014, 1016, 1030
– – circulación de, 969
– – componente normal de, 997
– – con divergencia cero, 1034– 1044
– – con divergencia igual a cero, 1038
– – con f ujo diferente de cero, 1044
– – con rotacional diferente de cero, 1013
– – conservativos, 947 – 949 , 969 – 979
– – constante, 946
– vectorial de vorticidad, 973
– – divergencia de, 1034
– – gradiente, 947
– – integrales de superf cie de, 995 – 999
– – irrotacional, 1046
– – radial, 1034
– – radial cuadrático inverso, 1039– 1041
– – radial unitario, 1039
– – rotacionales, independencia de la superf cie para, 1027
– – unitario, 945 – 951
– velocidad
Cantor, la mesa que desaparece, **565**
capa f na, **323**
capacidad caloríf ca, **284**
capacidad de carga, **529**
capas cilíndricas, método de, *véase* método de las capas
caracol, 635–636
– de Pascal, **162**
Cauchy, Augustin Louis, **50**, **92**, **581**, 1036
centro
– de curvatura, 757
– de masa, **491**–**495**, 915
– de una elipse, 649
– de una hipérbola, 649
centroide, **493**–**495**
polinomios de Chebyshev, **38**
cicloide, 618–619, 624, 627
– vectores tangentes horizontales a la, 741 – 742
cilindros
– cuadráticos, 715
– curvas de cuadrícula sobre, 983
– ecuación de, 676
– parametrizaciones de, 981 – 982
– rectos, volumen de, **304**
cinturones de Van Allen, 694
circuitos, corriente en, **384**
circulación, 969 , 1013
– por unidad de área, 1017
círculo, área de, 642
circunferencia
– curvatura de, 753
– ecuación de la, **4**
– involuta de, 635, 752
– momento de, **495**
– osculatriz, 756 – 757
– parametrización de, 616, 732 – 733
– que mejor ajusta, 756
– unidad, **25**, **26**, **28**, **48**, 618, 718
– y ecuaciones polares, 637
cisoide, 639
Clairaut, Alexis, 805
clotoide, 760
Cobb, Charles, 855
cociente(s), **1**, **21**, **340**, **356**
– incremental, **101**, 741
– – y aproximaciones a la derivada, **102**
– límites de, y regla de L'Hôpital, **385**
– regla de continuidad, **65**–**66**
coef ciente(s), **21**
– binomial, **602**, **603**
– – relación de recurrencia para, A15
– principal, de un polinomio, **21**
– – patrón de, **469**
– indeterminados, y fracciones parciales, **441**, **438**
cola (en el plano), 663
combinación(es)
– de signo, **208**
– lineal de
– – funciones, **22**–**23**
– – vectores, 667 – 668 , 677
conmutatividad, del producto escalar, 685
completar cuadrados, técnica, **18**, 846
componente(s)
– de vectores, 664
– de **u**, 688
– **i**, **j** y **k**, 664 – 668 , 729 , 1023– 1028
– normal de aceleración, 765 , 766
– normal de un campo vectorial, 963
– tangencial
– – de aceleración, 765 , 766
– – de campo vectorial, 958 , 960 , 962 , 963
– y operaciones de vectores, 666 – 667
comportamiento asintótico, **81**, **208**, **210**–**212**
concavidad
– criterio de, **202**
– def nición de, **201**
– y criterio de la segunda derivada, **204**–**205**
– y función área, **276**
concha de nautilus, 613
concoide, **162**
condición de Lagrange, 854
condición de las parciales cruzadas, 948 , 950 , 974 – 977
condición inicial, **237**, **515**–**516**
– y primitivas, **237**–**238**
conjunto
– de números racionales, **1**
– de puntos intermedios, **293**
– de Mandelbrot, **33**
– de todas las ternas, 674
– S, **3**
cono, 789 , 909
– parametrización, 980 – 981
constante
– de enfriamiento, **377**
– de Euler, **554**
– de gravitación universal de Newton, 766
– de integración, **235**
– del muelle, **331**
– integral de una, **260**

consumo de potencia, y velocidad, **36**
continuidad, **62**
– de funciones compuestas, **66**
– de polinomio y funciones racionales, **65**
– de series de potencias, **597**
– en un punto, **62**
– lateral, **63**
– para funciones, 794 , 795
– por la derecha, **63**
– por la izquierda, **63**
– propiedades, **64**–**66**
– reglas para cocientes, **65**–**66**
– y derivabilidad, **115**
– y límites, **62**–**68**
– y método de sustitución, **66**–**67**
convergencia
– absoluta, **575**
– condicional, **575**, **576**
– de integrales impropias, **448**
– de series de términos positivos, **580**–**586**
– de una serie inf nita, **555**
– radio de, **600**–**602**
– – inf nito, **594**
coordenadas, **3**
– angulares, 633, 634, 637
– cartesianas, *véase* coordenadas rectangulares
– cilíndricas, 719 – 721 , 981 – 982
– – integrales triples en, 905 – 906
– curvilíneas, 982
– esféricas, 721 – 724 , 907
– – integrales triples en, 891 – 896
– – superf cies de nivel en, 720
– – y campo magnético terrestre, 694 , 907
– – y longitud y latitud, 721
– polares, 632–636, 640–643, 834
– – derivada en, 639
– – integrales dobles en, 902 – 905
– – longitud de un arco en, 640–643
– – y área, 640–643
– radiales, 632–634
– rectangulares (o cartesianas), **3**, 613, 632–636, 720 – 724
– – superf cies de nivel en, 720
– x e y, **3**
Copérnico, Nicolás, 775
copo de nieve de Koch, **565**
cordillera del monte Whitney, 786
córnea, contorno de, 760
coronas circulares (discos), **325**–**326**
corriente
– de transición, **540**
– en un circuito, **382**
cosecante, **28**
– hiperbólica, **401**
coste
– marginal, **131**–**132**, **282**
– – de reducción, **284**
– total, **282**
cota
– del error, **179**
– para la regla de Simpson, **469**–**470**
– para las reglas del trapecio y del punto medio, **465**–**466**
– para polinomios de Taylor, **503**–**506**, **599**
– superior de una sucesión, **549**
cotangente, **28**
– hiperbólica, **401**
crecimiento
– de poblaciones, **529**
– y decrecimiento exponencial, **364**–**368**
criterio(s)
– de comparación
– – para la convergencia de series de términos positivos, **568**
– – para la convergencia de series de términos positivos, **568**
– – para límites, **570**
– – por paso al límite del cociente, **570**
– de divergencia, **559**
– de la primera derivada, **196**–**197**
– – para puntos críticos, **196**–**198**
– de la raíz, **583**
– de la recta vertical, **6**
– de la segunda derivada, 846
– – para puntos críticos, **205**, 841 – 843
– – prueba de, **207**
– de Leibniz para series alternadas, **576**–**577**
– del cociente, **581**–**584**, **587**–**594**
– del discriminante, 657
– integral, **566**, **567**
– para la convergencia y divergencia de series
– – p-series, **567**–**568**
– – criterio de comparación (por paso al Límite del cociente), **570**
– – criterio de comparación, **568**
– – criterio de divergencia, **559**–**560**
– – criterio de la raíz, **583**
– – criterio de Leibniz para series alternadas, **576**–**577**
– – criterio del cociente, **581**–**582**
– – criterio integral, **566**
– – teorema de la dicotomía para series de términos positivos, **566**
cuadrícula
– curvilínea, 932
– rectangular, aplicación de, 932
cuevas de Chauvet, **370**
cuña esférica, 907 – 908
curva(s)
– área entre dos, **296**–**298**, 642
– Bézier, 620
– cerrada, 1014
– – simple, 878 , 887 , 1009, 1015
– cóncava y convexa, **201**–**202**
– cúbica torcida, 755
– de cuadrícula, 982 – 983
– de frontera, 1015, 1021
– – suave a trozos, 878
– – suave a trozos, 878
– de la restricción, 853 – 856
– – acotada, 855
– de nivel, 782 – 788 , 842
– – de una función potencial, 971
– – espaciado de, 784 – 785
– de resonancia, **192**
– dirección de, 957
– en el espacio, 730 , 733
– familia ortogonal de, **521**
– frontera suave a trozos, 878
– gaussiana, 913
– hélice, 731 – 732
– índice de la trayectoria de, 977
– integrales, **522**, 1013
– lemniscata, 639
– orientadas, 957
– paramétricas, 613–614, 616–617, 620, 622, 730
– – área debajo de, 625
– – derivada segunda de, 624
– plana, longitud de arco, 626
– regiones entre, 880 – 885
– suave, 878
– – a trozos, 878 , 960
– tridente, **161**–**162**
– y secciones cónicas, 615
curvatura, 752 – 759
– centro de, 757
– de una gráf ca en el plano, 755 – 756
– fórmula para, 754
– radio de, 753

datación por carbono, **368**
decimales
– f nitos, **1**
– inf nitos no periódicos, **1**
– inf nitos periódicos, **1**
declinación magnética, para Estados Unidos, 809
delta (δ), **92**
delta (Δ) notación, **42**
densidad

– de masa
– – constante, **491**, **494**, 794
– – de una curva, 955 – 956
– – lineal, **306**–**307**
– – y masa total, **306**–**307**
– de población, **307**, **313**
– del agua de mar, 780 , 810
– – mapa de contorno de, 803
– lineal de masa, **306**
– uniforme, **491**, **494**, 794
derivación, **103**, **139**, 811 – 815
– criterio para la, 812 , A25
– de una series de potencias, **590**
– de vectores, 750
– e integración, **275**
– e integración término a término, **590**
– implícita, **122**, **157**–**160**, 834 – 835
– logarítmica, **359**
– parcial
– reglas básicas de, **112**–**114**
– y continuidad, **115**
– y linealización local, **116**
– y plano tangente, **102**, **115**, 812
derivadas *véase también* primitivas; criterio de la primera derivada; criterio de la segunda derivada
– aceleración, **140**
– como una función, **110**–**111**
– como vector tangente, 740 – 742
– con valores escalares, 721 , 729 , 739 , 741
– de b^x, **341**–**343**
– de funciones
– – hiperbólicas inversas, **400**, **402**, **435**
– – inversas, **354**
– – logarítmicas, **355**–**357**
– – trigonométrica, **144**–**146**
– – trigonométricas inversas, **393**
– – vectoriales, 737 – 738 , 742
– de orden *n*, **138**, **139**
– – y teorema de Clairaut, 805
– de orden superior, **138**–**141**, 804 – 806
– de series de potencias, **590**
– de una función constante, **104**
– de vector velocidad, 762
– def nición de, **101**–**102**
– direccionales, 823 – 828
– discontinuas, **156**
– en coordenadas polares, 632
– estimación, **104**
– – mediante mapas de contorno, 803
– normal, 1021
– parciales, 780 , 800 – 807 , 814 , 840
– – mixtas, 804
– – mixtas, igualdad de, 805
– primaria, 832 – 834
– primera, **139**, **203**–**204**
– segundas, **138**–**141**, **204**–**205**, 752
– – para una curva parametrizada, 624
– – trapecio, **465**–**466**
– – y vector aceleración, 762
– signo de la, **195**
– trigonométricas en grados, **152**
– y recta tangente, **102**
desarrollo(s)
– de Maclaurin, **599**–**600**
– de Taylor, **599**, **600**
– decimal, **1**–**2**
– – f nito, **1**
– en serie de potencias, **589**, **597**–**598**
Descartes, René, **3**, **189**
descomposición
– de cuña esférica, 907
– de rectángulo polar, 904
– en fracciones parciales, **438**-**441**, **442**–**445**
desigualdad triangular, **2**, 670
desigualdades e intervalos, **3**
desplazamiento, 628
– de una gráf ca, **8**
– y cambio de posición, **42**
determinante(s)
– jacobiano, 929 – 931
– – de aplicación inversa, 935 – 936
– menores, 694
– simbólicos, 694
– valor absoluto de, 698
– y área y volumen, 697 – 699
– y producto vectorial, 694
diagrama de fuerzas, 669
dicotomía de las series de términos positivos, **566**, **568**
diferencial longitud de arco, 954
diferenciales, **111**, **176**, **235**, **286**, 815
– mediante sustitución, **286**–**288**
dilatación térmica, **177**
dinámica de f uidos, 945
– computacional, **478**
Dirac, Paul, 947
dirección hacia arriba, a lo largo de una curva, 957
directriz, 650–653
Dirichlet, Lejeune, **581**
disco
– abierto, 793
– perforado, 793
discontinuidad, **62**–**64**
– de salto, **63**–**64**
– de una función, **183**
– evitable, **63**
– inf nita, **64**, **451**, **452**
discriminantes, **17**, 841 – 843 , 846 – 847
– y secciones cónicas, 656–657
distancia
– de frenado, **130**
– recorrida
– – velocidad y tiempo, **244**
– – y desplazamiento, 628
distribución de Boltzmann, 862
divergencia
– de integrales impropias, **448**
– de series armónicas, **561**
– de un campo vectorial, 1035
– de una serie inf nita, **555**
– de una sucesión, **544**
DNA, y curvatura, 752
dominios, **4**, **5**, **348**, **349**, 843
– abierto, 812 , 843
– – y arcoconexo, 948 , 949
– acotados, 843 , 844
– arcoconexo, 885
– – y no arcoconexo, 885
– cerrados, 843 , 878
– de integración, 868
– de los parámetros, 980 , 981
– descomposición de, 886
– integrales dobles sobre, 878 – 887
– simplemente conexas, 974 – 975
– sin agujeros, 1042
– y coordenadas cilíndricas, 920
– y coordenadas polares, 905
– y curvas de frontera, 1015
– y diferenciabilidad, 812
– y fórmula del cambio de variables, 934 – 935
– y fronteras, 1009, 1034
– y jacobianos, 929
– y *n* variables, 780 – 781
– y regiones entre curvas, 880 – 885
– y sucesiones, **543**
– y teorema de Green, 1009
Douglas, Paul, 855
Dürer, Albrecht, 636

e, **342**
– irracionalidad de, **609**
ecuación(es)
– de Korteweg-deVries, 810
– de la recta tangente, **102**
– de Lagrange, 854 – 855
– de Laplace, 990
– de Maxwell del electromagnetismo, 1043
– de onda, 1043

– de restricción, **217**
– de una elipse, 648
– de una hipérbola, 650
– de una parábola, 651
– de una recta, **13**, **16**
– – forma pendiente-ordenada, **13**, **16**, **17**
– – forma punto-punto, **16**
– del calor, 806
– del campo de Einstein, 775
– diferenciales, **237**, **513**–**518**
– – de Gompertz, **371**
– – de primer orden, **525**
– – de segundo orden, **404**
– – homogéneas, **540**
– – lineales, **513**, **514**
– – lineales de primer orden, **534**–**538**
– – logística, **529**–**532**
– – orden de, **514**
– – para funciones vectoriales, 743
– – serie de potencias solución de, **591**–**594**
– – solución general, **513**
– – solución particular, **237**
– – soluciones a, 776
– – y funciones exponenciales, **364**–**365**, **370**
– en derivadas parciales, 806
– generales de grado dos, 655–657
– lineal, **16**
– – de primer orden, **534**–**538**
– logística inversa, **528**, **533**
– paramétricas, 613–621
– – de una recta, 678 – 681
– polares, 634, 637, 654, 657
– – de secciones cónicas, 654
– punto-pendiente de una recta, **16**
– punto-punto de una recta, **16**
– representación gráf ca de, **6**
– segmentaria, **19**
– separables, **514**
efecto Aharonov-Bohm (efecto AB), 1030
efecto de un pequeño cambio, **175**
Einstein, Albert, **403**, **134**, **259**, **331**
– ley de suma de velocidades, **403**–**404**
eje(s), **3**
– conjugado de una elipse, 647
– de la parábola, 650
– de una elipse, 649
– de una hipérbola, 650
– horizontal, **334**–**335**
– – revolución alrededor de un, **316**–**318**
– vertical, revolución alrededor de un, **318**–**319**, **325**–**326**
– *x*, **3**
– – rotación alrededor del, **314**
– – simetría alrededor de, 646
– *y*, **3**
– – integración a lo largo de, **318**–**319**
– *z*, 714
elección inicial, **228**, **229**
electromagnetismo, 1043
electrones, trayectoria de, 1030
elemento
– de línea, 954
– de superf cie, 987
elipse, 647–649, 726 , 727
– área de, **292**, 1012
– def nición de foco-directriz, 653
– directriz de, 651
– en coordenadas polares, 654
– excentricidad de, 651
– parametrización de, 616–617
– propiedades de ref exión de, 655
– traslación, 649
elipsoides, 711
energía
– cinética, **67**, **336**, **450**, 917 – 918 , 972
– conservación de, **450**, 972 – 973
– potencial, 972 – 973
– y trabajo, **330**–**333**
enfriamiento, tasa de, **377**
epsilon (ϵ), **92**
equilibrio
– estable, **530**
– inestable, **530**
error, **179**
– en aproximación lineal, **175**–**176**, **179**–**180**
– en linealización, **178**–**179**
– porcentaje, **179**
escala, **14**
– Richter, **355**
escalar, 666
– y producto escalar, 684
esfera
– en dimesiones mayores, 898
– parametrización de, 854
– potencial gravitatorio de, 990
– volumen de, **365**, 898 – 899
– y gradiente, 825
– y superf cies de nivel, 788
espectros de absorción, **543**
espiral
– de Bernoulli, 746
– equiangular, 613
Euler, Leonhard, **342**, **404**, **450**, **561**
excentricidad
– de hipérbola, 653
– de la órbita de Mercurio, **233**
– de una sección cónica, 652
– y elipses, 652–653
exponentes
– negativos, **340**
– regla de los, **339**–**340**
expresiones con raíz cuadrada, **426**
extremos locales, **184**–**186**, 839 – 840

factor(es)
– de integración, **534**
– cuadráticos, **442**–**445**
– – irreducibles, **442**–**443**
– – reducibles, **442**
– – repetidos, **443**
– lineales distintos, **438**
familias ortogonales de curvas, **521**
Faraday, ley de la inducción, **136**, 1001– 1002
Fermat, Pierre de, **189**
Feynman, Richard, **131**, **330**
Fior, Antonio, **232**
f uido incompresible, 1039
f ujo, 996 , 999
– a través de un campo vectorial, 995 , 998 , 1040– 1042
– de Couette, 1014
– de f uidos, 999 – 1003
– de ingresos, **373**
– de tensiones (f ujo de Couette), 1014
– laminar, **308**
eje focal, de una elipse, 647
foco-directriz def nición (de cónicas), 652, 653
focos
– de una elipse, 647, 771
– de una hipérbola, 649
folium de Descartes, **161**, 624, 1018
formas
– diferenciales, teoría de, 1035
– cuadráticas, 846
fórmula(s)
– cuadrática, **17**
– de adición, **30**,
– de Bernoulli, **253**
– de desplazamiento, **30**
– de Euler, **405**
– de Frenet, 762
– de integración, **236**, **238**
– – de funciones trigonométricas inversas, **393**, **394**
– de la distancia, **3**–**4**, 639
– – en tres dimensiones, 674 – 675

– – y vectores, 664
– de reducción, **415**–**416**
– – para el seno y el coseno, **419**
– – para integrales, **415**–**416**
– del ángulo doble, **30**
– del cambio de variables, **286**, **288**–**289**, 926 – 931
– – en tres variables, 936
– – linealización de, **261**
– – propiedades de, **260**–**263**
– – y aplicaciones, 931 – 936
– – y teorema fundamental del cálculo, **267**
– del producto
– para integrales, **237**, **396**, **401**, **406**, **433**, **435**
– recursivas, *véase* fórmulas de reducción, **415**
fracciones, derivadas como, **150**
Franklin, Benjamin, **533**
Fraunhofer, patrón de difracción, **57**
bloqueo de variables, 711
fronteras, 1021
– del cuadrado, 843
– orientada, 1027
fuerza, **330**, **485**–**488**
– cálculo, **485**–**486**
– centrípeta, **521**
– como magnitud vectorial, 669
– componente tangencial de, 963
– de gravitación, 973
– de un f uido, **485**–**488**
– electrostática, 949
– en campo magnético, 697
– en una superf cie inclinada, **487**
– normal, 688
– orientadas, 1021
– resultante, 669
– y trabajo, 962 – 963
función(es)
– algebraicas, **22**
– arcoseno, **390**, **391**
– – derivada de, **392**
– área, **273**, **278**
– – acumulada
– armónicas, **554**, **567**, 1021
– cero (o raíz) de, **5**, **88**, **228**
– combinación lineal, **22**
– componentes, 729 , 765
– compuestas, **66**, **68**, **148**, **273**, **283**, 744 , 795
– – continuidad de, **66**
– – y regla de la cadena, 832
– con asíntotas, **36**
– con derivada cero, **188**, **195**
– con discontinuidad inf nita, **64**
– con valores escalares, 729
– con valores reales, 729
– – de *n* variables, 780
– construcción de nuevas funciones, **22**–**23**
– continuas, **62**–**68**, **64**–**66**, **67**–**68**, **115**, **183**–**184**, 844 , 870
– – integrabilidad de, **258**, A22
– – por la derecha, **63**
– – por la izquierda, **63**
– continuidad de, **62**–**63**
– coordenadas, 729
– coseno
– – circunferencia unidad, def nición de, **26**
– – derivada del, **144**
– – desarrollos de Maclaurin, **602**–**603**
– – período del, **27**
– – propiedades básicas del, **31**
– coste, **282**
– – medio, **138**
– crecientes, **6**, **195**
– cuadráticas, **17**, **19**, **444**
– – gráf ca de, **17**
– – hallar el mínimo de, **18**
– curvas de nivel de, 782 – 784
– de Bessel, **22**, **586**, **592**, **604**
– de dos o más variables, 780 – 788
– de Gudermann, **437**
– de producción de Cobb-Douglas, 855
– de varias variables, 780
– decreciente, **6**
– def nición de, **4**
– def nida a trozos, **63**–**64**
– def nidas implícitamente, **22**
– densidad de probabilidad, **459**
– densidad radial, **307**–**308**
– derivables, **102**, **110**, **115**, 811
– derivadas, **101**–**102**
– – como, **110**–**114**
– – parciales de orden superior, 804 – 807
– diferenciable continuamente, 982
– discontinuas, **62**–**64**, **100**
– elementales, **23**
– elíptica
– – de primera especie, **604**
– – de segunda especie, **609**
– escalares, límites, 737
– estrictamente creciente, **6**
– estrictamente decreciente, **6**
– exponenciales, **21**, **22**, **112**, **339**–**346**
– – con base *b*, **22**, **355**
– – continuidad de, **65**
– – derivadas de, **341**, **357**–**358**
– – diferenciales ecuaciones de, **365**
– – propiedades de, **339**–**340**
– – series de potencias de, **585**
– – y cálculos f nancieros, **371**–**372**
– extremos locales de, **184**–**186**
– formas indeterminadas de, **382**
– función parte entera, **67**
– gamma, **22**, **458**
– gaussianas, **461**, **465**
– gradiente de, 819
– gráf ca de, **5**
– hiperbólicas, **399**-**400**, **407**, **401**, **433**
– – derivadas de, **400**–**401**
– – inversas, **401**–**405**, **408**, **433**–**436**
– imagen de, **4**, **5**
– impares, **6**–**7**
– integrables, **258**, **508**
– integral(es)
– – con funciones vectoriales, 742
– – de superf cie de, 987
– – triples de, 891 – 898
– inversas, **347**–**353**
– – def nida, **348**
– – derivada de, A24
– – existencia de, **350**
– invertibles, **350**–**351**
– – derivadas de, **352**–**353**
– inyectivas, **349**-**351**, **353**
– – gráf ca de, **350**
– lineales, **13**, 782 , 786 – 787
– – derivada de, **104**
– – gráf ca de, **16**–**17**
– – mapa de contorno de, 785 – 786
– – trazas de, 780
– – y no lineales, **13**, **16**, **45**, **104**
– linealización, 811 – 812
– – local de, **37**
– localmente lineales, **116**
– logarítmicas, **22**, **355**–**356**, **361**
– longitud de arco, 746 , 747 , 749 , 753
– modelización de, **67**–**68**
– monótonas, **194**–**249**
– no decreciente, **195**
– no derivable, **185**
– no lineal, **15**
– numéricas, **5**
– pares, **6**, **7**
– paridad de, **6**–**7**
– periódicas, **27**, **28**
– polinomios, **21**
– potencial, **21**, 794 , 947 , 969 – 977
– – determinación, 974 – 977
– – existencia de, 974
– producto, integral iterada de, 874
– producto de, 874 , 795
– racional propia, **438**

– racionales, **21**, **22**, **65**, **83**, **438**, 794
– – continuas, 794
– – continuidad de, **68**
– radiales, 839
– raíz de, **88**
– rango o recorrido de, **4**, **5**
– representadas como una series de potencias, **586**
– seno
– – circunferencia unidad, def nición de, **26**
– – derivada de, **144**–**145**
– – desarrollo de Maclaurin de, **600**–**601**
– – período de, **27**
– – propiedades básicas de, **31**
– sucesiones def nidas por, **545**
– tangente
– – derivada de, **145**
– – integral de, **429**–**430**
– tipos básicos de, **21**–**23**
– trascendentes, **22**
– trigonométricas, **22**, **25**–**31**, **144**–**146**, **188**, **390**, **400**, **401**, **418**
– – derivadas de, **145**, **401**, **435**
– – integrales para, **237**
– trigonométricas inversas, **21**, **390**–**395**, **415**
– – derivadas de, **393**–**394**
– – fórmulas de integración, **394**
– valor absoluto
– – integral de, **260**
– – no derivabilidad de, **116**
– valor medio de, **309**–**310**, **318**–**320**
– valores extremos de, **183**–**189**
– vectoriales, 729 – 733 , 737 – 745 , 772
– – cálculo de, 746 – 747
– – continuas, 750
– – continuidad de, 748
– – de longitud constante, 767
– – derivadas de, 749
– – ecuaciones diferenciales de, 755 , 785
– – límites de, 747 – 748
– – ortogonalidad de, 740 – 741
– – productos escalar y vectorial de, 754
– – teorema fundamental del cálculo, 743
– velocidad, 743 , 756
– y diferenciabilidad, 811
– y gráf cas de dos variables, 781 – 783
– y primitivas, **234**
– y teorema de compresión, **76**–**79**

galaxias Antennae, 775
Galilei, Galileo, **41**, **134**, 775 *véase también* ley de Galileo
Gauss, C. F., **259**
generación con vectores, 667
Gompertz, Benjamin, **371**
– ecuaciones diferenciales, **371**
grado de un polinomio, **21**
grados, **25**, **26**
gráf ca(s)
– amplitud de, **8**, **9**
– aproximación del área por debajo de, **244**–**246**
– de curva cúbica torcida, 755
– de funciones inyectivas, **349**
– de funciones trigonométricas, **28**
– de una función, **5**
– – cuadrática, **17**
– – lineal, **13**, **16**
– – no lineal, **15**
– – parametrización de, 982
– forma de, **201**–**205**
– integral de superf cie de, 998
– polar, 642
– ramas de, **159**
– reescalado (cambio de escala) de, **8**–**9**
– traslación (desplazamiento de), **7**–**8**
– trazado, **7**, **208**–**213**
– y escalas, **14**
– y rectángulos de visualización, **34**
gravedad
– ley cuadrática inversa, **331**
– trabajo contra la, 973
– y aceleración, **132**, **140**
– y movimiento, **131**
– y trabajo, **352**
gravitación, ley universal de Newton, 772
Gregory, James, **421**, **599**

Hamilton, William Rowan, 778
hélice
– curva descrita, 731 – 732
– vector unitario normal a, 756
Herón de Alejandría, **220**
hipérbolas, **399**, 647, 651, 653, 712 , 717
– asíntotas de, 652, 660
– directriz de, 650
– ecuación de, 665
– excentricidad de, 650
– foco-directriz def nición de, 653
– propiedades de ref exión de, 655
– trazas horizontales, 784
hiperboloide, **322**, 713 - 714 , 788
hipervolumen, 898 – 899
hipótesis de Riemann, **259**
Hooke, Robert, **331**
Huxley, Julian, **5**
Huygens, Christiaan, **150**, **509**, 618

identidades, **399**
– trigonométricas, **29**–**31**
imagen, 928 – 929
inclinación de una recta, **13**–**14**
independencia respecto a la trayectoria (de un campo vectorial), 969 , 971
indeterminación, **72**, **385**
índice
– de la trayectoria de la curva, 977
– de masa corporal, 815
– de una serie inf nita, **555**
– de una sucesión, **543**
instrumento coductividad-temperatura-profundidad, 780
integrabilidad, 870
integración
– constante de, **235**, **515**, **535**
– de series de potencias, **590**
– doble, **307**
– en coordenadas polares, 902 – 910
– intercambio de límites de, **261**–**262**
– límites de, **259**, **373**
– mediante
– – fracciones parciales, **438**
– – sustitución, **285**–**290**
– – sustitución trigonométrica, **426**–**431**
– múltiple, 866 – 886
– numérica, **413**–**438**, **465**–**471**
– para calcular trabajo, **330**
– por partes, **413**
– sobre
– – parte de una circunferencia, 879
– – rectángulos, 880
– – una caja, 891
– término a término, **590**
– vectorial, 742 – 743
– y área de una región irregular, **244**
– y búsqueda de primitivas, **244**
– y cálculo de volúmenes, **304**–**305**
– y diferenciación, **275**
integral(es)
– alrededor de una trayectoria cerrada, 970
– aplicaciones de, **296**–**326**
– como variación neta de una tasa, **279**, **288**
– comparación de, **453**
– de línea, 952 – 964 , 1009– 1011, 1025
– – escalares, 952 – 955
– – teorema fundamental para, 1034
– – vectoriales, 957 – 963
– – y teorema de Green, 1009– 1010, 1011–1012
– – y teorema de Stokes, 1026

– de superf cie, 981 – 990 , 987 , 988 , 990 , 991 , 997 – 1004, 1026, 1030
– – de campos vectoriales, 996 – 1003
– – sobre una gráf ca, 998
– – vectorial, 996
– de un vector gradiente, 947
– de una constante, **260**
– de una variable, 866 , 874
– de valores absolutos, **271**
– de velocidad, **279**–**280**
– def nidas, **257**–**263**, **267**, **270**, **273**, **414**
– derivación, **275**
– dobles, 866 , 868 – 874 , 902 – 904 , 906
– – linealización de, 870
– – sobre dominios más generales, 878 – 887
– – y cambio de variables fórmula, 926
– elíptica de segunda especie, **609**
– en una variable, 866 , 873
– fórmulas de reducción, **415**–**416**
– impropias, **447**–**458**
– – absolutamente convergente, **458**
– – convergencia de, **449**
– – de x^p, **452**
– – doblemente inf nita, **448**
– – test de comparación, **453**
– indef nidas, **235**–**238**, **267**
– – linealización de, **236**
– – y teorema fundamental del cálculo (FTC), **268**–**269**
– inf nitas, **448**–**449**, **455**
– interiores, 871
– iteradas, 871 – 876 , 882 – 883
– – integrales triples, 891 – 893
– longitud de arco, **478**–**480**, 627, 628
– múltiples, 866 – 874
– – impropias, 913
– primitivas como, **275**, **279**
– sobre superf cies vectoriales, 980
– sobre una semiesfera, 997
– teoremas del valor medio para, 885
– trigonométricas, **236**, **418**–**423**
– – básicas, **236**–**237**
– – tabla de, **418**–**422**, **423**
– triples, 891 – 900 , 905 – 906 , 907 – 910
– – en coordenadas cilíndricas, 905 – 907
– – en coordenadas esféricas, 907 – 910
– y fórmula del cambio de variables, **286**, **288**
– y volumen, **304**–**306**, **311**, **314**–**320**
integrandos, **235**, **259**
– con esenciales discontinuidades, **451**
– e integración por partes, **413**
– e integrales impropias, **451**
intensidad de la luz, **369**
interés compuesto, **371**–**373**
– continuo, **372**
intervalo(s)
– abierto, **2**, **3**, **184**, **219**
– adyacentes, **262**
– cerrados, **2**, **3**, **184**, **186**
– – optimización en, **186**–**188**
– – optimización en intervalos abiertos, **220**–**221**
– de contorno, 784 , 786 , 787 , 809
– de crecimiento y decrecimiento, **195**, **197**
– de tiempo, y velocidad media, **41**–**42**, **43**
– descripción mediante desigualdades, **3**
– inf nito, **2**, **448**, **451**
– notación estándar para, **2**
– punto medio de, **3**
– puntos críticos y puntos extremos de, **219**
– radio de, **3**
– semiabierto, **2**
– valores de prueba dentro de, **209**, **210**, **211**
– valores extremos en, **183**
– y de puntos prueba, **197**
involuta, 631
isoclina, **523**
iteración, método de Newton, **228**–**230**

julio, **330**

Kepler, Johannes, **41**, **223**, **331**, 771 , 775
Kleiber, ley, **137**
Koch, Helge von, **565**

Lagrange, Joseph Louis, **111**
láminas, **492**–**494**, **496**
Laplace, Pierre Simon, Marqués de, **404**, 990
latitud, 723
Leibniz, Gottfried Wilhelm von, **22**, **103**, **111**, **123**, **150**, **189**, **259**, **286**, **561**, **600**, 618
– notación, **111**, **122**, **128**, **139**, **150**, **153**, **286**
– – derivadas de funciones vectoriales, 738
– – derivadas de orden superior, **139**
– – derivadas parciales, 800
– – derivadas parciales de orden superior, 798
– – diferenciales, **286**
– – e integral def nida, **259**
– – regla de la cadena, **150**
lemniscata, **163**, 639
ley(es)
– de Beer–Lambert, **372**
– de Coulomb, 956
– de enfriamiento de Newton, **377**–**378**, **525**
– de Galileo, **403**
– de Gauss, 990 , 1041
– de Hooke, **331**
– de igual área en igual tiempo, 772
– de Kepler, **41**, **331**, 772 – 775
– de la conservación de la Energía, 947 , 972
– de la gravitación universal de Newton, **496**, 772
– de la palanca de Arquímedes, **496**
– de las elipses, 772 , 774 – 775
– de logaritmos, **356**
– de los cosenos, **30**, 685 , 693
– de Moore, **339**, **372**
– de Newton, 775
– – y conservación de energía, 777 , 972
– de Ohm, **127**, 800
– de Poiseuille del f ujo laminar, **224**, **308**
– de radiación de Planck, **458**
– de Snell, **220**
– de Torricelli, **517**
– del paralelogramo, 665 – 666 , 669 , 671 , 677
– del período de movimiento, 772
– demostración de, 774 – 775
– universales del movimiento y gravitación, **41**, 772
L'Hôpital, Guillaume François Antoine, Marqués de, **382**
– regla de, **87**, **382**–**387**
– – demostración de, **387**
– – para límites, **382**–**387**, **449**, **450**
Libby, Willard, **368**
límites, **40**–**46**, 793
– cálculo
– – algebraicos, **71**–**75**
– – de áreas como, **251**
– – mediante sustitución, **66**–**68**
– – por sustitución, 795
– de aproximaciones, **250**–**253**
– – poligonales, 626
– de funciones escalares, 737
– de funciones vectoriales, 737 – 739
– de integración, **259**, **261**, **288**, **395**, **403**, **436**
– de sumas de Riemann, 867 – 868
– de una sucesión, **545**–**546**
– def nición, **49**–**50**
– – formal, **91**–**96**
– discontinuas, **62**
– en el inf nito, **81**–**85**
– en varias variables, 792 – 794
– examen de un, 797
– indeterminados, **72**
– inf nitos, **53**–**54**
– investigación gráf ca y numérica de, **50**–**52**
– laterales, **53**–**54**, **451**
– necesidad de los, **105**
– reglas básicas, **58**–**60**

– reglas de linealización para, **557**
– trigonométricos, **76**–**79**
– y continuidad, **62**–**68**
– y velocidad instantánea, **40**
linealidad
– de integrales
– – de línea, 961
– – indef nidas, **236**
– de los sumatorios, **247**
– local, **37**, **115**–**117**, **180**
linealización, **178**–**180**
– de una función, 811 – 812
– error en, **179**
– local, **55**, **212**, 812
– – de funciones diferenciables, **180**
líneas de cuadrícula, en coordenadas polares, 632
logaritmo(s), **355**–**362**
– cálculo de, **357**–**359**
– con base *b*, **355**, **356**
– derivadas de, **357**–**358**
– leyes de, **356**–**357**
– naturales, **58**, **356**, **358**, **360**
longitud(es), 723
– de arco, **478**–**482**, 626–627, 747
– – de una curva en el plano, 747
– – de una trayectoria, 747
– de onda
– – de Balmer, **545**–**546**
– – del átomo de hidrógeno, **543**
– de un vector, 663 , 676
– y producto escalar, 685

Maclaurin, Colin, **502**, **599** *véase también* polinomios; serie(s); desarrollo(s)
Madhava, **599**
magnitud vectorial, 663 , 669
mapa de proyección de Mercator, **421**
mapas de contorno, 784 – 788
– de una función lineal, 786 – 787
– de una silla, 715
– para campo vectorial conservativo, 978
– y derivada direccional, 826
– y estimación de derivadas parciales, 803
– y puntos críticos, 840
masa(s)
– cálculo por la densidad de masa, **306**–**307**
– centro de, **493**, 915
– e integrales triples, 914 – 915
– total, **306**–**307**, 955
– – integrales de línea escalares como, 955 – 956
– puntuales, **492**
matrices y determinantes, teoría de, 674
matriz, 674
máximo
– local, **184**, **186**, **196**, **204**, 839 – 841
– y mínimo absolutos, **183**
Maxwell, James Clerk, 819 , 1043
media
– aritmético-geométrica, **554**
– ponderada y regla de Simpson, **469**
mediana, de un triángulo, **500**
medida de ángulos, radianes y grados, **25**, **26**
Mengoli, Pietro, **561**
menores, 694
Mercurio, órbita de, 776
meridiano cero, 723
método
– de aceleración de Kummer, **574**
– de bisección, **88**–**89**
– de Euler, **522**, **525**–**527**
– de las capas, **323**, **328**
– de las fracciones parciales, **438**–**445**
– de Newton, **228**–**230**
– de sustitución, **66**–**68**, **286**
– del disco (para cálculo de volumen), **314**–**316**
– del punto medio de Euler, **529**
microchips, comprobación de la f abilidad de, 802
mínima distancia, principio de, **220**
mínimo local, **184**, **186**, **196**, **204**, 839 – 843
modelización mediante funciones continuas, **67**
modelo(s)
– de Glatzmaier-Roberts, 902
– y ecuaciones diferenciales, **527**
momento(s), **493**
– adivitividad de, **491**, **497**
– angular, 746 , 772
– de la circunferencia, **495**
– del triángulo, **495**
– *x*, **495**
– *y*, **495**
montañas, y mapas de contorno, 786 – 787
montañas rusas, y curvatura, 752
Moore, Gordon, **339**, **372**
movimiento
– circular
– – no uniforme, 764 – 765 , 767
– – uniforme, 764 – 765
– en tres dimensiones, 762 – 765
– ley(es)
– – del período de, 772
– – de Newton, **41**, **134**
– – para la caída de objetos, **134**
– lineal, **41**, **131**–**132**
– planetario, leyes, 771 – 774
– – de Kepler, **41**, 771
– segunda ley de Newton, 772
– y gravedad, **132**
multiplicación
– de series de Taylor, **601**
– por el conjugado, **73**
– por un escalar, 666 , 677
multiplicadores de Lagrange
– con varias restricciones, 857
– en tres variables, 856 – 857

n variables, 780
nabla, 819 , 1022
newton, **330**, **452**, 962
Newton, Isaac, **41**, **103**, **150**, **267**, **374**, **331**, **524**, **602**, 771 , 990
– leyes del movimiento, **41**, **134**
newton-metro (N-m), 962
norma, *véase también* perpendicular
– de partición, **259**
– de un vector, *véase* longitud; magnitud
notación
– "prima", **111**
– sumatorio, **247**–**250**
números
– *e*, **339**
– Bernoulli, **253**
– complejos, **404**
– – imaginarios, **404**
– irracionales, **1**
– naturales, **1**
– racionales, **1**
– reales, **1**
– – distancia entre, **2**
– – propiedad de completitud de, **89**, **184**, A9
– – valor absoluto de, **2**
– sucesiones de, **543**

octantes, 674
onda electromagnética, 1043
onda sinusoidal, **27**
operaciones
– de vectores, usando componentes, 666 – 672
– inversas, integración y diferenciación, **275**
– lineales, y rotacional, 1023
operador de Laplace (Δ)M, 810 , 839 , 990 , 1021, 1043
optimización, **183**
– con multiplicadores de Lagrange, 853 – 857
– en un intervalo abierto, **184**
– en varias variables, 839 – 847
órbitas

– hiperbólicas, 776
– planetarias, 771 , 775
– perihelio de, 659
– y ley de las elipses, 774 – 775
orden, de una ecuación diferencial, **514**
ordenada, *véase* coordenada *y*
Oresme, Nicole d', **561**
orientación
– de la frontera, 1009, 1021
– inversa, de integrales de línea, 961
origen, **1**, **3**
ortogonales vectores, 688
ortogonalidad
– comprobación de la, 686
– de funciones vectoriales, 742
óvalo, 761

p-integral, **449**, **451**
p-series, **567**
pájaros
– migración, **217**, **226**
– vuelo, **36**
parábola, **17**, 650–651, 655
– excentricidad de, 651
– gráf ca de la función cuadrática, **18**
– propiedades de ref exión de, 654–655
– trazas verticales, 782
paraboloides, 714 – 715
– elípticos, 714
– hiperbólicos, 714 – 715
paralelepípedo, 697 – 698
paralelogramo, 667
– área de, 985 – 986
– curvado, 986
parametrización, 613
– de curva de integral de línea, 953
– de integral de línea vectorial, 957
– de la esfera, 985
– de la gráf ca de una función, 982
– de un cilindro, 982
– de un cono, 981
– por longitud de arco, 748 – 752 , 754
– regular, 752 , 858 , 958
– velocidad unitaria, 749
parametrización de vectores, 679 , 686 , 692 , 759
– de la cicloide, 741
parámetros, 613, 729
– y ecuaciones paramétricas, 613
paridad, de una función, **6**–**7**, **399**
particiones, **258**–**259**
– regulares, 869 , 872
Pascal, Blaise, **162**, 618
– caracol de, **162**
paso del tiempo, **525**, **526**–**527**
pendiente de una recta, **14**
– y ecuación polar, 634
pendiente negativa, **14**
pendiente-ordenada, forma de una ecuación, **13**
perihelio (de órbita planetaria), 659
período (de una órbita), 659, 771
pies por libras (ft-lb), **330**, 962
pinturas de la cueva de Lascaux, **339**, **368**
pirámide, volumen, **305**
planímetro, 1012
plano(s)
– coordenados, 674
– – trazas en, 711
– determinado por tres puntos, 707
– ecuación en forma punto-normal, 705
– en tres dimensiones, 705 – 708
– intersección con una recta, 707
– osculatriz, 757
– paralelos a un plano dado, 706
– tangente, 812 , 982 – 983
– – en un extremo local, 839
– – hallar una ecuación de, 828
– – y diferenciabilidad, 814
– trazas, 708
– *xy*, 887 – 888
– *xz*, 888
– *yz*, 905 – 906
Poiseuille, Jean, **308**
polígono, área de, 1020
polinomios, **21**, **23**
– Bernstein, 620
– Chebyshev, **38**
– coef cientes de, **21**
– continuidad de, **65**
– continuos, 794
– cuadráticos, **17**-**18**, **209**, **442**
– de Maclaurin, **500**, **502**, **503**, **504**, **506**
– de Taylor, **499**–**508**, **598**, **599**, **601**
– grado de un, **21**, **23**
– gráf cas de, **208**–**211**
porcentaje de error, **179**
posición estándar
– de cuádricas, 711
– de un parábola, 651
– de una elipse, 648
– de una hipérbola, 649
posición, y tasas de cambio, **40**
positrón, 947
potencia de una potencia, **340**
potencial(es)
– escalares, 1030
– gravitatorio, 972 , 990 , 990
– vectoriales, 1027, 1030, 1042
– – para un solenoide, 1028, 1030
presión, **485**
– atmosférica, **369**–**370**, **372**
– de un f uido, **485**–**487**
– y profundidad, **485**
primer octante, 674
primera derivada, **139**
– y puntos de inf exión, **202**–**203**
primera diferencia, **24**
primera ley de Kepler, 659
primitivas, **234**–**238**, **270**, **285**, 742 – 743
– cálculo de integrales def nidas con, **273**
– como integrales, **275**, **279**
– def nición de, **234**
– general, **234**
– y teorema fundamental del cálculo (FTC), **269**–**270**
principal, **368**
principio
– de equivalencia, **134**
– de inducción de, A13
– de mínima distancia, **220**
– de simetría, **494**, **496**
– de tiempo mínimo, **220**
problemas
– de mezclas, **536**
– de optimización, **217**, **220**, **221**
– de valores iniciales, **237**
– – solución de, **237**
– del barril de vino de Kepler, **223**
producto(s), **22**, **23**, **285**
– escalar, 984 – 985
– – propiedades de, 685
– – reglas del producto para, 742
– – y ángulo entre vectores, 684 – 685
– – y comprobación de la ortogonalidad, 686 – 687
– interno *véase* producto escalar
– mixto, 697
– vectorial, 694 – 700
– – anticonmutatividad de, 696
– – básicos propiedades de, 696
– – demostraciones de propiedades de, 699 – 700
– – descripción geométrica de, 695
– – fórmula del producto para, 740
– – reglas del producto, 739
– – y área y volumen, 697 – 699

– – y propiedad distributiva, 696 – 697
progresión geométrica, **546**
propiedad(es)
– asociativa, 667
– braquistócrona, 618
– conmutativa, 667
– de completitud de números reales, **89**, **184**
– de la continuidad, **64**–**66**
– de la menor cota superior, **587**
– de la suma, **58**–**60**, **95**, 794
– – demostración de, **95**
– de múltiplo constante, **58**, **59**
– del cociente, **58**, 794
– del producto, **58-59**, 794
– distributiva, 687
– – y producto escalar, 685
– – y producto vectorial, - 695
– – para escalares, 667
proporcionalidad, constante de, 772
prospección sísmica, **227**
protones
– en campo magnético, 697
proyección, 687
– de regiones sólidas, 893
psi (ψ), 827
punto(s)
– base (en el plano), 663
– críticos, **184**–**185**, **196**, **197**
– – criterio de la primera derivada para, **196**–**197**
– – estudio, **196**–**197**
– – estudio de, **196**–**197**
– – fuera del intervalo, **186**–**187**
– – segunda derivada para, **204**–**205**
– – sin cambio de signo, **198**
– – y problemas de optimización, **220**
– de inf exión, **186**, **202**–**204**
– de transición, de gráf cas, **208**
– extremos, **187**–**188**
– frontera de un dominio, 843
– interior de un dominio, 843
– intermedios, 867 , 868 , 869 , 879
– medio, fórmula, 680
– medios, **467**, **469**
– – de intervalos, **3**
– o números reales, **1**
– silla, 841 , 842

Quick Sort, **385**

Römer, Olaf, 1043
radianes, **25**, **26**
radio
– de intervalos, **3**
– de convergencia, **586**–**594**
– – inf nito, **594**
– de curvatura, 757
Radón-**222**, **367**
raíces cuadradas, con convergencia cuadrática a, **233**
raíces de funciones, **5**, **88**, **230**
raíces dobles, **17**, **18**
raíz (cero), de una función, **5**, **88**, **228**
ramas (de un gráf ca), **159**
rampa helicoidal, 984
rango (de una función), **4**, **5**, **347**, 926
razón, **546**, **557**
recíprocos, **21**
recta(s)
– paralelas, **14**
– paramétricas, 615
– perpendiculares, **14**
– tangentes, **40**–**41**, **102**, 740 , 811
– – def nida, **102**
– – límite de rectas secantes, **43**, **101**
– – para una curva en forma paramétrica, 618–619
– – pendientes de, **43**, **44**, **101**, 619, 808 , 825
– – verticales, **98**
– – y ecuación de la potencia, **114**
– dirección en el plano, 706 – 707
– ecuación de, **13**–**16**
– ecuaciones paramétricas de, 678 – 681
– forma punto-direction, 679
– horizontal y vertical, **14**
– intersección, 680
– – con un plano, 707
– paralelas, **14**
– parametrizaciones vectoriales de, 730
– perpendiculares, **14**
– vertical, **14**
– secante, **43**, **101**–**102**
– – pendiente de, **101**
– – y teorema del valor medio, **194**
– y curvatura cero, 753
– y pendiente de, **13**–**15**
– y trazas de una función lineal, 786
rectángulos
– como dominios de integración, 866
– curvilíneos, 928
– de visualización, **34**
– extremo inferior, **248**–**249**
– integración sobre, 881
– polares, 902
– – descomposición de, 904
– y aproximación
– – de una área, **245**–**246**
– – lineal, 931
reescalado
– de una gráf ca (cambio de escala), **8**
– – y secciones cónicas, 652
– horizontal, **8**, **9**
– vertical, **8**–**9**
ref exión (de una función), **351**
región(es) *véase también* dominios
– horizontalmente simple, 880 , 882 , 896
– polares, 904
– simples, 880
– sin agujeros, 1042
– sólidas, 892 – 894
– – integración sobre, 894 – 895
– verticalmente simple, 880 – 889
regla(s)
– de derivación, 738 – 739
– de la cadena, **111**, **122**, **148**–**153**, **275**, 739 , 804 , 831 – 834
– – combinada con el teorema fundamental del cálculo (FTC), **275**
– – demostración de, **152**
– – en derivadas parciales, 801
– – para gradientes, 820
– – para Trayectorias, 820 – 822
– – y diferenciación implícita, 834 – 835
– de la diferencia, **113**
– de la mano derecha, 674 , 695
– de la potencia, **112**–**113**, **114**, **117**, **150**
– – para derivadas, **235**
– – para exponentes fraccionarios, **156**
– – para integrales, **235**
– – generalizada, **150**
– de la suma, **113**–**114**, **236**, 738 – 739
– de la tangente, *véase* regla del punto medio, **466**
– de los exponentes, **339**–**341**
– de Guldin, *véase* teorema de Pappus
– de Simpson, **469**, **520**
– del banquero, **376**
– del cociente, **122**, **124**, **145**
– – y cálculo de derivadas, **122**
– del desplazamiento y cambio de escala, **151**, **153**
– del límite, **51**, **58**–**60**, **95**, 794
– – para sucesiones, **547**
– del múltiplo, **236**
– – constante, **113**, 739
– del producto, **122**, **140**, 739 – 740 , 754
– – para gradientes, 820
– – y cálculo de derivadas, **122**–**124**
– del punto medio, **467**
– del trapecio, **465**
– exponencial general, **151**

– para la suma para límites, **113**
regresión lineal, **16**
relación lineal, **15**–**16**
relación recurrente, **592**–**593**
relaciones ortogonales, **426**
representación gráf ca, **3**–**9**
– con calculadoras, **33**–**37**
– de ecuaciones, **6**
– de funciones de dos variables, 781 – 782
resistencia del aire, **377**, **380**, **384**
resta de vectores, 665
resto de orden *n*, **507**
restricciones, 857
– y multiplicadores de Lagrange, 857
revolución científ ca, 771
Riemann, Georg Friedrich, **259**
rotacional
– de un campo vectorial, 1013
– escalar, 1030
– valor constante de, 1013
– vectorial, 1017

secante, **28**
– hiperbólica, **399**
– integral de, **421**
secciones
– cónicas, 647, 711
– – degeneradas, 655
– – ecuaciones polares de, 654, 775 – 776
– – excentricidad de, 651
– – foco-directriz def nición de, 653
– – no degeneradas, 655
– – propiedades de ref exión de, 654–655
– transversales, *véase también* coronas circulares
– – horizontales, y volumen, **304**, **305**
– – verticales, y volumen, **319**
segunda ley
– de Kepler, **233**, 772 – 773
– demostración de, 773
– de Newton, **336**, 763 , 973
semiesfera, integrales sobre una, 999
semivida, **367**
separación de variables, **514**
serie(s)
– absolutamente convergente, **575**–**576**
– alternadas, **576**
– armónicas, **561**, **567**, **578**–**579**
– – alternadas, **578**–**579**
– divergencia de, **581**
– binomial, **602**, **604**
– condicionalmente convergente, **576**
– convergentes, **555**, **561**
– de Balmer, **543**, **546**
– de Fourier, **422**
– de Gregory–Leibniz, **543**
– de Maclaurin, **598**, **600**–**601**, **603**, **605**
– de potencias, **585**–**594**, **597**
– – derivación, **590**
– – derivación término a término, **590**
– – e integración, **590**
– – hallar el radio de convergencia, **587**
– – intervalo de convergencia de, **586**
– – representación de funciones por, **562**
– – soluciones de ecuaciones diferenciales, **591**–**594**
– de Taylor, **597**–**609**, *véase también* Serie de Maclaurin
– – integración de, **601**
– – métodos directos para hallar, **600**–**602**
– – multiplicación de, **601**
– de términos positivos, **565**–**571**
– diferencia con una sucesión, **556**
– divergentes, **555**, **559**–**560**
– geométricas, **556**, **557**, **558**, **559**, **561**, **589**
– – suma de, **558**
– inf nitas, **543**, **554**–**561**
– – convergencia de, **555**
– – linealización de, **557**
– – suma de, **554**–**562**
– *p*-series, **567**
– sumas parciales de, **554**
– telescópicas, **555**–**556**
sigma (Σ), **247**
silla, 785
– de mono, 843
simetría, **494**
– y parametrización, 613
Simpson, Thomas, **223**
sistema(s)
– algebraicos informáticos, **419**, **445**, **469**, **470**, 782
– – y método de Euler, **526**–**527**
– de coordenadas
– – superf cies de nivel de, 720
– – tridimensional, 674
– orientado positivamente, 695
solenoide, potencial vectorial para, 1028, 1029
sólidos
– de revolución, **314**
– – volumen de, **314**–**319**
– secciones transversales de, **314**
– volumen de, **304**
Solidum, Renato, **355**
solución
– de equilibrio, **530**
– general (de una ecuación diferencial), **513**
– particular (de ecuaciones diferenciales), **237**
sonido, velocidad del, **44**
subintervalos, **245**
sucesiones, **543**
– acotadas, **548**–**551**
– convergencia de, **544**–**545**, **549**, **550**
– convergente, **548**, **549**–**586**
– creciente, **549**
– de Fibonacci, A16
– decreciente, **550**
– def nida por una función, **545**
– def nidas recursivamente, **543**–**544**
– diferencia con series, **556**
– divergencia de, **544**, **549**
– divergentes, **549**
– geométricas, **546**
– límites de, **544**–**545**, **546**
– monótonas acotadas, **550**
– no acotadas, **549**
– propiedades de los límites de, **547**
– recursivas, **544**, **550**
– teorema de compresión para, **547**
– término de, **543**
suma(s)
– de potencias, **250**, **252**, **253**
– de Riemann, **257**–**263**, **376**, **481**, **483**, **486**, **490**, 626, 641, 868 , 879
– – dobles integral límite, 866
– – e integrales de línea escalares, 952 – 953
– – e integrales dobles, 986
– – y áreas de rectángulos, 866 – 868
– de vectores, 665 – 671 , 677
– parciales, **554**, **555**, **566**, **576**–**577**
– – de índice impar, **577**
– – de índice par, **577**
– – de series de términos positivos, **566**
superf cies, 1042
– apunta hacia arriba, 985
– carga total sobre, 989 – 990
– cerradas, 1021
– cuádricas, 715 – 716 , 711
– – degeneradas, 715
– – no degeneradas, 715
– de nivel, 720
– – de un sistema de coordenadas, 720 – 722
– – de una función de tres variables, 788
– – en coordenadas esféricas, 722
– de revolución, **480**, 994
– frontera de, 1021
– helicoidal, 984
– independencia para campos vectoriales rotacionales, 1027
– intersección de, 730 – 731
– orientación de, 1021

– orientadas, 995 , 997
– parametrización de la intersección de, 730 – 731
– parametrizada, 980 – 991
– suaves, 1008
– tasa de f ujo de un f uido a través de, 1000
– y fronteras, 1027
– y teorema de Stokes, 1009
sustitución
– con funciones hiperbólicas, **433**
– hiperbólica, **434**
– mediante diferenciales, **286**–**289**
– trigonométrica, **426**–**430**
– y cálculo de límites, 794 – 795
– y fracciones parciales, **438**
– y serie de Maclaurin, **598**

Tait, P. G., 819
tangente(s), **28**
– aproximación por la recta tangente (aproximación lineal), **176**
– hiperbólica, **401**, **402**
– unitaria, 752
– verticales, **116**
Tartaglia, Niccolo, **222**, **232**
tasa de f ujo, **307**–**308**, 999 – 1003
– de un f uido a través de una superf cie, 1000
tasa de interés, **371**, **372**
tasa de variación, **14**, **40**, **44**, **51**, **163**–**167**, **517**
– de una función, **128**–**133**
– instantánea, **44**–**45**, **128**, **44**, **128**
– media, **44**–**45**, 786 – 787 , 802 – 804
– y crecimiento y decrecimiento exponencial, **364**
– y derivadas parciales, 800
– y notación de Leibniz, **128**
tasas relacionadas, **163**–**167**
Taylor, Brook, **499**
tecnología de computadores, **33**
temperatura, derivada direccional de, 825
teorema
– binomial, **602**, **603** A15
– de Apolonio, **121**
– de Bolzano-Weierstrass, A10
– de Clairaut, 805 , A24
– de comparación (para Integrales), **263**
– de compresión, **76**–**79**
– – para sucesiones, **543**–**544**
– de Fermat en extremos locales, **186**, 840
– de Fubini, 872 – 873 , 881 , 892
– de Gauss, *véase* teorema de la divergencia
– de Gauss-Ostrogradsky, *véase* teorema de la divergencia
– de Green, 1009– 1016, 1022, 1024
– de la divergencia, 1034– 1043
– de la función implícita, 835 , 854
– de los valores intermedios, **87**–**89**, **310**, A12
– de Pappus, 925 , 995
– de Pitágoras, **391**, 674 – 675 , 766
– de Rolle, **188**–**189**, **198**
– – y teorema del valor medio, **194**
– de Stokes, 1021– 1030
– de Taylor, **505**
– del bocadillo de jamóm, **91**
– del trabajo-energía, **336**
– del valor medio, **194**–**195**, **198**, **267**, **310**, **479**, **561**, 626
– – para integrales, 887
– – para integrales dobles, 885
– estudio, A6
– fundamental
– – para integrales de línea, 1034
– – para campos vectoriales conservativos, 969 – 970 ,
– – del cálculo (FTC), **267**–**270**, **273**–**276**, **316**, 747 , 866 , 969 , 1009, 1010, 1034–1035
– – demostración de, **279**
– unicidad, **515**
teoría
– de Galois, **228**
– especial de la relatividad, **403**
– general de la relatividad, **134**, **259**, 775
tercera derivada, **139**
tercera ley de Kepler, 632, 659
término cruzado, 655
término general (de una sucesión), **543**
– en notación sumatoria, **247**–**249**
test
– de comparación, **449**, **453**–**454**
– de la recta horizontal, **350**
textos cuneiformes, completar cuadrados, **18**
tiempo
– de duplicación, **367**
– medio de decaimiento, **371**
– mínimo, principio de, **220**
tierra, campo magnético, 902
Tonomura, Akira, 1036
toro, **322**
– área de, 995
torsión, 746 , 761
trabajo
– cálculo mediante integración, **331**
– def nición de, **330**–**331**
– y energía, **330**–**333**
– y fuerza, 962 – 963
– y gravedad, **330**, **331**, **332**, 973
tractriz, **322**, **520**, 625, 629
transbordador espacial, 762
– órbita de, 771
transductores de posición de cable, **177**
transformaciones, *véase* aplicaciones
transformada de Laplace, **457**
trapecios
– aproximación a áreas debajo de gráf cas, **465**
– área de, **466**
traslación (desplazamiento)
– de un vector, 663 , 676
– de una gráf ca, **8**
– horizontal, **8**
– vertical, **7**–**8**
trayectoria, 729 – 730
– de ascenso más pronunciado, 788
– de descenso más pronunciado, 788
– longitud de arco de, 747
– parametrización de, 748
– regla de la cadena para, 820 – 822
trazas, 707 , 708 , 782 – 784
– de hiperboloides de una hoja, 713
– de superf cies, 712
– de un elipsoide, 712
– horizontales, 784 – 785
triángulo(s)
– de Pascal, A14–A15
– imagen bajo una aplicación lineal, 928
– mediana de, **498**
– momento de, **496**
– rectángulos, **26**
– y fuerza de un f uido, **487**
derivadas trigonométricas, en grados, **152**
tsunami de Indonesia (1996), **413**

utilidad, 861
– marginal, 861

Valladas, Helene, **370**
valor(es)
– absoluto de un número real, **2**
– actual, **371**–**372**
– – de f ujo de ingresos, **374**
– de prueba, dentro de intervalos, **204**
– de una función, **4**, **5**
– desconocidos, estimación de, **105**
– extremos, **183**–**186**, 839 , 844
– – absolutos, 843
– – existencia en un intervalo cerrado, A21
– – globales, 839 , 843 – 847
– – locales, 839
– máximo (máx), **183**–**189**
– – del cuadrado unidad, 844
– medio de una función, **309**–**310**, 885

– mínimo (mín), **183**–**188**
variables
– cambio de, 906
– dependientes, **5**, 831
– fórmula del cambio de, **367**, 931 – 937
– funciones de dos o más variables, 780 – 789
– independientes y dependientes, **5**, 831 , 842
– mudas, **247**, **259**
– representación gráf ca de funciones de, 781 – 789
– separación de, **514**
– y límites, 800 – 802
variación
– neta, **268**, **279**–**280**
– unitaria, **130**
vector(es), 674
– aceleración, 762 – 763 , 765 – 768
– – de tres partículas, 767
– – para el movimiento circular uniforme, 764
– base canónica, 680 , 698 , 702
– combinación lineal de, 667 – 668
– componentes de, 678 , 691
– constante, 743
– de fuerza, 669
– de la base canónica, 669 , 671 , 677
– de posición, 663 , 677
– dirección, 691
– director, 679
– en dos dimensiones, 663
– en movimiento, 730
– en tres dimensiones, 674 – 681 , 686 – 694
– equivalentes, 664 , 676 , 677 , 690
– fuerza, 663
– gradiente, 780 , 819 – 820 , 822 , 826
– – propiedades de, 820
– – regla del producto y regla de la cadena para, 820
– longitud de **i**, **j**, **k**, 689
– momento angular, 772
– no nulo, 666 , 668 , 671 , 677
– normal, 705 – 721 , 725 , 726 , 836 , 983 , 978
– – a un plano, 707
– – unitario, 756 , 768 – 771 , 777 , 953 , 995
– nulo, 678
– ortogonales, 705
– paralelos, 663 , 677
– perpendiculares, 699
– posición, 690
– producto, 694 – 697
– producto vectorial de, 699
– radial, 772 , 784
– tangente, 776 , 980
– tangente unitario, 752 – 758 , 768 , 793 , 956 , 957
– tangentes, 744 , 983
– – derivadas, 740 – 742
– – horizontal, a la cicloide, 741 - 742
– – representación de, 741
– traslación de, 678 , 690
– unidad, 682 , 834
– unitario ortogonal, 689
– unitarios, 689 , 823 , 995
– unitarios y ortogonales, 689
– velocidad, 740 , 744 , 758 – 759 , 776 , 779 , 832 , 945
– velocidad media, 769
velocidad, **41**, **67**, 628, 637
– a lo largo de una trayectoria parametrizada, 628
– angular, 629, 640, 765 , 1013
– como magnitud vectorial, 676
– de escape, **336**, **450**
– del viento, 945
– en un campo magnético, 697
– inicial, 764 , 757
– instantánea, **41**–**43**, **62**
– integral de, **280**–**281**
– interpretación gráf ca de, **43**
– ley de suma velocidades de Einstein, **407**
– media, **41**–**43**
– y aceleración, **131**–**132**, 773
– y pendiente de un recta secante, **44**–**45**
– y tasa de f ujo, **307**–**308**
– y tasas de cambio, **40**
– y velocidad, **41**, **131**–**132**
Verhuls, Pierre-François, **529**
vértice(s)
– de una elipse, 660
– de una hipérbola, 661– 663
– de un parábola, 663
Vía láctea, masa de, 776
Viète, fórmulas, **21**
volumen
– cálculo por integración, **314**–**316**
– como integral del área de la seccción transversal, **304**–**306**
– con signo de una región, 875
– de un sólido de revolución, **314**–**319**
– de una capa cilíndrica, **323**–**327**
– de una esfera, **315**, 907 – 908
– de una pirámide, **305**
– de una región, 891
– e integrales triples, 906
– máximo, 845
– producto vectorial y determinantes, 697 – 700
– y producto vectorial, 707 – 708

Wright, Edward, **421**

zonas de Fresnel, **509**

ÁLGEBRA

Rectas

Pendiente de la recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación explícita de la recta de pendiente m y ordenada en el origen b:

$$y = mx + b$$

Ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ de pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación punto-punto de la recta que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ y por $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{donde} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Las rectas de pendientes m_1 y m_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.
Las rectas de pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Circunferencias

Ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Fórmulas para la distancia y para el punto medio

Distancia entre $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Leyes de los exponentes

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Factorizaciones especiales

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Teorema del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$

Solución general de la ecuación de segundo grado

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Desigualdades y valor absoluto

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

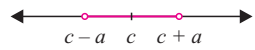
Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

$|x| = x \quad$ si $x \geq 0$.

$|x| = -x \quad$ si $x \leq 0$.

$|x| < a$ significa $-a < x < a$.



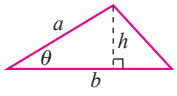
$|x - c| < a$ significa $c - a < x < c + a$.

GEOMETRÍA

Fórmulas para el área A, circunferencia C y volumen V

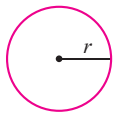
Triángulo

$A = \frac{1}{2}bh$
$= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$



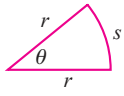
Círculo

$A = \pi r^2$
$C = 2\pi r$



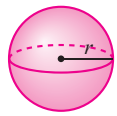
Sector de un círculo

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$
$s = r\theta$
(θ en radianes)



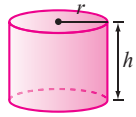
Esfera

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
$A = 4\pi r^2$



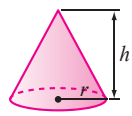
Cilindro

$V = \pi r^2 h$



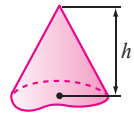
Cono

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



Cono de base arbitraria

$V = \frac{1}{3}Ah$
donde A es el área de la base



Teorema de Pitágoras: dado un triángulo rectángulo para el que la longitud de la hipotenusa es c y las longitudes de sus catetos son a y b, se verif ca: $c^2 = a^2 + b^2$.

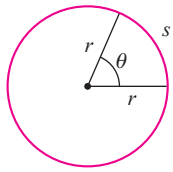
TRIGONOMETRÍA

Medidas angulares

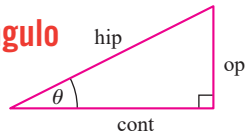
π radianes $= 180°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\quad 1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta \quad (\theta$ en radianes)



Definiciones en un triángulo rectángulo

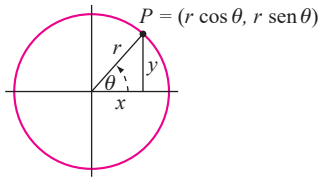


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cont}}{\text{hip}}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{op}}{\text{cont}} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\text{cont}}{\text{op}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{hip}}{\text{cont}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

Funciones trigonométricas

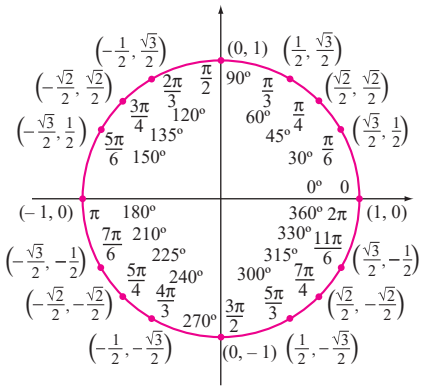


$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$$



Identidades fundamentales

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ $\qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$

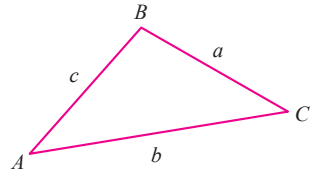
$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ $\qquad \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$ $\qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$ $\qquad \tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

El teorema del seno

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$



El teorema del coseno

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Fórmulas de adición y sustracción

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y$

$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}x\cos y - \cos x\operatorname{sen}y$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

Fórmulas para el ángulo doble

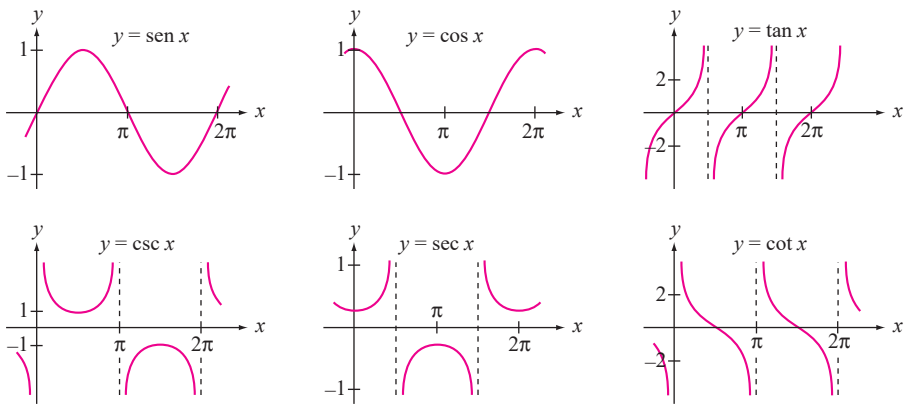
$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

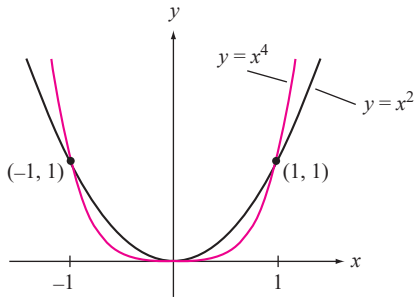
Gráficas de las funciones trigonométricas



FUNCIONES ELEMENTALES

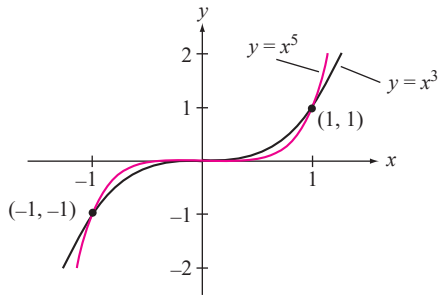
Funciones potenciales

$f(x) = x^n$, n entero positivo



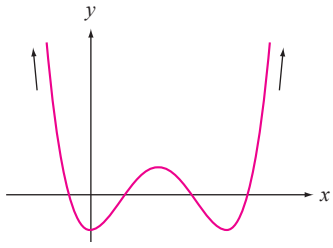
n par

Comportamiento asintótico de una función polinómica de grado par y término dominante positivo

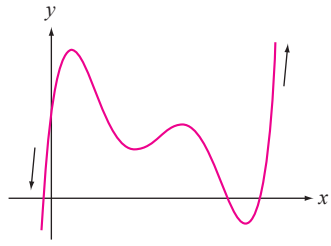


n impar

Comportamiento asintótico de una función polinómica de grado impar y término dominante positivo

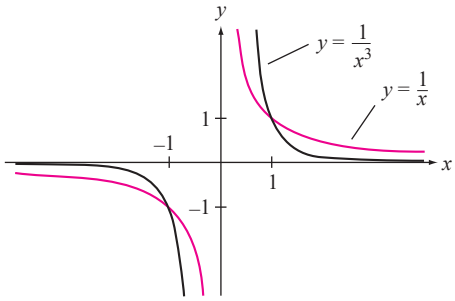


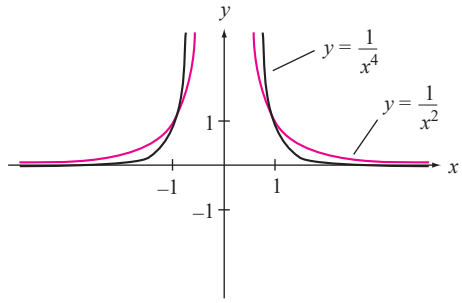
n par



n impar

$f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

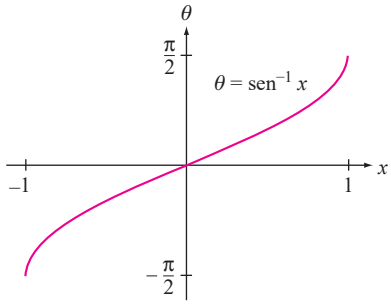




Funciones trigonométricas

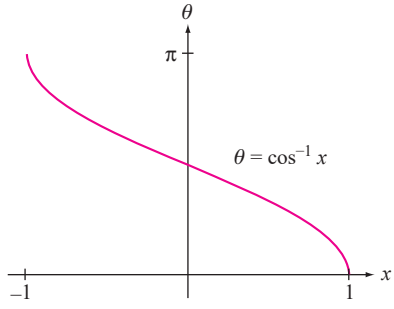
arc sen x = sen^{-1} $x = \theta$

$\Leftrightarrow$ sen $\theta = x$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$



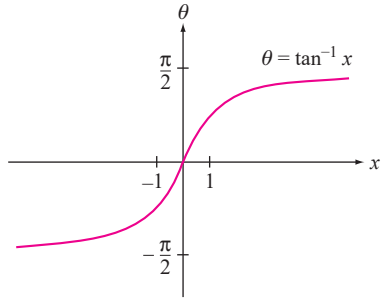
arc cos x = cos^{-1} $x = \theta$

$\Leftrightarrow$ cos $\theta = x$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$



arc tan x = tan^{-1} $x = \theta$

$\Leftrightarrow$ tan $\theta = x$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

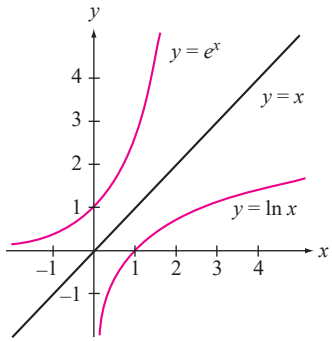


Funciones exponenciales y logarítmicas

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

$$\log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$



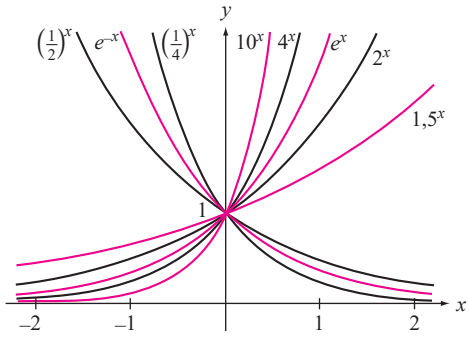
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad 0 < a < 1$$

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

$$\ln(e^x) = x \qquad e^{\ln x} = x$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$



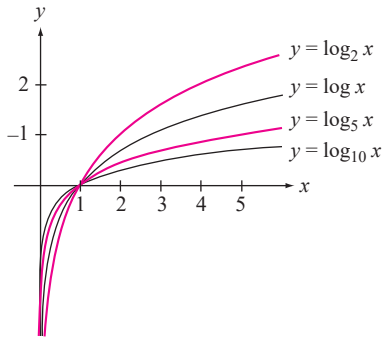
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad a > 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad 0 < a < 1$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a x$$



$$\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty, \quad a > 1$$

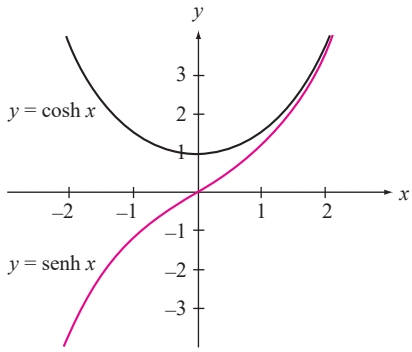
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad a > 1$$

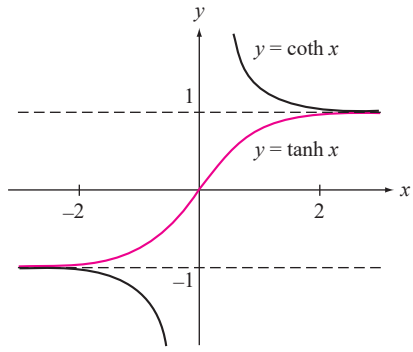
Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$





$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{senh} y = x$$

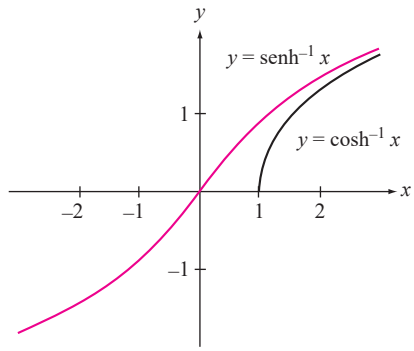
$$y = \cosh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \cosh y = x \quad \text{e} \quad y \geq 0$$

$$y = \tanh^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \tanh y = x$$

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x > 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$



DERIVACIÓN

Reglas de derivación

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ Regla de la potencia
4. $\frac{d}{dx}[c\,f(x)] = c\,f'(x)$
5. $\frac{d}{dx}[\,f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
6. $\frac{d}{dx}[\,f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ Regla del producto
7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ Regla del cociente
8. $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$ Regla de la cadena
9. $\frac{d}{dx}f(x)^n = n\,f(x)^{n-1}\,f'(x)$ Regla de la potencia generalizada
10. $\frac{d}{dx}f(kx + b) = k\,f'(kx + b)$
11. $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ donde $g(x)$ es la inversa $f^{-1}(x)$
12. $\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Funciones trigonométricas

13. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
14. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
15. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
16. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\,\cot x$
17. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\,\tan x$
18. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

Funciones trigonométricas inversas

19. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
20. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
21. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$
22. $\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2 - 1}}$
23. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2 - 1}}$
24. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$

Funciones exponenciales y logarítmicas

25. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
26. $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)\,a^x$
27. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$
28. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{(\ln a)\,x}$

Funciones hiperbólicas

29. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$
30. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$
31. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
32. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x\,\coth x$
33. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x\,\tanh x$
34. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

Funciones hiperbólicas inversas

35. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
36. $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
37. $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}$
38. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2 + 1}}$
39. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\,\sqrt{1 - x^2}}$
40. $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}$

INTEGRACIÓN

Sustitución

Si un integrando es de la forma $f(u(x))u'(x)$, entonces reescriba la integral en términos de u y de su diferencial $du = u'(x)dx$:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Fórmula de integración por partes

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

TABLA DE INTEGRALES

Formas básicas

1. $\displaystyle\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\quad n \neq 1$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

3. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

4. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

6. $\displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

8. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

9. $\displaystyle\int \sec u\,\tan u\,du = \sec u + C$

10. $\displaystyle\int \csc u\,\cot u\,du = -\csc u + C$

11. $\displaystyle\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

12. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

13. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

14. $\displaystyle\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

Formas exponenciales y logarítmicas

17. $\displaystyle\int u\,e^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au - 1)\,e^{au} + C$

18. $\displaystyle\int u^n\,e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n\,e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}\,e^{au}\,du$

19. $\displaystyle\int e^{au}\,\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

20. $\displaystyle\int e^{au}\,\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

21. $\displaystyle\int \ln u\,du = u\,\ln u - u + C$

22. $\displaystyle\int u^n\,\ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\,\ln u - 1] + C$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{u\,\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

Formas hiperbólicas

24. $\displaystyle\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

25. $\displaystyle\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

26. $\displaystyle\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

27. $\displaystyle\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

29. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh\frac{1}{2}u\right| + C$

30. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

31. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

32. $\displaystyle\int \operatorname{sech} u\,\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

33. $\displaystyle\int \operatorname{csch} u\,\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas trigonométricas

34. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

35. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

36. $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

37. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}\left(2 + \operatorname{sen}^2 u\right)\cos u + C$

39. $\displaystyle\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}\left(2 + \cos^2 u\right)\operatorname{sen} u + C$

40. $\displaystyle\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

41. $\displaystyle\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

42. $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\,\tan u + \frac{1}{2}\ln[\sec u + \tan u] + C$

43. $\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{n}\csc u\,\cot u + \frac{1}{n}\ln|\csc u - \cot u| + C$

44. $\int \operatorname{sen}^n u\,du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u\,\cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,du$

45. $\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u\,\operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$

46. $\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$

47. $\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$

48. $\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u\,\sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$

49. $\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u\,\csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$

50. $\int \operatorname{sen} au\,\operatorname{sen} bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

51. $\int \cos au\,\cos bu\,du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

52. $\int \operatorname{sen} au\,\cos bu\,du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

53. $\int u\,\operatorname{sen} u\,du = \operatorname{sen} u - u\,\cos u + C$

54. $\int u\,\cos u\,du = \cos u + u\,\operatorname{sen} u + C$

55. $\int u^n\,\operatorname{sen} u\,du = -u^n\,\cos u + n\int u^{n-1}\,\cos u\,du$

56. $\int u^n\,\cos u\,du = u^n\,\operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\,\operatorname{sen} u\,du$

57. $\int \operatorname{sen}^n u\,\cos^m u\,du =$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u\,\cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\,\cos^m u\,du$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u\,\cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u\,\cos^{m-2} u\,du$$

Formas trigonométricas inversas

58. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\,du = u\,\operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

59. $\int \cos^{-1} u\,du = u\,\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

60. $\int \tan^{-1} u\,du = u\,\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + C$

61. $\int u\,\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

62. $\int u\,\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

63. $\int u\,\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

64. $\int u^n\,\operatorname{sen}^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\,\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\ n \neq -1$

65. $\int u^n\,\cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\,\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right],\ n \neq -1$

66. $\int u^n\,\tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\,\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right],\ n \neq -1$

Formas que contienen $\sqrt{a^2-u^2}$, $a > 0$

67. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

68. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

69. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

70. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

71. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

72. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

73. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

74. $\int \left(a^2-u^2\right)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}\left(2u^2-5a^2\right)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

75. $\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formas que contienen $\sqrt{u^2-a^2}$, $a > 0$

76. $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

77. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du =$

$$= \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

78. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

79. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

80. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

81. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

82. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2 u} + C$

83. $\int \frac{du}{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

Formas que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$, $a > 0$

84. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

85. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du =$

$$= \frac{u}{8}\left(a^2+2u^2\right)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$$

86. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

87. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

88. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$

89. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$

90. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right|+C$

91. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u}+C$

92. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}}+C$

Formas que contienen $a + bu$

93. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|)+C$

94. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu}$

$$= \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right]+C$$

95. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|+C$

96. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

97. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)}+\frac{1}{b^2}\ln|a+bu|+C$

98. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

99. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2}$

$$= \frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right)+C$$

100. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}+C$

101. $\displaystyle\int u^n\sqrt{a+bu}\,du =$

$$= \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$$

102. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+C$

103. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

104. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C,$ si $a>0$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}}+C, \quad \text{si } a<0$$

105. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

106. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu}+a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

107. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u}+\frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

Formas que contienen $\sqrt{2au-u^2}$, $a > 0$

108. $\displaystyle\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$

109. $\displaystyle\int u\sqrt{2au-u^2}\,du =$

$$= \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$$

110. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$

111. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au}+C$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Teorema del valor intermedio

Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$, entonces para cualquier valor M comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

Teorema del valor medio

Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Valores extremos sobre un intervalo cerrado

Si $f(x)$ es una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza tanto su valor máximo, como mínimo, en el intervalo $[a, b]$. Además, si $c \in [a, b]$ y $f(c)$ es un valor extremo (máximo o mínimo), entonces c es o bien un punto crítico de $f(x)$ o bien uno de los extremos a o b.

El teorema fundamental del cálculo (Parte I)

Suponga que $f(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ sobre $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

El teorema fundamental del cálculo (Parte II)

Suponga que $f(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$. Entonces la función área $A(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f(x)$, es decir:

$$A'(x) = f(x) \text{ o equivalentemente } \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Además, $A(x)$ cumple la condición inicial $A(a) = 0$.

JON ROGAWSKI

CÁLCULO

VARIAS VARIABLES

Segunda edición
a todo color

Jon Rogawski, con una trayectoria docente de más de 30 años, ha tenido la oportunidad de escuchar y aprender de sus propios estudiantes. Estas valiosas enseñanzas forman ya parte de su pensamiento, manera de escribir y de diseñar un libro de cálculo infinitesimal. Fruto de esa larga experiencia, este libro pone especial énfasis en los siguientes aspectos:

(a) Exposición clara y de fácil comprensión que se anticipa a las dificultades de los estudiantes.

(b) Diseño y figuras que transmiten las ideas expuestas en el texto.

(c) Elementos destacados en el texto que enfatizan los conceptos y el razonamiento matemático: *Apunte conceptual*, *Apunte gráfico*, *Las hipótesis son importantes*, *Recordatorio* y *Perspectiva histórica*.

(d) Una amplia colección de ejemplos y ejercicios de dificultad gradual que enseñan las destrezas básicas y técnicas de resolución de problemas, refuerzan la comprensión conceptual y motivan el cálculo a través de aplicaciones interesantes. Cada sección contiene ejercicios que abordan nuevas ideas y retos que ayudan a los estudiantes a desarrollar sus capacidades.

EDITORIAL REVERTÉ

www.reverte.com